الباب الثالث

النهايات وأتصال الدوال

Limited & continuity of Functions

مفهوم نهاية الدالة واحد من أهم المفاهيم الأساسية التى تفرق بين علم التفاضل عن بالقى علوم الرياضيات الاخرى مثل الهندسة والجبر .

أولا : نهاية الدالة :

فى علم التفاضل وتطبيقاته غالبا مانهتم بتعيين قيم $f(x)$ للدالة f عندما يقترب المتغير المستقل x من عدد معين a. ولكن ليس من الضرورى أن يساويه. فى واقع الامر غالبا ما يكون هذا العدد a خارج نطاق تعريف الدالة أى أن $f(a)$ غير معرفة .

والان دعنا نطرح السؤال الاتى :

– عندما x تقترب بدرجة كافية من العدد a $(x \neq a)$ هل تقترب $f(x)$ من عدد معين وليكن L؟

اذا كانت الاجابة بنعم فانه يقال ان نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من a تساوى L . ونرمز لذلك كالاتى :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{(I)}$$

والان سوف نوضح هذا المعنى هندسيا .

الخط المماس ℓ عند نقطة P على دائرة يمكن تعريفة على انه الخط الذى يشترك مع الدائرة فى نقطة واحدة كما هو موضح فى شـــكل (1) .

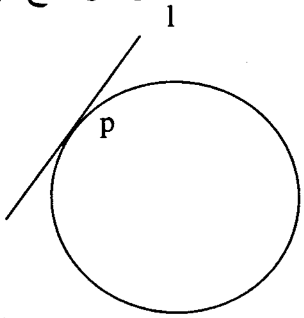


Fig. 1

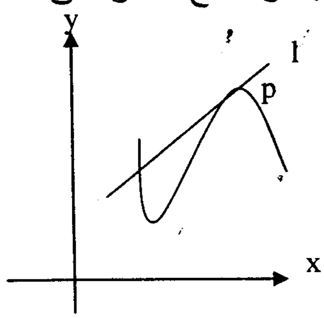


Fig. 2

هذا التعريف لايكون صحيحا لأى منحنى لأن الخط المماس يمكن أن يقطع منحنى الدالة عدة مرات كما فى شكل (2) .

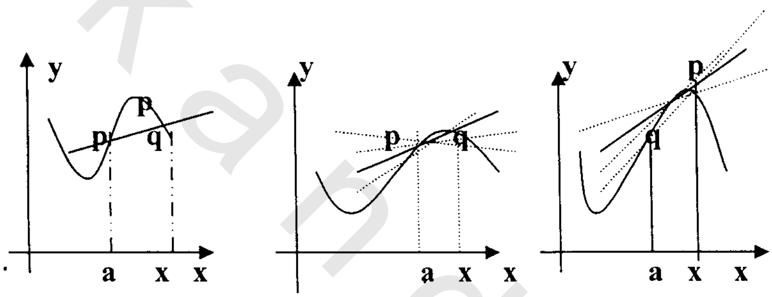
لتعريف الخط المماسى ℓ عند نقطة P على المنحنى يكفى ذكر ميل الخط m لان ذلك يحدد تماما الخط ℓ .

وللوصول الى ميل الخط m سوف نبدأ باختيار أى نقطة أخرى ولتكن Q على المنحنى ونعتبر الخط الواصل بين P, Q كما فى شكل (3-a) ويسمى هذا الخط بالخط **القاطع للمنحنى** (secant line) .

وسوف نتابع تغير هذا الخط كلما زادت نقطة Q قربا من P . اذا كانت Q تقترب من P من جهة اليمين سوف يكون عندنا الوضع كما فى شكل (3-b) .

حيث الخطوط المتقطعة تبين المواضع المختلفة لهذا الخط القاطع وهى تبين أنه اذا كانت Q قريب من P فان الميل m_{PQ} للخط القاطع يكون قريبا من الميل m للخط المماسى ℓ شكل (3-c) يوضح نفس المعنى ولكن عندما تقرب Q من جهة اليسار من النقطة P .

بهذا يمكننا القول أنه إذا كان ميل الخط القاطع m_{PQ} يأخذ قيمة محددة عندما Q تقرب من P فان هذه القيمة تعرف بأنها ميل الخط المماسى ℓ عند النقطة P.



(3-a) (3-b) (3-c)

اذا كان الاحداثى السينى للنقطة P هو a والا حداثى السينى للنقطة Q هو x فان الجملة "Q تقترب من P" يمكن استبدالها بـــ "x تقترب من a" وهذا يقودنا الى تعريف ميل الخط المماسى (2)

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ}$$

من المهم أن نلاحظ أن $x \neq a$ خلال هذه العملية .

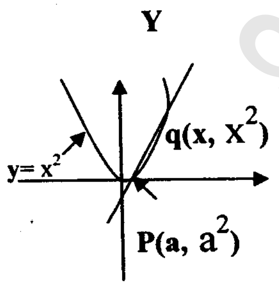
فى الحقيقة اذا كانت $x = a$ فان $P = Q$ ويكون m_{PQ} لا وجود له .

امثلة محلولة Solved Problems

مثال :

اذا كان a أى عدد حقيقى استخدم التعريف السابق لايجاد ميل الخط المماسى للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة $P(a, a^2)$ ثم أوجد معادلة الخط المماسى ℓ للمنحنى عند النقطـــــــة $(3/2, 9/4)$.

الحـــــل :منحنى الدالة موضح بالرسم من تعريف الميل



بواسطة نقطتين على الخط المستقيم نجد أن

ميل PQ هو

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

وباستخدام التعريف

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

بما ان $x - a \neq 0$ وبالتالى فان

$$m = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)}$$
$$m = \lim_{x \to a}(x+a) = 2a$$

لايجاد معادلة المماسى عند النقطة (3/2, 9/4) نجد ان $a = 3/2$

أى أن

$$M = 2\,(3/2) = 3$$

∴ معادلة الخط المماسى ℓ عند هذه النقطة هى

$$y - 9/4 = 3\,(x - 3/2)$$
$$12x - 4y - 9 = 0.$$

وللوصول الى التعريف العام لنهاية دالة عندما يؤول المتغير المستقل x الى قيمة معينة بحيث تكون الدالة غير معرفة عندها (أو معرفة)

<u>مثال</u>

نفرض الدالة $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x-1}, x \neq 1$

نلاحظ ان الدالة غير معرفة عند $x = 1$ ولذلك سوف نحاول ايجاد قيمة الدالة عندما تقترب x من 1 ولكن $x \neq 1$ اى نجعل x تأخذ قيما متتابعة اصغر من أو أكبر من 1 ولكنها قريبة جدا من 1 كما فى الجدولين التاليين:

x	f(x)
1.1	5.2
1.01	5.02
1.001	5.002
1.0001	5.0002
1.00001	5.00002

x	f(x)
0.9	4.8
0.99	4.98
0.999	4.998
0.9999	4.9998
0.99999	4.99998

نلاحظ ان قيمة الدالة تقترب من العدد 5 عندما تقترب x من العدد 1 ،

لذلك سوف نكون العبارات التالية:

If $4.8 < f(x) < 5.2$ **$0.9 < x < 1.1$**

$4.98 < f(x) < 5.02$ **$0.99 < x < 1.101$**

$0.999 < x < 1.001$ **$4.998 < f(x) < 5.002$**

$4.9998 < f(x) < 5.0002$ **$0.9999 < x < 1.0001$**

.. ..

.. ..

باستخدام العددين الحقيقيين الموجبين $\delta > 0, \varepsilon > 0$ فنجد ان كل هذه العبارات تعنى ان

$$\text{If } 1-\delta < x < 1+\delta, \quad \text{then } 5-\varepsilon < f(x) < 5+\varepsilon \qquad (4)$$

فمثلا فى العبارة الاولى نجد ان $\delta = 0.1, \varepsilon = 0.2$

والعبارة الثانية نجد ان

$\delta = 0.01, \varepsilon = 0.02$

العبارة الثالثة نجد ان $\delta = 0.001, \varepsilon = 0.002$

وهكذا .

ومن الواضح ان العبارة (4) يمكن وضعها على الصورة

$$\text{If} \quad -\delta < x < \delta, \quad \text{then} \quad -\varepsilon < f(x) - 5 < \varepsilon \qquad (5)$$

باستخدام القيمة المطلقة يمكننا وضعها على الصورة

$$|x-1| < \delta, \quad \text{then} \quad |f(x)-5| < \varepsilon \qquad (6)$$

وبما ان $f(x)$ غير معرفة عندما $x = 1$ فيجب اضافة الشرط ان $x \neq 1$

اى نضع

$$\text{If} \quad 0 < |x-1| < \delta, \quad \text{then} \quad |f(x)-5| < \varepsilon \qquad (7)$$

من التحليل السابق

$$\text{If} \quad 0 < |x-1| < 0.1, \quad \text{then} \quad |f(x)-5| < 0.2$$

وذلك بوضع $\delta = 0.1, \varepsilon = 0.2$

$$\text{If} \quad 0 < |x-1| < 0.001, \quad \text{then} \quad |f(x)-5| < 0.002$$

وذلك بوضع $\delta = 0.001, \varepsilon = 0.002$

وهكذا يمكننا اعطاء ε اى كمية صغيرة نحصل على الكمية المناظرة

للمقدار الصغير δ بحيث تتحقق العلاقة

$$\text{If} \quad 0 < |x-1| < \delta, \quad \text{then} \quad |f(x)-5| < \varepsilon$$

فاننا نقول ان نهاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من العدد 1 تساوى 5

ونكتب ذلك كالاتى

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5$$

والان يمكننا اعطاء التعريف العام **لنهاية دالة** .

تعريف (1) (نهاية الدالة)

بفرض أن f دالةِ معرفة على **الفترة المفتوحة** I **التى** تحتوى العدد a مع احتمال عدم تعريفها عند a نفسها ، وبفرض ان L عدد حقيقى فالعبارة

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

تعنى ان لاى $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ يعتمد على ε بحيث يكون

$$\text{If} \quad 0 < |x-1| < \delta, \quad \text{then} \quad |f(x)-5| < \varepsilon \qquad (8)$$

اذا كانت

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

فانه يقال ان نهاية الدالة f(x) عندما تؤول x الى a هى L.

ملاحظة :

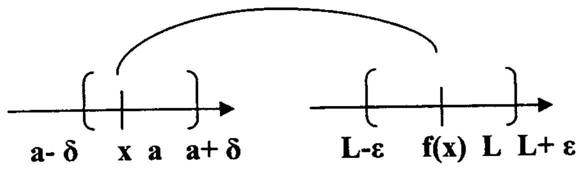
العبارة $|f(x)-L| < \varepsilon$ تعنى ان $f(x) \in N(L,\varepsilon)$ أى تقع فى الجوار $N(L,\varepsilon)$ وايضا $|x-a| < \delta$ تعنى ان $n \in N(a,\delta)$ بذلك يمكن إعادة صياغة تعريف نهاية الدالة على النحو التالى :

تعريف (2) : يقال أن

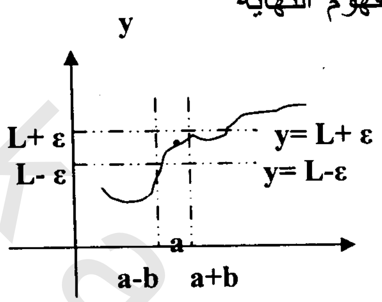
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ فانه يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث

$$f(x) \in N(L,\varepsilon) \quad \text{for every} \quad x \in N(a,\delta) \quad (9)$$



الرسم التالى يوضح مفهوم النهاية



$\lim f(x) = L$

ملاحظات :

1- من التعريف السابق نجد ان الدالة f(x) تؤول الى النهاية L عندما x تؤول الى a ولكن هذه الدالة من الممكن الا تكون معرفة عند x = a ، معنى ذلك ان وجود نهاية للدالة عند نقطة معينة ليس معناه ان الدالة معرفة عند هذه النقطة ولكن عموما عند وجود نهاية للدالة عند نقطة معينة ولتكن a تكون الدالة معرفة فى أى جوار لهذه النقطة a وليس من الضرورى ان تكون معرفة عند a نفسها .

2- التعريف السابق لايمكننا من تعريف نهاية دالة عند عدد معين ولكن يمكننا فقط من اثبات ان هذه النهاية صحيحة .

3- اذا كان $\lim_{x \to a} f(x) = L$

فاذا وضعنا $x = a + h$ فان $\text{as} \quad x \to a, \quad \text{then} \quad h \to 0$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{iff} \quad \lim_{h \to 0} f(a+h) = L$$

Solved Problems أمثلة محلولة

مثال

اذا كانت $f(x) \in N(4,\varepsilon), f(x) = 3x + 7$

لكل $x \in N(-1, 0.1)$ اوجد ε.

الحـــل :

$$f(x) \in N(4,\varepsilon)$$

تعنى ان

$$|(3x+7)-4| < \varepsilon$$

$$\text{i.e.} \ |3x+3| < \varepsilon ; 3|x+1| < \varepsilon$$

أى أن

$$|x+1| < \varepsilon/3 \qquad \text{(i)}$$

ولكن معطى ان

$$x \in N(-1, 0.1), \quad \text{then} \quad |x-(-1)| < 0.1$$

$|x+1|<0.1$ (ii)

من (i) , (ii) نستنتج ان $\varepsilon/3 = 0.1 \Rightarrow \varepsilon = 0.3$

مثال: باستخدام التعريف اثبت ان

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=1$$

الحـــل: باستخدام التعريف نجد ان

$$\left|\frac{x^2-5x+6}{x-3}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)}-1\right|<\varepsilon$$

$$\therefore |x-2-1|<\varepsilon \Rightarrow |x-3|<\varepsilon \qquad (1)$$

$$\forall \quad |x-3|<\delta \qquad (2)$$

وبوضع $\delta = \varepsilon$ من (1),(2) نحصل على

$$\text{i.e} \quad \lim_{x\to \delta} f(x) = 1$$

Solved Problems أمثلة محلولة

2- نظريات على النهايات Theorems on limits

لايجاد نهاية دالة عندما يؤول المتغير المستقل إلى عدد معين سوف نستخدم نظريات النهايات وذلك لانه كما سبق وان ذكرنا فان التعريف لايمكننا من ايجاد هذه النهاية .

نظرية (1) اذا كان a, c عددين حقيقين فان :

$$\lim_{x\to a} c = c \qquad (10)$$

أى أن نهاية المقدار الثابت هى نفس المقدار الثابت

$$\lim_{x\to 2} 8 = 8, \qquad \lim_{x\to 2} \sqrt{2} = \sqrt{2}, ...$$

نظرية (2) :اذا كان a, b, m اعداد حقيقية فان

$$\lim_{x\to a}(mx+b) = ma+b \qquad (11)$$

$$*\lim_{x\to a} x = a$$

$$*\lim_{x\to 4}(3x-5) = 3(4)-5 = 7$$

$$\lim_{x\to 2}(13x+\sqrt{2}) = 13\sqrt{2}+\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

نظرية (3) :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L, \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$

فإن

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = L \pm M \qquad (12)$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = M.L \qquad (13)$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{L}{M}; M \neq 0 \qquad (14)$$

Solved Problems أمثلة محلولة

مثال : اوجد

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7}$$

الحــــل :

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{5x+7}=\frac{3(2)+4}{5(2)+7}=10/17$$

نظرية (4) :

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim_{x\to a}f(x)]^n \qquad (15)$$

بفرض ان $\lim_{x\to a}f(x)$ موجودة .

نظرية (5) :

اذا كانت f دالة كثيرة حدود وكان a عدد حقيقى فان

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \qquad (16)$$

مثال: اوجد

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-2x+1}{6x-7}$$

الحـــــل :

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2-2x+1}{6x-7}=\frac{5(3)^2-2(3)+1}{6(3)-7}$$
$$=\frac{45-6+1}{18-7}=\frac{40}{11}$$

نظرية (6) :

اذا كان $a<0$ وكان n عدد صحيح موجب

أو اذا كان $a\le 0$ وكان n عدد صحيح فردى فان

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a} \qquad (17)$$

نظرية (7) :

اذا كانت الدالة f لها نهاية عندما x تقرب من a فان

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)} \qquad (18)$$

وبفرض ان n عدد زوجى او عدد فردى

$$\lim_{x\to a}f(x)>0$$

مثال: أوجد

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^{2/3}+3\sqrt{x}}{4-(16/x)}$$

الحـــــل :

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^{2/3}+3\sqrt{x}}{4-(16/x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 8}(x^{2/3}+3\sqrt{x})}{\lim\limits_{x\to 8}(4-16/x)}$$

$$=\frac{(8)^{2/3}+3\sqrt{8}}{4-(16/8)}=\frac{4+6\sqrt{2}}{4-2}=2+3\sqrt{2}$$

<u>مثال:</u> أوجد

$$\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{x^2-4x+9}$$

<u>الحـــل:</u>

$$\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{x^2-4x+9}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 5}(3x^2-4x+9)}$$

$$\sqrt[3]{75-20+9}=\sqrt[3]{64}=4$$

<u>مثال:</u> أوجد

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$$

<u>الحـــل</u> :

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}=\sqrt{\frac{8+4+3}{4+5}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

<u>نظرية (8) :</u>

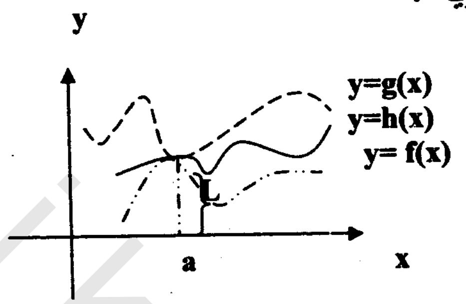
The Sandwich Theorem

1. اذا كانت $f(x)\le h(x)\le g(x)$ لكل قيم x فى الفترة المفتوحة التى تحتوى العدد a مع احتمال عدم تحقق ذلك عند a نفسها وكان

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x) \qquad (19)$$

فان
$$\lim_{x\to a} h(x) = L$$

الشكل التالى يوضح النظرية :



ملاحظات :

1- اذا كانت f دالة كسرية جبرية وكان المطلوب هو ايجاد النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ نتبع الخطوات التالية :

نوجد f(a) فنحصل على احدى الحالات الاتية :

(i) $f(a) = \dfrac{\text{real number}}{\text{real number} \neq 0}$ ، فى هذه الحالة تكون نهاية الدالة هى f(a) التى حصلنا عليها كما فى الامثلة السابقة .

(ii) $f(a) = \dfrac{\text{real number} \neq 0}{\text{zero}}$ فى هذه الحالة ليس للدالة نهاية عندما $x \to a$ ويقال النهاية غير موجودة .

(iii) $f(a) = \dfrac{\text{zero}}{\text{zero}}$ فى هذه الحالة تكون $x = a$ احد جذور كثيرتى الحدود فى كل من البسط والمقام لذلك يجب ان نأخذ $(x - a)$

عاملا مشتركا من كل من البسط والمقام ، بما ان $x \neq a$ فيمكننا ان نقسم كل من البسط والمقام على $(x - a)$. بذلك نحصل على دالة جديدة (من الممكن ان تكون **كسرية**) ولتكن $g(x)$ ثم نوجد $g(x)$ للحصول على النهاية المطلوبة عندما $x \to a$ فاذا وجدنا ان $g(a) = \frac{zero}{zero}$ مرة اخرى فاننا نكرر العملية السابقة حتى نحصل على احدى الحالتين (i) أو (ii) .

(2) اذا احتوى البسط أو المقام أو كليهما على مقدار على الصورة

$$(\sqrt{f(x)} \pm b) \quad \text{or} \quad (\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)})$$

لايجاد نهاية الكسر عندما $x \to a$ فاننا نضرب كل من البسط والمقام

فى مرافق هذا المقدار

$$(\sqrt{f(x)} \pm b) \quad \text{or} \quad (\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)})$$

وبعد تبسيط الكسر نأخذ النهاية عندما $x \to a$ كما سوف يتضح من

الامثلة التالية :

امثلة محلولة Solved Problems

مثال: اوجد $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x + 1}$

الحــــل :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{X + 1} = \frac{1 - 2 + 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

∴ نحلل البسط للحصول على $(x+1)$ عاملا مشتركا فنجد أن

$$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x^2-1)(x^2-1)$$
$$=(x-1)(x+1)(x-1)(x+1)$$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{x^4-2x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+1)(x-1)^2}{(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)^2(x+1)=0$$

<u>مثال:</u> أوجد

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^4+2x^2+1}{x+4}$$

<u>الحـــل:</u>

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^4+2x^2+1}{x+4}=\frac{256+23+1}{-4+4}=\frac{579}{0}$$

∴ لا توجد نهاية لهذه الدالة عندما $x\to-4$

<u>مثال:</u> أوجد نهايات الدوال الاتية

$$(i)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+2x}$$

$$(ii)\quad\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$(iii)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$$

<u>الحـــل:</u> بالضرب فى مرافق البسط

(i) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(x+2)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x(x+2)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$=\frac{1}{(2)(\sqrt{9}+3)}=\frac{1}{12}$$

(ii) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{1}{2}$$

(iii) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1-4)(\sqrt{x+6}+3)}{(x+6-9)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+6+3}}{\sqrt{x+1+2}}=\frac{3+3}{2+2}=\frac{3}{2}$$

نظرية (9) : اذا كان a عدد حقيقى ، n عدد صحيح $n \neq 0$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}, n \neq 0 \qquad (20)$$

نتيجة : اذا كانت m, n اعداد حقيقية لا تساوى الصفر فان :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m}a^{n-m}, \quad n, m \neq 0$$

مثال: اوجد النهايات الاتية

الحــــل:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 1/2}\frac{32(x^5 - 1/3)}{2(x-1/2)} = 16\lim_{x\to 1/2}\frac{x^5 - (1/2)^5}{x-(1/2)}$$

$$= 16.5(1/2)^{5-1} = 5(1/2)^4(16)$$

$$= \frac{5}{16}(16) = 5$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9}\frac{(x)^{1/2} - (9)^{1/2}}{x-9}$$

$$= \frac{1/2}{1}(9)^{1/2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{9}}\right) = \frac{1}{6}$$

تمارين

باستخدام تعريف النهاية اثبت أن :

1) $\lim_{x\to 1}(2x+3) = 5$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$

$$3)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=1$$

4) اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كالاتى

$$f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\neq 0\\ 4, & x=0\end{cases}$$

اثبت باستخدام التعريف أن $\lim_{x\to 2} f(x)=7$, $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

* * *