

الباب الرابع

نهايات الدوال المثلثية

Limits of the triangle functions

فى هذا الفصل سوف نقدم مفهوم نهايات الدوال المثلثية من خلال

الامثلة التالية:

امثلة محلولة Solved Problems

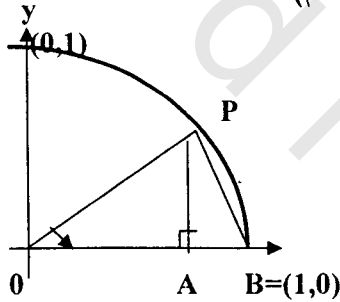
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

مثال: اثبت ان

البرهان : نفرض ان $0 < x < 1$

نأخذ دائرة نصف قطرها الوحدة ومركزها (0) بفرض أن P نقطة

على المحيط (انظر الرسم)



من الشكل السابق نجد ان

طول $AP >$ طول

$$\sin x < AP$$

$$< B P$$

$$< B P \text{ طول القوس}$$

$$= x$$

في هذا المثال نجد ان

$$f(x) = \sin x, \quad L = a = 0$$

لذلك نجد ان لاي عدد موجب صغير

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall \quad |x - 0| < \delta \quad (1)$$

بذلك نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad (2)$$

حل آخر : باستخدام النظرية (8) (The sandwich theorem)

$$\therefore |\sin x| \leq |x| \quad (i)$$

$$|x| \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad x \rightarrow 0 \quad \text{وبفرض أن}$$

يمكننا وضع المقياسين (i) على الصورة :

$$|x| \leq \sin x \leq |x| -$$

نأخذ النهاية عند $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

فإننا نحصل على

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

مثال : اثبت أن

الحل :

$$0 \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x|$$

$$0 \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|, \quad x \neq 0$$

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

لذلك يمكننا كتابة هذه المتباينة على الصورة

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

نأخذ النهاية عندما $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \pm |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

مثال: اثبت ان

الحل:

نستخدم نظرية (8) بالاضافة إلى أن

$$\text{if } 0 \leq a \leq 1, \text{ then } 0 \leq a \leq \sqrt{a} \leq 1 \quad (3)$$

على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ نجد ان $\cos x > 0$ لذلك فان

$$0 < 1 - \sin^2 \leq \sqrt{1 - \sin^2} = \cos x \leq 1 \quad (4)$$

ناخذ النهاية عندما $x \rightarrow 0$ نجد ان

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x) = 1 - (\lim_{x \rightarrow 0} \sin x) = 1 - 0 = 1 \quad (5)$$

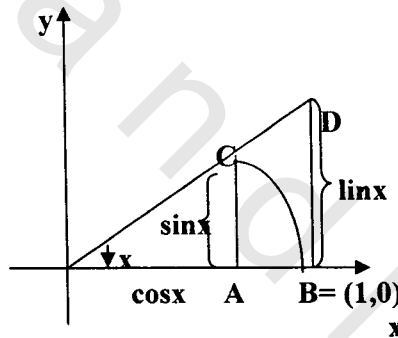
باستخدام المتباينة (4) ونظرية (8) نستنتج ان $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

نظرية: إذا كانت x مقاسه بالتقدير الدائرى فان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (6)$$

البرهان: ترسم دائرة مركزها (O) ونصف قطرها الوحدة . نفرض

النقطة C على محيط الدائرة حيث $\widehat{AOC} = x$ (radius)



المماسى BD يقابل امتداد OC في نقطة D . من الرسم نجد ان

area of $\Delta OAC < \text{area of sector } OBC < \text{area of } \Delta OBD$

$$\frac{1}{2} \cos x \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

بالضرب في 2 والقسمة على $\sin x$ حيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

بقلب حدود المتباينة نجد ان

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \quad (7)$$

المتباينة (i) صحيحة لقيم x اذا كانت

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x < 0$$

لذلك سوف نستخدم نظرية (8) وذلك بوضع

$$g(x) = \cos x, f(x) = \frac{\sin x}{x}, h(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

نأخذ النهاية عندما $x \rightarrow 0$ نجد ان

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

بالتالى نحصل على

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتيجة (1) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

(9)

البرهان :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$$

نتيجة (2) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

البرهان :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{1 - \cos x}{x} \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \end{aligned}$$

نأخذ النهاية عندما $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= 0.1 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$$

أوجد

الحل :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \right) \left(\frac{5x}{3x} \right) \\ &= 1.1. \left(\frac{5}{3} \right) = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

أوجد

الحل :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)}{2 \sin^2(x/2)} \\ &= \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{2(x/2) \cdot \cos(x/2)}{\sin(x/2)} = 2 \cdot \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{x/2}{\tan(x/2)} = 2.1 = 2\end{aligned}$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot 5x}{\cot 3x}$$

أوجد

الحل :

$$\therefore \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

Put $z = x - \frac{\pi}{2}$, then as $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $z \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot 5x}{\cot 3x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cot 5(z + \frac{\pi}{2})}{\cot 3(z + \frac{\pi}{2})}$$

النهايات اليمنى واليسرى

Right and left limits

فى التعريف السابق لم يكن هناك اية قيود على كيفية اقتراب (x) من (a) ولكن فى بعض الاحيان يكون من الانسب تحديد كيفية هذا الاقتراب لنفرض أن x , a نقطتان على المحور الحقيقى حيث a ثابتة و x متغيرة ، لذلك فان x يمكنها ان تقترب من (a) من جهة اليمين أو من جهة اليسار. ومن الواضح أنه إذا كانت x تقرب من (a) من جهة اليمين وتكتب $x \rightarrow a^+$.

وكذلك هنا تقترب x من (a) بحيث تكون قيمها المتعاقبة اقل من (a) فاننا نقول ان x تقترب من (a) من جهة اليسار وتكتب $x \rightarrow a^-$ وإذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 , \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

فإننا نقول بأن L_1, L_2 تمثلان النهايتان اليمنى واليسرى على الترتيب

ويكون $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ إذا فقط تساوت النهايتين اليمنى واليسرى

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

أى أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

إذا وإذا فقط كانت

تعريف (النهاية اليمنى):

يقال أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى النهاية L_1 من جهة اليمين إذا كان لاي

عدد صغير $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صغير $\delta > 0$ بحيث ان

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon \quad \forall 0 < x - a < \delta$$

وفى هذه الحالة تكتب

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1 \quad \text{or} \quad f(a^+) = L_1$$

تعريف (النهاية اليسرى):

يقال أن الدالة $f(x)$ تؤول إلى النهاية L_2 من جهة اليمين إذا كان لاي

عدد صغير $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صغير $\delta > 0$ بحيث ان

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon \quad \forall 0 < a - x < \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2 \quad \text{or} \quad f(a^-) = L_2$$

وفى هذه الحالة تكتب

Solved Problems أمثلة محلولة

مثال: باستخدام التعريف اثبت أن

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

الحل :

$$|f(x) - L| = \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = \left| \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} - 4 \right|$$

$$|x + 2 - 4| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \varepsilon$$

$$\therefore |f(x) - 4| < \varepsilon \quad \forall x - 2 < \delta$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

مثال: باستخدام التعريف اثبت ان

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

اذا كانت $f(x)$ معرفة بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & x \neq 1 \\ 7, & x = 1 \end{cases}$$

الحل :

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \Rightarrow |(4x - 3) - 1| < \varepsilon \Rightarrow 4|x - 1| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x - 1| = \delta, \delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

غير موجودة.

اثبت ان

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{if } x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

نبحث نهاية الدالة عندما $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

لذلك فان النهاية تكون غير موجودة.

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{if } x < 2 \\ x^2 & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

اذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

اوجد

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 2) = 6 - 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & :x < -2 \\ 2x + 3 & :x > -2 \end{cases}$$

إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

أوجد

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + 2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (2x + 3) = -4 + 3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

النهاية غير موجودة.

مثال : إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{if } x < -2. \\ 4x + 5 & \text{if } -2 < x < 3 \\ 6x - 1 & \text{if } 3 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

أوجد النهايات

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

أولا نوجد

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (4x + 5) = -8 + 5 = -3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$f(-2)$ غير موجودة .

ثانيا نبحث وجود النهاية

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4x + 5) = 12 + 5 = 17$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (6x - 1) = 18 - 1 = 17$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\therefore f(3) = 17$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x - 5|}{x - 5}$$

اوجد النهاية

الحل:

يمكننا تعريف قاعدة الدالة كالآتي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 5}{x - 5} & ; x > 5 \\ -\frac{(x - 5)}{x - 5} & ; x < 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(5-x)}{x-5} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{x-5} = 1$$

$$\therefore f(5^+) \neq f(5^-)$$

ليست موجودة.

مثال :

$$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{(x+1)(x+2)}$$

إذا كانت

ابحث وجود النهايات الآتية :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow (1)^+} f(x)$$

الحل :

يمكننا تعريف الدالة كالتالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{(x+1)(x+2)}, & x < 0 \\ \frac{x^2 - x}{(x+1)(x+2)}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+2} \\ &= \frac{-1}{-1+2} = -1 \end{aligned}$$

النهاية موجودة

$$f(-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} = 0$$

$$f(1) = 0$$

النهاية موجودة

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \&$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{0}{1 \times 2}$$

$$\Rightarrow f(0^-) = f(0^+) = 0$$

النهاية موجودة

(Limit of a function at infinity) نهاية دالة عند اللانهاية

تعريف :

يقال أن الدالة $f(x)$ تتوّل إلى النهاية L عند $x \rightarrow \infty$ وإذا استطعنا أن نجعل الفرق بين $f(x)$ والعدد L اصغر ما يمكن عندما تأخذ x قيم كبيرة جدا (أكبر ما يمكن) أي أن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{if } \forall \varepsilon > 0 \text{ exists } \delta > 0 \text{ such that}$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x < \delta$$

ملحوظة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

1- يمكننا بسهولة أن نلاحظ أن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

وبالتالي يكون

حيث n عدد صحيح موجب

2- للحصول على دالة جبرية كسرية عندما $x \rightarrow \infty$

- نقسم كلا من البسط والمقام على المتغير x المرفوع لأكبر قوة فى الدالة

- نستخدم الملحوظة (1) وخواص النهايات للحصول على النهاية المطلوبة ان وجدت.

امثلة محلولة Solved Problems

مثال: اوجد النهايات الآتية :

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 6}{2x - 7x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x}{2x^3 - 6x^2 + 4x - 1}$$

الحل : بقسمة كل من البسط والمقام على x^2

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 6}{2x - 7x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}}{\frac{2}{x} - 7}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 6}{2x - 7x^2} = \frac{5 - 0 + 0}{0 - 7} = -\frac{5}{7}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x}{2x^3 - 6x^2 + 4x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{0 - 0}{2 - 0 + 0 - 0}$$

مثال : اوجد

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x,$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(2)^x - 5^x}{4(3)^x + 2(5)^x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1 + 7^{x-1} x(3)}{7^3 - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 + x^3}}{\sqrt[5]{x^7 - x^2}}$$

الحل : ملحوظة : يجب ملاحظة أن

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} r^x = 0 \quad \text{if } |r| < 1$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} r^x = \infty \quad \text{if } r > 1$$

وذلك لان

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0 \quad -1 < \frac{3}{4} < 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(2^x) - (5^x)}{4(3^x) + 2(5^x)}$$

بالقسمة على (5^x) بسطا ومقاما

$$\therefore \text{L.H.S} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1}{4 \left(\frac{3}{5}\right)^x + 2} = \frac{0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} + 7^{x-1} x(3)}{7^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2^x)(2) + (7^x)(7^{-1})(3)}{(7^x) - 1}$$

بالقسمة بسطا ومقاما على 7^x

$$\therefore \text{L.H.S} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{3}{7}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^x}$$

$$\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < 1$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \frac{0 + 3/7}{1 - 0} = \frac{3}{7}$$

وبما أن

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 + x^3}}{\sqrt[7]{x^7 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[7]{x^7 \left(1 - \frac{1}{x^5}\right)}} \rightarrow$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt[7]{1 - \frac{1}{x^5}}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{1+0}}{\sqrt[7]{1-0}} = \frac{1}{1} = 1.$$

للحصول على نهاية دالة عندما $x \rightarrow -\infty$

نتبع نفس الخطوات للحصول على النهاية عندما $x \rightarrow -\infty$

أى أننا نقسم كل من البسط والمقام على x المرفوعة لأكبر قوة في الدالة المعطاة مع ملاحظة أن

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{if } x > 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

وبما أن x كمية سالبة نجد أن

$$\sqrt{x^2} = -x, \quad \sqrt[4]{x^4} = -x, \dots$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x + 1}}{3x - 2}$$

مثال : أوجد

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 6}{\sqrt{9x^2 + 7}}$$

الحل :

(a) بقسمة كل من البسط والمقام على $x = \sqrt[3]{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x + 1}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}}}{3 - 2\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt[3]{8}}{3} = \frac{2}{3}$$

(b) بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{x^2} = -x$ نحصل على

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 6}{\sqrt{9x^2 + 7}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5 + 6/x}{\sqrt{9 + 7/x^2}} = \frac{-5}{\sqrt{9}} = -\frac{5}{3}$$

مثال : اذا كانت

$$f(x) = \frac{2(3)^x - 4(5)^x}{3(5)^x - 2(3)^x}$$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ فاوجد كلا من

الحل :

a) $f(x) = \frac{2(3)^x - 4(5)^x}{3(5)^x - 2(3)^x}$

بقسمة كل من البسط والمقام على (5^x) نحصل على

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(3)^x - 4(5)^x}{3(5)^x - 2(3)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{3}{5}\right)^x - 4}{3 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^x}$$

$$\frac{3}{5} < 1 \Rightarrow \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \frac{-4}{3}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2(3)^x - 4(5)^x}{3(5)^x - 2(3)^x}$

بقسمة كلا من البسط والمقام على $(3)^x$ اى اقل عدد مرفوع للقوة x

مع ملاحظة ان

if $x < 0$, then $\lim_{x \rightarrow -\infty} r^x = 0$ when $r > 1$

$$\therefore \text{L.H.S} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \left(\frac{5}{3}\right)^x}{3 \left(\frac{5}{3}\right)^x - 2} = \frac{2}{-2} = -1$$

مثال : أوجد

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 2 - 3x})\sqrt{4x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2 + 3} - \sqrt{4x^2 - 3})$

الحل :

(a) بضرب كلا من البسط والمقام في مرافق القوس الاول

$$\begin{aligned} \therefore \text{L.H.S} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(\sqrt{9x^2 + 2 - 3x})(\sqrt{9x^2 + 2 + 3x})\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{9x^2 + 2 + 3x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(9x^2 + 2 - 9x^2)\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{9x + 2 + 3x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt{9x^2 + 2 + 3}} \right] \end{aligned}$$

بقسمة كلا من البسط والمقام على x مع ملاحظة ان $\sqrt{x^2} = x$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2\sqrt{4+1/x^2}}{\sqrt{9+2/x^2+3}} \right] = \frac{2\sqrt{4+0}}{\sqrt{9+0+3}} \\ &= \frac{2 \times 2}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(b) بضرب كلا من البسط والمقام في مرافق القوس

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{(\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{4x^2-3})(\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-3})}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-3}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{(4x^2+3)-(4x^2-3)}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-3}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{6x}{\sqrt{4x^2+3}+\sqrt{4x^2-3}} \right] \end{aligned}$$

بقسمة كلا من البسط والمقام x مع ملاحظة ان $\sqrt{x^2} = -x$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-6}{\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}} \right) = \frac{-6}{2+2} = -\frac{3}{2}$$

تمارين

اوجد النهايات الاتية ان وجدت:

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{5/2} - 5x^{3/2})$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + x^{4/3}}{6-x^{3/4}}$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x-2}$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{x} + 4x^2 - 6}{\sqrt{x} + \sqrt{x+4}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ 1-x & x > 0 \end{cases}$$

11) إذا كانت F معرفة بالقاعدة

أوجد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ هل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ أم لا

12) إذا كانت $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ اوجد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ (c)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ (b)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ (a)}$$

13) إذا كانت f معرفة بالقاعدة

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ -x & -1 < x \leq 1 \\ -x^2 & 1 < x \end{cases}$$

فارسم منحنى الدالة f
