الباب الثانى

التفاضل

Differentiation

الدالة التفاضلية وقواعد التفاضل

1− التعريف العام للتفاضل :

اذا كانت $y = f(x)$ داله معرفة ومتصلة فى مدى معــين ، اذا اعطى المتغير x تغير صغير Δx من $\mathbf{x = x_0}$

(اى **اذا تغيرت** $\mathbf{x}$ **من** $\mathbf{x = x_0}$ **الى** $x = x_0 + \Delta x$)

حصلت على تغيير من $y = f(x)$ الى $\Delta y = f(x_0 + \Delta x)$

فأننا نسمى النسبه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **بمعدل متوسط للداله**

فى الفترة بين $\mathbf{x = x_0}$ ، $x = x_0 + \Delta x$.

تعريف " مشتقة الدالة " أو " المعامل التفاضلى للداله " أو " تفاضل الداله " $y = f(x)$ بالنسبه لـــ x عند $x = x_0$ على أنها

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

شريطة أن توجد النهايةَ ، تسمى هذه النهاية أيضا بمعدل التغيير فى y بالنسبه لـــ x عنـــد $x = x_0$.

يقال للداله أنها تفاضلية (قابلة للتفاضل) عند النقطة $x = x_0$ اذا كانت لها مشتقة عند هذه النقطة .

اذا كانت الداله $y = f(x)$ تفاضلية عند جميع نقط المدى المعرفه عاليه يقال انها **تفاضلية فى هذا المدى .**

ونحصل على مشتقة $y = f(x)$ بالنسبه لـــ x عند اى نقطة

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويمكن الاشارة الى مشتقة $y = f(x)$ بالنسبه لـــ x بأحد الرموز التالية

$$\frac{d}{dx} f(x), \frac{dy}{dx}, \quad Dy,\ y', f'(x).$$

ملحوظة : أحيانا نشير الى مشتقة الدالة الى انها "المشتقة الاولى للدالة " أو " التفاضل الاول للداله "

Solved Problems امثلة محلولة

مثال : باستخدام التعريف العام للتفاضل أوجد المشتقة الأولى للدوال الأتية :

(i) $y = \sin x$
(ii) $y = \cos x$

(iii) $y = \ln x$

الحـــل :

(i) $\mathbf{y = \sin x}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\Delta x/2) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}$$

$$= \cos x.1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

(ii) $\mathbf{t = \cos x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(x+\Delta x/2)\sin(-\Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin(x+\Delta x/2) \lim_{\Delta x/2 \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}$$

$$= -\sin x.1$$

$$= -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

(iii) $\mathbf{y = \ln x}$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\Delta x/x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\ln(1+\Delta x/x)$$
$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln(1+\Delta x/x)^{x/\Delta x}$$
$$=\frac{1}{x}\ln\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x/x)^{x/\Delta x}$$
$$=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$$

تمرين (1-1) :باستخدام التعريف العام للتفاضل اوجد مـــشتقة الـــدوال الأتية:

(i) $y=x^r$ (حيث r عدد صحيح موجب)

(ii) $y=a^x\ (\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a)$

(iii) $y=\tan x$

iv) $y=\cot x$

2- قواعد أساسية للتفاضل

نفرض أن v , u دالتان تفاضليتان فى المتغير x والمقـــدار c عدد ثابت و n عدد حقيقى **فان القوانين الاتية صحيحة** :

(i) $\dfrac{dc}{dx} = 0$

(ii) $\dfrac{dx}{dx} = 1$

(iii) $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

(iv) $\dfrac{d}{dx}(cv) = c\dfrac{dv}{dx}$

(v) $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

(iv) $\dfrac{d}{dx}(v)^n = n.v^{n-1}\dfrac{dv}{dx}$

(vii) $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{u}{v}) = \dfrac{vdu/dv - udv/dx}{v^2} \qquad v \neq 0$

<u>**البرهان**</u> : باستخدام التعريف العام للتفاضل يمكن البرهنة على صحة القوانين السابقة سوف نترك (i) (ii) (iii) (iv) كتمرين للطالب .

وسوف نعطى برهان:

(v) تفاضل حاصل ضرب دالتين

نفرض $y = u\,v$

$$\therefore \quad y + \Delta y = (u + \Delta u).(v + \Delta v)$$

$$= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نلاحظ ان $\Delta u \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$ وعلى ذلك يكون

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} = 0$$

$$(v) \therefore \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad \#$$

$$(v) \quad \frac{d}{dx}(uv) = v\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad \#$$

أى ان: تفاضل حاصل ضرب دالتين يساوى الدالة الاولى فـــى تفاضـــل الداله الثانية مضاف اليها الدالة الثانية فى تفاضل الدالة الاولى .

<u>نتيجة (va)</u> :

تفاضل حاصل ضرب n من الدوال

بقسمة طرفى (v) على uv نحصل على

$$\frac{d/dx(uv)}{uv} = \frac{du/dx}{u} + \frac{dv/dx}{v}$$

اذا كانت لدينا حاصل ضرب n من الدوال

$$y = v_1\, v_2, \ldots, v_n$$

يمكن باستخدام العلاقة السابقة

$$\frac{d/dx(v_1.v_2\ldots v_n)}{(v_1.v_2\ldots v_n)} = \frac{dv_1/dx}{v_1} + \frac{d/dx(v_2.v_3\ldots v_n)}{(v_2.v_3\ldots v_n)}$$

$$= \frac{dv_1/dx}{v_1} + \frac{dv_2/dx}{v_2} + \frac{d/dx(v_2.v_4\ldots v_n)}{(v_2.v_4\ldots v_n)}$$

$$= \frac{dv_1/dx}{v_1} + \frac{dv_2/dx}{v_2} + \frac{dv_3/dx}{v_3} + \ldots\ldots + \frac{dv_n/dx}{v_n}$$

بضرب الطرفين فى $v_1 v_2 \ldots v_2$ نحصل على

$$(v_2)\frac{d}{dx}(v_1.v_2\ldots v_n) = (v_2.v_2\ldots v_n)\frac{dv_1}{dx} +$$

$$(v_1.v_2\ldots v_n)\frac{dv_2}{dx} + \ldots +$$

$$(v_1.v_2\ldots v_n)\frac{dv_n}{dx} \qquad \#$$

يمكن برهان vi اذا فرضنا $v = v_1 = v_2 = \ldots = v_n$ باستخدام

(va) نحصل على

$$\frac{d}{dx}(v^n) = n.v^{n-1}.\frac{dv}{dx}$$

وعندما $v = x$ يكون

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n.x^{n-1}$$

من الجدير بالذكر ان n عدد صحيح موجب ولكن هذه العلاقات السابقة تكون صحيحة ايضا لاى عدد حقيقى وسوف نثبت ذلك لاحقا .

والان نعطى برهان (vii) وهو تفاضل خارج قسمة دالتين

$$y = \frac{u}{v} \qquad v \neq 0$$

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v.\Delta u - u\Delta v}{v.(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v.\Delta u / \Delta x - u.\Delta v / \Delta x}{v.(v + \Delta v)}$$

بأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{vdu/dx - udv/dx}{v^2}$$

اى ان

$$\text{vii} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu/dx - udv/dx}{v^2}$$

<u>نتيجة</u> :

نفرض فى العلاقـــة vii ان $u = c$, اى u مقـــدار ثابـــت نحصل على

$$\text{viia} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right) = \frac{-c}{v^2} dv/dx$$

Solved Problems امثلة محلولة

<u>مثال:</u> أوجد المعامل التفاضلى للدوال الاتيه:

(i) $y = \tan x$ **(ii) $y = \cot x$**

(iii) y = sec x **(iv) y = cosec x**

الحــــل :

(i) $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

نستخدم الان **vii صفحة 51**

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1/\cos^2 x = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

بنفس الطريقة يمكن اثبات (ii)

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

(iii) $y = \sec x = 1/\cos x$

نستخدم viia نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos^2 x}.(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بنفس الطريقة يمكن اثبات (iv) $\frac{d}{dx}\cos ecx = -\cos ecx \cot x$

3 - تفاضل دالة الدالة

اذا كانت $y = f(v)$, $v = g(x)$ دوال تفاضلية فان

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

<u>البرهان</u> :

سوف نستخدم التعريف العام للتفاضل مع كـل مـن الدالـة $y = f(v)$ والدالة $v = g(x)$ فى نفس الوقت فيكون

$$y = f(v) \qquad , \qquad v = g(x)$$

$$y + \Delta y = f(v + \Delta v) \qquad , \qquad v + \Delta v = g(x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = f(v + \Delta v) - f(v) \qquad , \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{f(v + \Delta v) - f(v)}{\Delta v}, \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

قبل اخذ النهاية عندما $\Delta v \to 0, \Delta x \to 0$ وسوف نجد حاصل

ضرب النسبتين فنحصل على

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وعلى ذلك

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

هذه القاعدة للتفاضل تسمى **قاعدة السلسله للتفاضل** .

Solved Problems امثلة محلولة

مثال: اوجد المعامل التفاضلى للدوال الاتيه :

(i) $y = \sinh x$ **(ii)** $y = \cosh x$

(iii) $y = e^{\sin x}$ **(iv)** $y = \ln \cos x$

الحـــل :

(i) $y = \sinh x$

$$= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

$$= \cosh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

بنفس الطريقة يمكن اثبات :

(ii) $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

(iii) $y = e^{\sin x}$, $y = e^{v}$

$$\therefore \quad v = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$$

(iv) $y = \ln \cos x$, $y = \ln v$, $v = \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}(-\sin x)$$
$$= -\tan x$$

4- تفاضل الدوال المثلثية والمثلثية العكسية

اذا كان $y = f(x)$ فان $x = f(y)$ والمقدارين $\frac{dx}{dy}, \frac{dy}{dx}$ يرتبطـــان بالعلاقة $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

البرهان : يترك للطالب

مثال :اوجد المعامل التفاضلى للدوال العكسية الاتية :

(i) $y = \sin^{-1} x$　　(ii) $y = \cos^{-1} x$

(iii) $y = \tan^{-1} x$　　(iv) $y = \sinh^{-1} x$

(v) $y = \cosh^{-1} x$　　(vi) $y = \tanh^{-1} x$

الحـــل : (i) اذا كانت

$$x = \sin y \quad \rightarrow \quad y = \sin^{-1} x$$

بأخذ المشتقة بالنسبة y نحصل على $$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 y)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$\therefore \frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

ملحوظة : نفرض ان القيمة الاساسية

$$-\pi/2 \le \sin^{-1} x \le \pi/2$$

اختيرت بحيث تكون موجبة ولذلك نكتب $\cos y = \sqrt{(1-\sin^2 y)}$

بدلا من $\cos y = \pm\sqrt{(1-\sin^2 y)}$

(ii) اذا كانت

فان $x = \cos y$ $\leftarrow$ $y = \cos^{-1} x$

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\sin y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\cos^2 y)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

(iii) اذا كانت

فان $x = \tan y$ $\leftarrow$ $y = \tan^{-1} x$

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \qquad = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

تمارين

اثبت صحة العلاقات الاتية :

$$\text{(i)}\ \frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{x^2-1}\qquad |x|>1$$

$$\text{(ii)}\ \frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

$$\text{(iii)}\ \frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

$$\text{(iv)}\ \frac{d}{dx}\coth^{-1}x=\frac{-1}{x^2-1}\qquad |x|>1$$

$$\text{(v)}\ \frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{(1-x^2)}}\qquad 0<x<1$$

$$\text{(vi)}\ \frac{d}{dx}\operatorname{cosech}^{-1}x=\frac{1}{x\sqrt{(x^2+1)}}$$

أوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية :

(i) $y=\ln\tan\dfrac{x}{a}$

(ii) $y=\sin ax^2$

(iii) $y=\tan\sqrt{1-x}$

(iv) $y=(\sin nx)\sin^n x$

(v) $y=\ln\sin aqx$

(vi) $y=e^{\sin x}$

• • •

الدوال الزئدية والزائدية العكسية

Invers of Hypergeometric Functions

*اذا كانت $y = \sinh^{-1} x$ فان $x = \sinh y$

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{(1+\sinh^2 y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

***اذا كانت $y = \cosh^{-1} x$ فان $x = \cosh y$**

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{(\cosh^2 y - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

***اذا كانت $y = \tanh^{-1} x$ فان $x = \tanh y$**

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec h^2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec h^2 y} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2} \qquad |x|<1$$

5-التفاضل اللوغاريتمى

Logarithmic Differentiation

لايجاد مشتقة الدوال الاسية فى صورتها العامه أى الدوال التى تتكون من كمية متغيرة مرفوعة الى أس متغير يؤخذ اللوغاريتم الطبيعى قبل عملية التفاضل. وتسمى هذه الطريقة بالتفاضل اللوغاريتمى ، نفضل هذه الطريقة كذلك فى حالة الدالة المكونة من ضرب وقسمة عدة عوامل متغيرة .

<u>نظرية</u> :

تفاضل الدالة الاسية فى صورتها العامة :-

نفرض u , v دالتان تفاضليان فى x

اذا كانت $y = u^v$ **فان** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(u)^v$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u . u^v \frac{dv}{dx} \qquad \text{(I)}$$

<u>البرهان</u> :

نفرض ان $y = u^v$

بأخذ اللوغاريتم $\ln y = v \ln u$

بتفاضل الطرفين بالنسبة الى x

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{v}{u}\frac{du}{dx}+\ln u\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx}+\ln u\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}u^{v}=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^{v}\ln u\frac{dv}{dx} \qquad \text{(I)}$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال : أوجد المشتقة الاولى للدالة $y=a^u$

حيث u دالة تفاضلية فى x , a مقدار ثابت

الحــــل : نفرض ان

$$y = a^u$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\therefore \ln y = u \ln a$$

بالتفاضل

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\ln a.\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}a^{u}=a^{u}\ln a\frac{du}{dx}$$

بأستخدام المثال السابق يمكن القول بأن تفاضل الدالة الاسية العامة

يساوى تفاضل الدالة كما لو كان الاساس مقدار ثابت مضاف اليه

تفاضل الداله اى كما لو كان الاس مقدار ثابت .

نتيجة: إذا كانت الدالة $v = n$ حيث n مقدار ثابت فان **(I)** تصبح

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \qquad (II)$$

وعلى ذلك تصبح القاعدة (VI) صحيحة لكل n عدد حقيقى .

ويكون

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

حيث n عدد حقيقى .

مثال :

أوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية :

(i) $y = x^{e^x}$

(ii) $y = \sqrt{\left[\frac{(x-1)(x^2-2)}{(x^3-3)(x-4)}\right]}$

(iii) $y = (\tan x)^{\sin x}$

الحـــــل :

(i) $y = x^{e^x}$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\ln y = e^x \ln x$$

بالتفاضـــــل

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{x}+e^x\ln x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=e^x.y(\frac{1}{x}+\ln x)$$

$$=e^x.x^{e^x}(\frac{1}{x}+\ln x)$$

$$\text{(ii)}\ y=\sqrt{\ }[\frac{(x-1)(x^2-2)}{(x^3-3)(x-4)}]$$

بأخذ اللوغاريتم

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x^2-2)-\ln(x^3-3)-\ln(x-4)]$$

بالتفاضــــل

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2-2}-\frac{3x^2}{x^3-3}-\frac{1}{x-4}]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}[\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x^2-2}-\frac{3x^2}{x^3-3}-\frac{1}{x-4}]$$

(iii) $\mathbf{y = (\tan x)^{\sin x}}$

$\ln y=\sin x\ln\tan x$ باخذ الوغاريتم

بالتفاضل

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\tan x}\sec^2 x+\cos x\ln\tan x$$

$$\frac{dy}{dx}=y(\sec x+\cos x\ln\tan x)$$

$$\frac{dy}{dx}=(\tan x)^{\sin x}(\sec x+\cos x\ln\tan x)$$

تمرين : أوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية :

(i) $y = x^{e^x}$

(ii) $y = (x \ln x)^x$

(iii) $y = x^{\sqrt{x}}$

(iv) $y = \sqrt{\left[\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]}$

6- تفاضل الدوال الضمنية

قد يصعب التعبير عن الدالة y صراحة بدلالة x وبذلك تكون العلاقة بين y, x على صورة دالة ضمنية $f(x, y) = 0$ لايجاد $\frac{dy}{dx}$ نجرى عملية التفاضل بالنسبة الى x لطرفى المعادلة فتنتج معادلة تحتوى على $\frac{dy}{dx}$ يمكن حلها وايجاد $\frac{dy}{dx}$ منها بدلالة y, x .

مثال: إذا كان $x + yx + 2y - 1 = 0$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحـــل: بتفاضل المعادلة بالنسبة الى x نحصل على

$$1 + y + x\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore 1 + y + \frac{dy}{dx}(x+2) = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{x+2}$$

تمرين :

1- اذا كان $x^{\ln y} + y^{\ln x} = x + y$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

2- اذا كان $e^{xy} + y\ln x = \cos 2x$ اوجد $\frac{dy}{dx}$

7 - التفاضل البارامترى

العلاقة التى تربط قيمة الدالة بمتغيرها قد تكون غير مباشرة وتتعين من علاقة كل مـــن y, x بمتغير ثالث – وليكن t مثلا – يسمى بارامتر فاذا كانت

$$y = g(t) \qquad , \qquad x = f(t)$$

تسمى هذه العلاقتين **بالمعادلتين البارامترين** . وبحذف t منها توجد العلاقة المباشرة بين y, x ويمكن ايجاد المشتقة الاولى باستخدام العلاقة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ بفرض ان

$$x = t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t$$

الحـــــل :

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \qquad , \qquad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

تمرين: أوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كان

(i) $x = e^{t} \sin t \quad , \quad y = e^{t} \cos t$

(ii) $x = \sqrt{t}$, $y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$

(iii) $\mathbf{x = 2 - 3\cos t}$, $\mathbf{y = 3 + 2\sin t}$

8- المشتقات من رتب اعلى

اذا كانت $y = f(x)$ تفاضلية فى مدى معين فأن مشتقتها

تعطى بالصورة $\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$

اذا كانت $y` = f`(x)$ ايضا تفاضلية فى مدى فان مشتقتها تكتب

على الصورة

$$\frac{d^2y}{dx^2}, f''(x), y''$$

وتسمى المشتقة الثانية للدالة $y = f(x)$ وبالمثل المشتقة النونية للدالة

$y = f(x)$ اذا وجدت ، يشار اليها بالصورة $\frac{d^ny}{dx^n}, f^{(n)}(x), y^{(n)}$

حيث n تسمى رتبة المشتقة.

اذا اعتبرنا $\frac{d}{dx}$ رمز لعملية التفاضل فان المشتقات الاولى والثانية

والثالثة ..... والنونية تكتب على الترتيب

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

كما تكتب على الصورة $y`,\ y``,\ y^{(3)},\ \ldots,\ y^{(n)}$

ومن الرموز الاخرى التى تدل على المشتقة النونية للدالة $y = f(x)$

$$y_n \;,\; D^n y \;,\; D^{(n)} f(x)$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال: بطريقة الاستنتاج الرياضى اوجد المشتقة النونية للدوال الاتية:

(i) $y = (ax+b)^r$ (ii) $y = \ln(ax+b)$

(iii) $y = \sin(ax+b)$ (iv) $y = \cos(ax+b)$

(v) $y = a^{bx}$ (vi) $y = e^{ax}\sin(bx+c)$

(vi) $y = e^{ax}\operatorname{cis}(bx+c)$

اذا كانت a, b, c, r ثوابت حقيقية .

الحـــل :

(i) $y = (ax+b)^r$

$y` = y_1 = r(ax+b)^{r-1} . a$

$y`` = y_2 = r(r-1)(ax+b)^{r-2} . a^2$

$y``` = y_3 = r(r-1)(r-2)(ax+b)^{r-3} . a^3$

نفرض أن

$$y_n = r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)(ax+b)^{r-n} . a^n$$

ثم نحاول اثبات

$$y_{n+1} = r(r-1)(r-2)\dots(r-n)(ax+b)^{r-n-1} . a^{n+1}$$

$y_{n+1} = y`_n$

$\therefore y_{n+1} = r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1).$

$.(r-n)(ax+b)^{r-n-1} . a^{n+1}$

وعلى ذلك يكون

$$\therefore \quad \frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^r = r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)$$
$$(ax+b)^{r-n}.a^n$$

نتيجة 1: اذا كانت $a=1, b=0, r=n$ فان

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = D^n x^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)x^{n-n}$$
$$= n!$$
$$D^{n+m}x^n = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

نتيجة 2: اذا كانت $r = -1$ فان

$$D^n\left(\frac{1}{ax+b}\right) = a^n(-1)(-2)(-3)\ldots(-1-n+1)(ax+b)$$
$$D^n\left[\frac{1}{ax+b}\right] = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

حــــل ii

(ii) $y = \ln(ax+b)$

$$y_1 = \frac{a}{ax+b}$$

ثم نستخدم نتيجة 2 السابقة نحصل على

$$\ln(ax+b) = D^{n-1}\frac{a}{ax+b}$$
$$\therefore D^n \ln(ax+b) = \frac{(-1)^{n-1}.a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}$$

<u>حـــل iii</u>

$$(iii)\quad y = \sin(ax+b)$$

$$y_1 = a\cos(ax+b)$$

$$= a\sin(ax+b+\pi/2)$$

$$y_2 = a^2\cos(ax+b+\pi/2)$$

$$= a^2\sin(ax+b+2\pi/2)$$

$$y_3 = a^3\cos(ax+b+2\pi/2)$$

$$= a^3\sin(ax+b+3\pi/2)$$

نفرض أن

$$y_n = a^n\sin(ax+b+n\pi/2)$$

ثم نثبت ان

$$y_{n+1} = a^{n+1}\sin[ax+b+(n+1)\pi/2]$$

$$y_{n+1} = y_n\,,$$

$$= a^{n+1}\cos(ax+b+n\pi/2)$$

$$= a^{n+1}\sin(ax+b+(n+1)\pi/2)$$

$$\therefore\ D^n\,[\sin(ax+b)] = D^n\sin(ax+b+n\pi/2)$$

بنفس طريقة المسألة السابقة يمكن اثبات ان

$$(iv)\quad D^n\cos(ax+b) = a^n\cos(ax+b+n\pi/2)$$

<u>حـــل v</u>

$$(v)\quad y = a^b$$

$$y_1 = a^{bx}\,b\,\ln a$$

$$y_2 = a^{bx} (b \ln a)^2$$
$$y_3 = a^{bx} (b \ln a)^3$$

نفرض أن

$$y_n = a^{bx} (b \ln a)^n$$

ثم نثبت

$$y_{n+1} = a^{bx} (b \ln a)^{n+1}$$
$$y_{n+1} = y_n ,$$
$$= a^{bx} (b \ln a)^{n+1}$$

وعلى ذلك

$$\mathbf{D^n a^{bx} = a^{bx} (b \ln a)^n}$$

تمرين: اثبت ان

$$\mathbf{D^n e^{ax} = a^n \ e^{ax}}$$

حـــل vi

(vi) $y = e^{ax} \sin (bx - c)$

$y_1 = a\ e^{ax} \sin (bx + c) + b\ e^{ax} \cos (bx + c)$

اذا فرضنا أن $a = r \cos e \ , \ b = r \sin e$

فان $r = \sqrt{}(a^2 + b^2), \quad \tan e = \frac{b}{a}$

$$\therefore \ \mathbf{y_1 = r\, e^{ax} [\sin (bx + c) \cos e + \cos (bx + c) \sin e]}$$
$$= r\, e^{ax} \sin (bx + c + e)$$

وبالمثل يكون

$$y_2 = r^2 e^{ax} \sin (bx + c + 2e)$$

نفرض ان

$$y_n = r^n e^{ax} \sin (bx + c + ne)$$

$$y_{n+1} = y_n ,$$

$$= r^n a e^{ax} \sin (bx + c + ne) + r^n b e^{ax} .\cos (bx + c + ne)$$

$$= r^n e^{ax} [a \sin (bx + c + ne) + + b \cos (bx + c + ne)]$$

$$= r^{n+1} e^{ax} [\sin (bx + c + ne) \cos e] + + \cos (bx + c + ne) \sin e]$$

$$= r^{n+1} e^{ax} \sin [bx + c (n + 1) e]$$

$$\therefore D^n [e^{ax} \sin (bx + c)] = r e^{ax} \sin (bx + c + ne)$$

$$= (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \sin (bx + c + n) \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

بنفس طريقة المسألة السابقة يمكن اثبات ان

$$D^n [e^{ax} \cos (bx + c)] = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \cos (bx + c + n) \tan^{-1} b/n$$

9- المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين

نظرية ليبنتز Leibnitz Theorem

اذا كانت **y = u.v** دالتين تفاضليتين للمتغير x فان

$$y_n = (u\,v)_n \;\; = u_n v + \binom{n}{1} u_{n-1} v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} v_2 +$$

$$\dots \binom{n}{a} u_{n-a} v_a + \dots + \binom{n}{r} u_{n-r} v_r + \dots + u v_n$$

حيث

$$\mathbf{D^n \; v = v_n \;,}$$

$$\mathbf{D^n \; u = u_n}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

<u>**البرهـــان:**</u> نتتبع طريقة الاستنتاج الرياضى عند **n = 1**

$$\mathbf{v \;=\; u \;\; v}$$

$$v_1 \;= u`\, v + \; u\, v`$$

$$v \;\; = \;u \;\; v \Rightarrow$$

$$v_1 \;\; = u`\, v + \;u\, v` = u_1 v + \binom{1}{1} u v_1$$

∴ **النظرية صحيحة عند n = 2**

$$y_2 = \;y_1\,,$$

$$= \;(u_1\, v + u \;\; v_1),$$

$$= u\, v_1 + u\, v_1 + u_2\, v + u\, v_2$$

$$u_1 v_1 + u_2\binom{2}{1} \quad = u_2 v +$$

$\therefore$ **النظرية صحيحة**

أى أن النظرية صحيحة عند $n = 1$, $n = 2$

نفرض ان النظرية صحيحة لاى قيمة للعدد **n** ثم نثبت صحتها للقيمة التالية **$n + 1$** فاذا كانت

$$y_n = u_n v + \binom{n}{1} u_{n-1} v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} v_2$$

$$+ \ldots + \binom{n}{r} u_{n-r} v_r + \ldots + u v_n$$

$$\therefore y_{n+1} = (u_n v)' \binom{n}{1} (u_{n-1} v_1)' + \binom{n}{2} (u_{n-2} v_2)'$$

$$+ \ldots + \binom{n}{r} (u_{n-r} v_r)' + \ldots + (u v_n)'$$

$$= u_{n+1} v + u_n v_1 + \binom{n}{1} (u_n v_1 + u_{n-1} v_{n-2} +$$

$$+ \binom{n}{2} (u_{n-1} v_2 + u_{n-2} v_3 + \ldots + \binom{n}{r} (u_{n-r+1} v_r + u_{n-r} v_{r+1}) + \ldots +$$

$$(u_1 n_1 + u v_{n+1})$$

$$= u_{n+1}v + [\binom{n}{0} + \binom{n}{1}](u_n v_1) +$$

$$[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}](u_{n-1} v_2) +$$

$$[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}](u_{n-2} v_3) + \ldots +$$

$$[\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}](u_{n-r+1} v_r) + \ldots + u_{n+1} v$$

حيث ان

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r45} = \binom{n+1}{r}$$

$$\therefore y_{n+1} = u_{n+1}v + \binom{n+1}{1} u_n v_1 + \binom{n+1}{2} u_{n-1} v_2 +$$

$$\ldots + \binom{n+1}{r} u_{n-r+1} v_r + \ldots + uv_{n+1}$$

النظرية صحيحة عند n + 1 وبهذا تكون النظرية صحيحة لاى

عدد صحيح موجب n أى أن:

$$y_n = (uv)_n$$

$$= u_n v + \binom{n}{1} u_{n-1} v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} v_2 + \ldots +$$

$$\binom{n}{r} u_{n-r} v_r + \ldots + uv_n$$

ويمكن كتابة العلاقة السابقة فى الصورة الاتية

$$(uv)_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_{n-r} v_r$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال: اوجد المشتقة النونية للدوال الاتية

(i) $y = x^4 e^{-3x}$ **(ii)** $y^2 = x \ln 5x$

(iii) $y = x^2 \sin 3x$

الحـــل :

(i) $y = x^4 e^{-3x}$

نفرض ان

$$u = e^{-3x} \quad , \quad v = x^4$$

نعلم أن

$$u_n = (-3)^n e^{-3x}, \quad v_n = 0 (n > 4)$$

$$\therefore y_n = u_n v + \binom{n}{1} u_{n-1} v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} v_2 +$$

$$\binom{n}{3} u_{n-3} v_3 + \binom{n}{4} u_{n-4} v_4$$

$$\therefore y_n = (-3)^n e^{-3x} x^4 + \binom{n}{1}(-3)^{n-1} e^{-3x} 4x^3 +$$

$$\binom{n}{2}(-3)^{n-2} e^{-3x} 12x^2 + \binom{n}{3}(-3)^{n-3} e^{-3x} 24x +$$

$$\binom{n}{4}(-3)^{n-4} e^{-3x}(24)$$

$$= (-3)^{n-4} e^{-3x}[(-3)^4 x^4 + n(-3)^3 4x^3 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(-3)\ \ 24x$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(24)]$$

$$= (-3)n^{-4}\ \ e^{-3x}\ [81\ x^4\ \ - 108\ nx^3\ \ +\ \ 54n(n-1)x^2 -$$

$$12\ n(n-1)(n-2)\ x + n\ (n-1)(n-2)(n-3)]$$

<u>حـــل (ii)</u> :

$$\text{(ii)}\quad y^2 = x^2 \ln 5x$$

$$= (\ln 5x)\ x^2$$

نفرض أن

$$u = \ln\ 5x\ ,\quad v = x^2$$

$$\therefore u_n = \frac{(-1)^{n-1}(5)^n (n-1)!}{(5x)^n}$$

$$= \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^2}$$

$$\mathbf{v_n = 0\ \ (n > 2)}$$

$$\therefore y_n = u_n v + \binom{n}{1} u_{n-1} v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} v_2$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} x^2 + \quad + \binom{n}{1} \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} (2x)$$

$$+ \binom{n}{2} \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-1}} (2)$$

$$= \frac{(-1)^{n-3}(5)^n (n-3)!}{x^{n-2}} [(n-1)(n-2) - 2n(n-2) - n(n-1)$$

$$= \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}} (n^2 - 3n + 2 - 2n^2 + 4n + n^2 - n)$$

$$= \frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}$$

<u>حـــل (iii)</u> :

(iii) $y = x^2 \sin 3x$

$= (\sin 3x)\ x^2$

نفرض أن

$u = \sin 3x \quad , \quad v = x^2$

$u_n = 3^n \sin(3x + n\pi/2)$,

$v_n = 0 (n > 2)$

$$y_n = uv + \binom{n}{1} u_{n-1} v + \binom{n}{2} u_{n-2} v_2$$

$$y_n = 3^n \sin(3x + n/\pi).x^2$$
$$+\binom{n}{1}(3)^{n-1}\sin(3x+(n-1)\pi/2).2x$$
$$+\binom{n}{2}(3)^{n-2}\sin(3x+(n-2)\pi/2).2$$
$$= 3^{n-2}\,[9\,x^2\ \sin(3x + n\pi/2) + 6n\,x\,\sin(3x\ + (n-1)\,\pi/2+$$
$$n(n-1)\ \sin(3x + (n-2)\,\pi/2)]$$

مثال: اذا كانت $\mathbf{y = \sinh\ (m\ \sinh^{-1}\ x)}$

فأثبت أن

(i) $\mathbf{(1 + x^2)\,y_2 + x\,y_1 - m^2\,y = 0}$

(ii) $\mathbf{(1 + x^2)\,y_{n+2} + (2n + 1)\,xy_{n+1} + +(n^2 - m^2)y_n = 0}$

الحــــــل:

(i) $\mathbf{y = \sinh\ (m \sinh^{-1}\ x)}$

$$y_1 = \cosh(m \sinh^{-1} x).\frac{m}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

بالضرب فى $\sqrt{1+x^2)}$

$$\therefore \sqrt{1+x^2)}y_1 = m\cosh(m\sinh^{-1} x)$$

بالتفاضل بالنسبة الى x

$$\therefore \frac{2x}{2\sqrt{(1+x^2)}}y_1 + \sqrt{(1+x^2)}y_2 = m\sinh(m\sinh^{-1} x)\frac{m}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

بالضرب فى $\sqrt{(1+x^2)}$ نحصل على

$$x y_1 + (1 + x)^2 y_2 = m^2 \sinh (m \sinh^{-1})$$

$$\therefore \quad (1 + x^2) y_2 + x y_1 - m^2 y = 0 \rightarrow (1)$$

والان باستخدام نظرية ليبنتز نوجد التفاضل النونى للمعادلة السابقة

$$[y_{n+z}(1+x2) + ny_{n+1}.2x + \frac{n(n-1)}{2!} y_n.2] +$$

$$[y_{n+1}x + ny_n.1] - m^2 y_n = 0$$

$$\therefore (1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} +$$

$$[n(n-1) + n - m^2]y_n = 0$$

$$\therefore (1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

تمارين

(1) أوجد المشتقة النونية للدوال الاتية :

(i) $y = (a_0 x^2 + a_1 x + a_0) e^{bx}$

(ii) $y = x^n . a^x$

(iii) $y = \sin^2 x$

(iv) $y = \sin ax . \cos bx$

(v) $y = \cos^3 x$

(2) اذا كانت

$$y = x^2 [a \cos (\ln x) + b \sin (\ln x)]$$

فاثبت ان

$$x^2 y`` + (1 - 2n)\, x\, y` + (1 + n^2)\, y = 0$$

(3) اذا كانت

$$Y = (1 - x)^{-r}\ e^{-rx}$$

اثبت ان

(i) $(1 - x)\, y_1 = r\ x\ y$

(ii) $(1 - x)\, y_{n+1} - (n + rx)\, y_n - r\, n\, y_{n-1} = 0$

(4) أوجد قيم جميع المشتقات التفاضلية عند نقطة الاصل للدوال الاتية:

(i) $\sin^{-1} x$ (ii) $\tan^{-1} x$

(iii) $\cosh(m \cosh^{-1} x)$ (iv) $\dfrac{\cos^{-1} x}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

(5) أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الاتية :

(i) $x^2 + y^3 = a^3$

(ii) $e^x + e^y = a^{x+y}$

(iii) $x = a^3 \cos e$, $y = a \sin^3 e$

* * *

ملخص لقواعد التفاضل

(1) $\frac{dc}{dx}=0$ (2) $\frac{dx}{dx}=1$

* (3) $\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$

(4) $\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$

*(5) $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\frac{n!}{r!(n-r)!}$

(6) $\frac{d}{dx}v^n=nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$

(7) $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$

*(8) $\frac{d}{dx}(\frac{u}{v})=\frac{vdu/dx--udv/dx}{v^2}$

(9) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ دالة الدالة y دالة فى u

(10) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}$ الدالة العكسية

* (11) $\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{du/dx}{u}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

(12) $\frac{d}{dx}(\log u)=\frac{\log e}{u}\frac{du}{dx}$

(13) $\frac{d}{dx}(a^u)=a^u\ln a\frac{du}{dx}$

(14) $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$

*(15) $\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u u^v \frac{dv}{dx}$

*(16) $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$

(17) $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$

(18) $\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

(19) $\frac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$

(20) $\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

(21) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$

(22) $\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{du/dx}{\sqrt{(1-u^2)}}$

(23) $\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-du/dx}{\sqrt{(1-u^2)}}$

(24) $\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} du/dx$

(25) $\frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} du/dx$

(26) $\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{(u^2-1)}} du/dx$

(27) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{(u^2-1)}} du/dx$

$$(28)\ \frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u\, du/dx$$

$$(29)\ \frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u\, du/dx$$

$$(30)\ \frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u\, du/dx$$

$$(31)\ \frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{cosech}^2 u\, du/dx$$

$$(32)\ \frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u\, du/dx$$

$$(33)\ \frac{d}{dx}\operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \coth u\, du/dx$$

$$(34)\ \frac{d}{dx}\sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{(u^2+1)}}\, du/dx (any u)$$

$$(35)\ \frac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{(u^2-1)}}\, du/dx\ u > 1$$

$$(36)\ \frac{d}{dx}\tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\, du/dx \quad |u| < 1$$

$$(37)\ \frac{d}{dx}\coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\, du/dx \quad |u| > 1$$

$$(38)\ \frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{(1-u^2)}}\, du/dx\ 0 < u < 1\frac{1}{2}$$

$$(39)\ \frac{d}{dx}\operatorname{cosech}^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2+1)}}\, du/dx\ |u| > 1$$

ملاحظة يمكن للطالب ان يكون ملم المام جيد بالقواعد التى امامها العلامة * وباستخدام هذه القواعد يمكن اثبات الباقى .