الباب الاول

الدوال الحقيقية

Real Functions

The Mappings : الرواسم

تعريف : نفرض R علاقة من A الى B . العلاقة R تسمى راسم من A الى B إذا كان:

1- لكل $a \in A$ يوجد عنصر $b \in B$ بحيث aRb

2- هذا العنصر $b \in B$ عنصر وحيد .

يرمز للرواسم بالحروف **f, g, h, ...** وتكتب $A \xrightarrow{f} B$ or

$f : A \to B$ للدلالة على ان f راسم من ألفئة A الى الفئة B

ونكتب: $\mathbf{f(a) = b}$ لنعنى **afb** أى أن $(a, b) \in f$ وتقرأ

" b صورة image العنصر a بواسطة الراسم f " الفئة A

تسمى نطاق domain الراسم f والفئة B تسمى النطاق **المصاحب** **co domain** للراسم .

والفئة

$$f(A) = \{b \in B : \exists a \in A \,\&\, f(a) = b\}$$

تسمى مدى **range** الراسم .

Types of mappings : أنواع الرواسم

<u>تعريف</u> : الراسم $f : A \to B$ يقال انه راسم **أحادى**

(1 to 1 mapping of injective)

إذا كان لكل عنصرين $a_1 , a_2 \in A$ يتحقق الشرط التالى:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

اى أن الراسم f يكون أحادى إذا كان كل عنصرين مختلفين النطاق لهما صورتين مختلفتين فى المدى .

<u>تعريف</u> : الراسم $f : A \to B$ يقال **انه راسم فوقى onto or surjective** إذا كان **مدى f يساوى النطاق المصاحب** أى أن f يكون فوقى إذا كان لكل عنصر $b \in B$ يوجد على الأقل عنصر واحد بحيث يكون **b = f(a)**

<u>تعريف</u> : الراسم $f : A \to B$ **يقال انه تناظر أحادى bijective** إذا كان **أحادى وفوقى معا** . اى أن:

تناظر أحادى = فوقى + أحادى

<u>تعريف</u> : إذا كان $f : A \to B$ راسم **تناظر أحادى** فانه يمكن تعريف راسم أخر $g : B \to A$ بحيث إذا كان **f(x) = y** فان **x = g(y)**

فى مثل هذه الحالة فان الراسم g يسمى **معكوس الراسم f ويرمز**

له بالرمز f^{-1}.

1- تعريف الدالة : نفرض أن هناك مجموعتين غير خــاليتين X, Y فإذا وجدت طريقة أو قاعدة (rule) تحدد لكل عنصر X عنصر وحيــد من Y فيطلق على هذه القاعدة اسم دالة .

وإذا رمزنا لهذه الدالة **(function)** بالرمز f فإننا نعبــر عــن ذلــك كالاتى:

$$f : X \rightarrow Y \tag{1}$$

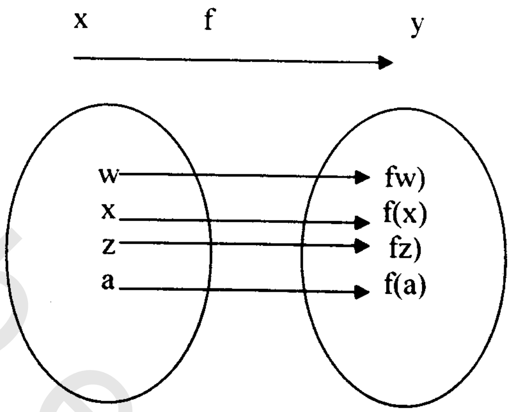
وتقرأ f دالة لــ X فى Y وتسمى المجموعة X بنطاق الدالة **(Domain)** وتسمى المجموعة y بالنطاق المصاحب للدالة **(Co-domain)** و إذا كان العنصر $x \in X$ فان العنصر المناظر له $y \in Y$ والذي حددته الدالة يسمى صورة x ويرمز له بالرمز f(x)
أى أن:

$$y = f(x)$$

وفى هذه الحالة يسمى x بالمتغير المستقل **(independent)**
كما يسمى y بالمتغير التابع **(dependent)**.وكتعبير آخر للدالة يمكننا أن نكتب

$$f : x \rightarrow f(x); x \in X, y \in Y \tag{2}$$

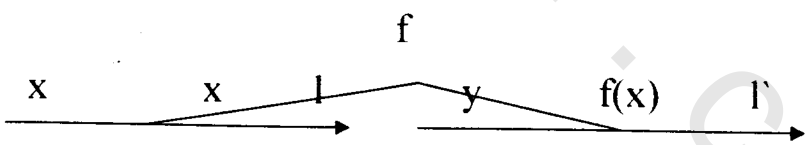
يمكن توضيح ذلك بالرسم الاتى:



ملاحظات

(i) يجب التفريق بين الرمزين $f, (x)$ حيث ترمز f الى أى دالة من X إلى Y بينما $f(x)$ يمثل عنصر فى Y كصورة لعنصر فى x

(ii) يمكن استخدام خط الأعداد لتمثيل الدالة فمثلا نفرض أن `1, 1‘` يمثلان خطى الأعداد المناظرين للمجموعتين X, Y على الترتيب فإننا يمكننا تمثيل الدالة من X إلى Y على الشكل :



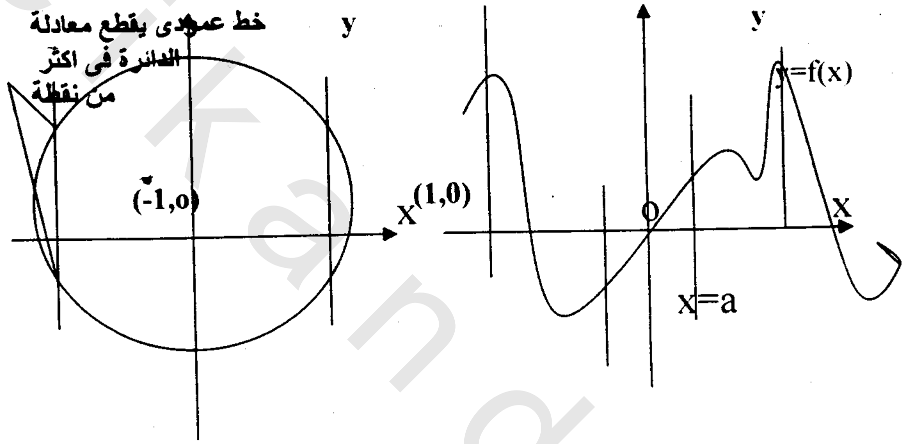
2- خاصية الخط الرأسى Vertical line property

هناك خاصية بسيطة ولكنها هامة للتفريق بين منحنيات الدوال

ومنحنيات المعادلات التى ليست دوال وهذه الخاصية تسمى خاصية الخط الرأسى <u>وهى تنص على أن:</u>

"أى خط رأسى (موازى لمحور y) يقطع منحنى الدالة $y = f(x)$ فى نقطة واحدة على الاكثر وذلك من تعريف الدالة لان لكل $a \in X$ ناظرها عنصر وحيد $f(a) \in y$"

والرسم التالى يوضح هذا المفهوم:



3- مدى الدالة Range of a function

إذا كانت $f : X \to Y$ فان كل عنصر من عناصر Y ليس بالضرورة ان يكون صورة لعنصر فى X وعلى ذلك يمكننا **تعريف مدى الدالة** على أنه :

" كل عنصر من عناصر المجموعة الجزئية Y يكون صـــورة لعنـــصر واحد على الاقل من عناصر X"

وسوف نرمز لمدى الدالة $f : X \to Y$ بالرمز **R(f)** مع ملاحظـــة ان $R(f) \subset y$ ونعبر عن ذلك رياضيا كالاتى :

مدى الدالة **R(f)** حيث

$$R(f) = \{y : y = f(x); x \in X, y \in Y\} \qquad (3)$$

مجال الدالة **D(f)** حيث

$$D(f) = \{x : y = f(x); x \in X, y \in Y\} \qquad (4)$$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال : عين مجال و مدى كل من الدوال الاتية :

(i) $f_1 : x \to x^2 - 1,$ (iii) $f_3 : x \to \sqrt{x^2 - 1}$

(ii) $f_2 : x \to \dfrac{1}{x^2 - 1},$ (iv) $f_4 : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

الحــــل :

(i) $f_1 : x \to x^2 - 1$

نجد ان الدالة $\mathbf{1 - y = f_1(x) = x^2}$

معرفة لجميع قيم x الحقيقية

$$\therefore\ D(f_1) = R, \qquad R(f_1) = R$$

(ii) $f_2 : x \to 1/(x^2 - 1)$

الدالـــة $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

معرفة لجميع قيم X الحقيقية ما عدا عندما $x^2 - 1 = 0$ أى عندما

$x = \pm 1$

$\therefore \; D(f_2) = R - \{-1,1\}, R(f_2) = R$

(iii) $f_3 : x \to \sqrt{x^2 - 1}$

الدالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية ما عدا عندما $x^2 - 1 < 0$

أى عندما $\pm x < 1$

i.e $x < 1$ and $x > -1$

$\therefore \; D(f_3) = R(-1,1), \qquad R'(f_3) = [0, \infty)$

(iv) $f_4 : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

الدالة $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

معرفة لجميع قيم x الحقيقية ماعدا عندما $x^2 - 1 \le 0$

أى عندما $\pm x \le 1$ $\quad x \le 1$ and $x \ge -1$

أى غير معروفة لقيم x التى تحقق

$-1 \le x \le 1$

$\therefore \; D(f_4) = R - [-1,1]$

$R(f_4) = (0, \infty).$

<u>**ملحوظة**</u> : فى حالة اعطاء الدالة $f : X \to Y$ بواسطة قانون ولم يذكر

شيئا عن نطاق الدالة فيجب اعتباره على انه مجموعة قيم x التى تجعل الدالة f حقيقية ومعرفة .

مثال : عين مجال ومدى كلا من الدالتين

(i) $f(x) = 5 - 4x$ in $[-2, 3]$

(ii) $f(x) = \sqrt{2-x}$

الحـــل :

(i) $f(x) = 5 - 4x$ in $[-2. 3]$

مجال الدالة معطى وهو $D(f) = [-2, 3]$

لايجاد المدى

at $x = -2$; $f(-2) = 5 + 8 = 13$

at $x = 3$; $f(3) = 5 - 12 = -7$

$\therefore R(f) = [-7, 13]$

(ii) $f(x) = \sqrt{2-x}$

هذه الدالة معرفة لقيم x التـى تحقـق $2 - x \geq 0$ اى اذا كانـت $x \leq 2$.

$\therefore D(f) = (-\infty, 2)$

$R(f) = [0, \infty)$.

مثال : اعتبر الدالة الاتية ثم عين مجال ومدى الدالة وارسم منحنـى هذة الدالة:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+4, & x<2\\ 8-x, & x\geq 2\end{cases}$$

<u>**الحـــل**</u> **: (i) مجال الدالة** مقسم الى فترتين $(-\infty,2)$ وقاعدة الدالة هى

$$f(x)=\frac{1}{2}x+4$$

(ii) $[2,\infty)$ **وقاعدة الدالة هى** $x-f(x)=8$

$\therefore$ مجال الدالة هو كل الاعداد الحقيقية R

لايجاد مدى الدالة فى الفترة الاولى $(-\infty,2)$

$$x<2$$

$$\therefore \frac{1}{2}x+4<1+4$$

$$\frac{1}{2}x+4<5 \qquad \therefore f(x)\in(-\infty,5)$$

فى الفترة الثانية $[2,\infty)$

$$x\geq 2$$

$$-x\leq -2$$

$$8-x\leq 8-2=6 \qquad \therefore f(x)\in(-\infty,6)$$

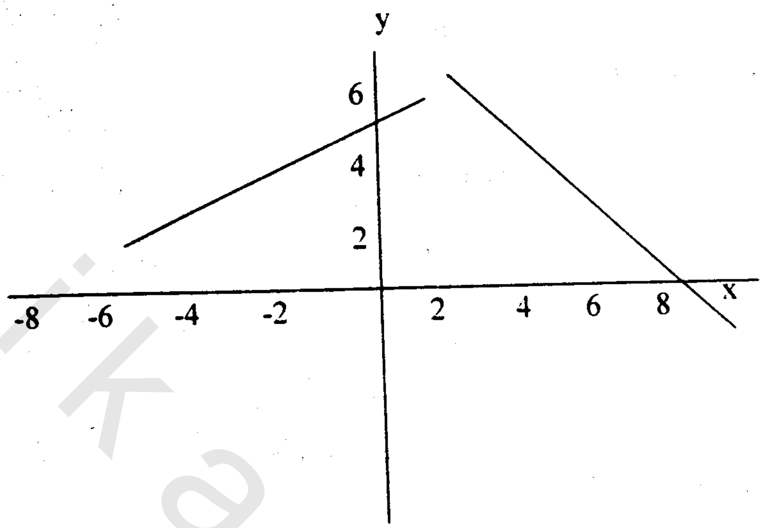
$\therefore$ **مدى الدالة هو اتحاد الفترتين**

$$(-\infty,5)\cup(-\infty,6]=(-\infty,6)$$

ولرسم منحنى الدالة نكون الجدول التالى

X	-2	0	1	2	4	8	10
F(x)	3	4	9/2	6	4	0	-2

منحنى الدالة هو



مثال : اوجد مجال الدالة

$$F(x) = \frac{x}{(x-2)\sqrt{x-1}}$$

الحل : الجذر يكون معرفا عندما $x > 1$ والمقام يساوى صفر فى حالة $x = 2, x = 1$ بذلك يكون مجال الدالة على الصورة

$$D(f) = \{x : x > 1, x \neq 2\}$$
$$= (1, \infty) - \{2\}.$$

مثال : اوجد مجال ومدى الدالة $\mathbf{f(x) = (x^2 - x - 2)^{3/2}}$

الحل : مقام هذا الاسس الكسرى عدد زوجى . اى يمكن وضع

الدالة على مقام هذا الاسس الكسرى عدد زوجى . اى يمكن وضع الدالة على الصورة

$$f(x)=\sqrt{(x^2-2x-2)^3}$$

نجد ان هذه الدالة تكون معرفة فقط عندما $x^2-2x-2\geq 0$

ولايجاد مجموعة الحل نحلل هذا المقدار فنحصل على

$$(x-2)(x+1)\geq 0$$

المقدار يساوى الصفر عندما $x=-1,\ x=2$

∴ يجب ان نحدد اشارة المقدار (الدالة) على الفترات

$(-\infty,-1),(-1,2),(2,\infty)$.

(i) If $x<-1$; $x+1<0$, $x-2<0$

$(x+1)(x-2)>0$

(ii) If $-<x<2$; $x+1>0$, $x-2<0$

(iii) If $x>2$; $x+1>0$, $xz-2>0$ $(x+1)(x-2)>0$

بذلك نجد ان الدالة تكون معرفة لقيم x فى الفترتين الاولــى والثالثـة وعندما $x=-1,2$

∴ نطاق الدالة هو $D(f)=(-\infty,-1]U[2,\infty)$

ولايجاد المدى :

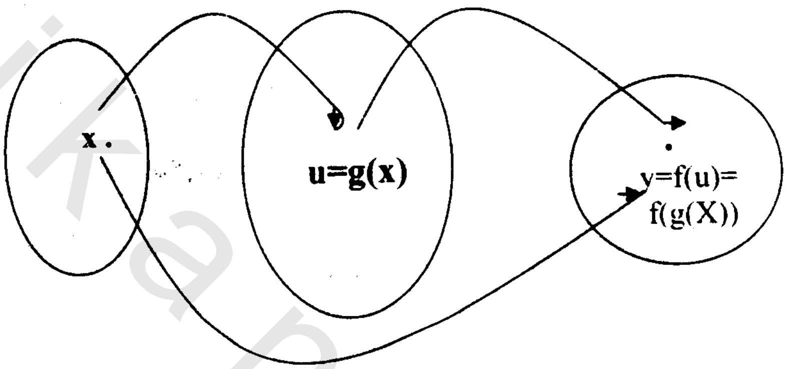
بما ان المقدار داخل الجذر التربيعى عدد غير سالب فان المــدى يكــون ايضا عدد غير سالب $R(f)=[0,\infty)$.

Function of a function دالة الدالة (4

اذا كانت y دالة فى المتغير u والمتغير u بدوره دالة فى المتغير x فان y ايضا يمكن اعتبارها دالة فى المتغير x.

وبفرض أن $y = f(u)$, $u = g(x)$ فاننا نحصل على y كدالة فـــى x على الصورة

$$y = f\,|\,g(x) \qquad (5)$$



The composite function f = g is the result function f acting on the values of the function x.

هذه الدالة تسمى دالة الدالة وتسمى ايضا الدالة التركيبية (fog)

(Composite function) حيث تكون نتيجة تأثير الدالة f على القيم التى تأخذها الدالة $g(x)$ بمعنى ان :

$$(fog)(x) = f\,|\,g(x)\,| \qquad (6)$$

<u>**كمثال**</u> : نفرض ان $y = \sin u\,,\ u = x^2$

$\therefore\ y = \sin\ x^2$

ملحوظة :

نطاق تعريف الدالة $y = f\,[g(x)]$

اما ان يكون نطاق تعريف $u = g(x)$ او الجزء الذى فيه الدالة u معرفة ويقع داخل نطاق تعريف $f(u)$.

مثال : اعتبر الدالة $y = \sqrt{1 - x^2}$

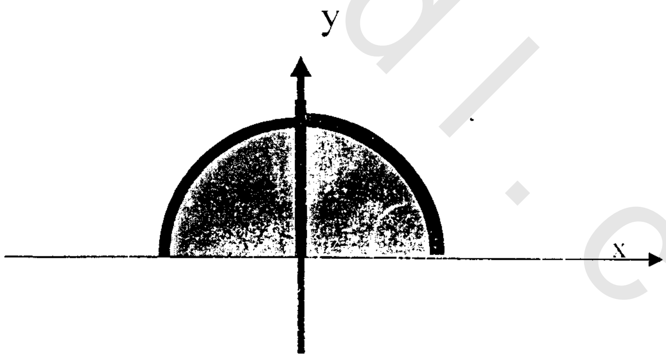
حيث يمكن اعتبارها كالاتى $y = \sqrt{u}, u = 1 - x^2$

نطاق تعريف هذه الفترة المغلقة [1 ,1-] وذلك لان عنـــدما $|\,x\,| > 1$

نجد ان $u < 0$ وتكون الدالة $y = \sqrt{u}$

غير معرفة مع ان الدالة $u = 1 - x^2$ معرفةلجميع قيم x .

منحنى هذه الدالة هو الجزء العلوى من الدائرة التى مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها الوحدة كما هو مبين بالشكل الاتى:



وهذه العملية "دالة الدالة" يمكن أجراءها لأى عدد من المرات فمثلا نعتبر الدالة

$$y = \log [\sin(x^2 + 1)]$$

يمكن الحصول عليها باجراء العمليات التالية

$$y = \log u \,,\; u = \sin v \,,\; v = x^2 + 1$$

ثانيا : الدوال الغير جبرية

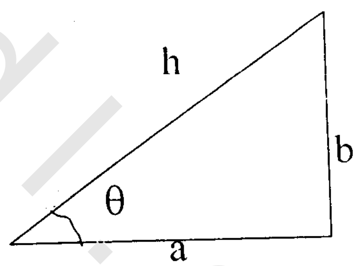
Transcendental Functions

هناك مجموعة كبيرة من الدوال التى ليست دوال جبرية سوف تدرس بعضا منها مثل الدوال المثلثية والدائرية الزائدية والدالة اللوغاريتمية والدالة الاسيّة :

1- الدوال المثلثية Trigonometric Function

نعلم ان النسب المثلثية $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$

وأنه يمكن ايجاد هذه النسب المثلثية باستخدام المثلث القائم



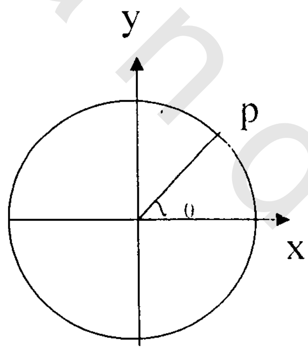
$$\sin\theta = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}} = \frac{b}{h}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adjacant}}{\text{hypotenuse}} = \frac{a}{h}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} = \frac{b}{a}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

حيث θ زاوية حادة (acute angle) وتقاس زاوية θ اما بالتقدير الدائرى (radians) المسافة القوسية المقطوعة على محيط الدائرى التى نصف قطرها الوحدة كما بالرسم الآتى وسوف نرمز لها بالرمز θ_r أو بالتقدير الستينى (الدرجات) وسوف نرمز لها بالرمز θ_d والعلاقة بـــين هذين المقياسين هى



$$\frac{\theta r}{2\pi} = \frac{\theta d}{360} \quad \text{or}$$
$$\theta_r = \frac{2\pi}{360}\theta_d$$

وسوف نعطى بعض القيم $\sin\theta, \cos\theta$ المناظرة للزاوية θ فى الجدول التالّى:

Table (1)

θ_d	θ_r	$\theta \sin$	$\theta \cos$	θ_d	θ_r	$\theta \sin$	$\theta \cos$
0	0	0	1	250^0	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	225^0	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
120^0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
135^0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	230	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	360	2π	0	1
180	$\frac{6}{\pi}$	0	-1				

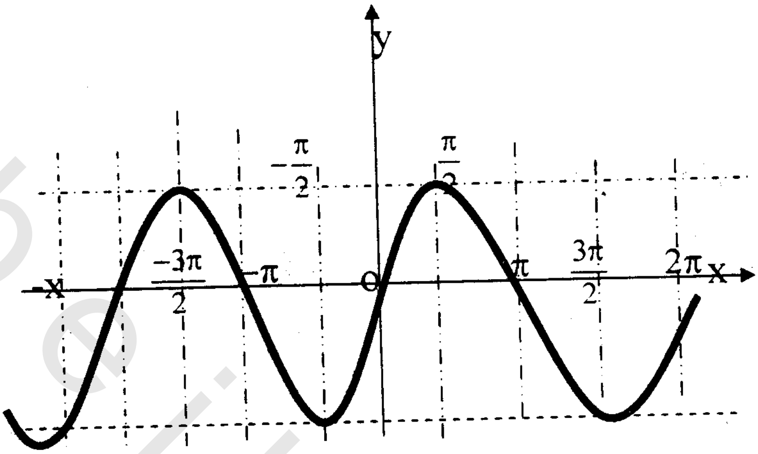
والان سوف ندرس هذه النسب كدوال

Sine function : دالة الجيب (أ)

تعرف كالاتى

$F(x) = \sin x = \{(x, y): y = \sin x,\ x = R\}$

سوف نرسم منحنى دالة الجيب لبعض قيم المتغير x باستخدام الجـــدول (1) كالاتى :



واضح من الرسم أنه عندما $x = 0$ فان $\sin x = 0$ وتتزايد قيمة الدالة من (0) الى (1) عندما تزداد x من 0 الى $\pi/2$ ثم تناقص قيمة الدالة من 1 إلى 0 عندما تتزايد x من $\pi/2$ الى π ثم تعكس الدالة اشاراتها من (+) إلى (−) فتأخذ القيمة −1 عندما $x = \frac{3\pi}{2}$ ثم تتزايد مرة اخرى الى ان تصل الى 0 عندما $x = 2\pi$ وهكذا ومن الرسم نجد ان:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi).....$$

وتسمى هذه العلاقة بالصفة الدورية للدالة sin x

تعريف الدالة الدورية Periodic function

الدالة f المعرفة لجميع قيم x تسمى دالة دورية . اذا وجد عدد حقيقى ω بحيث

$$f(x) = f(x+\omega) \qquad (3)$$

واصغر قيمة للعدد ω يسمى دورة الدالة .

وتتميز الدالة sin x بالخواص التالية :

(1) دالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية (نطاقها = R)

(2) دالة محدودة لجميع قيم x لان $-1 \le \sin x \le 1$

(3) مدى الدالة هو الفترة المغلقة [1 ,1-]

(4) دالة دورية وطول دورتها $\omega = 2\pi$ حيث

$$\sin x = \sin(x + 2n\pi), \qquad n \in I$$

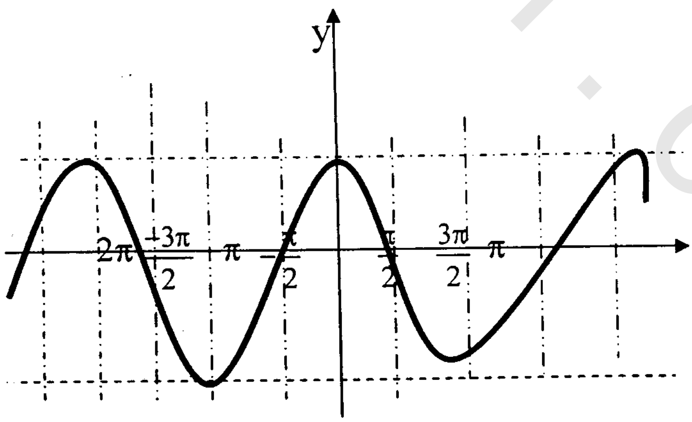
(5) دالة فردية وذلك لان $\sin(x) = -\sin x$

(i) دالة جيب التمام Cosine function

تعرف كالاتى : $y = \cos x$ or

$$f(x) = \{(x, y) : y = \cos x, x \in R\} \qquad (5)$$

منحنى الدالة يأخذ الصورة



وتتميز الدالة cos x بالخواص الاتية :

(1) دالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية (نطاقها = R)

(2) دالة محدودة لجميع قيم x لان $-1 \le \cos x \le 1$

(3) مدى الدالة هو الفترة المغلقة [1 ,1-]

(4) دالة دورية وطول دورتها 2π حيث $\cos x = \cos(x + 2n\pi).n \in 1$

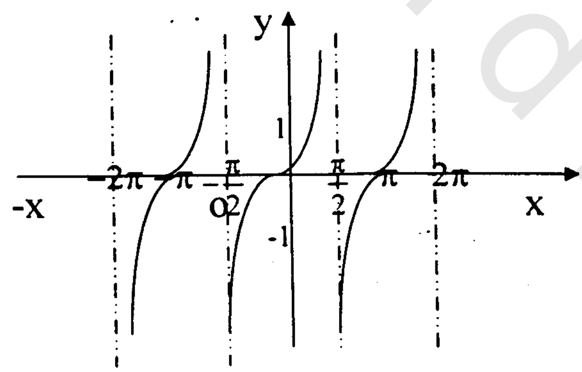
(5) دالة زوجية لان cos (-x) = cos x

(iii) دالة الظل Tan function

تعرف كالاتى

$$y = \tan x \quad \text{or} \quad f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (5)$$

منحنى الدالة يأخذ الصورة الاتية :



تتميز دالة الظل tan x بالخواص الاتية :

(1) نطاقها جميع قيم x الحقيقية ما عدا اصفار المقام . أى عندما cos

$x = 0$ وذلك لقيم $x = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ حيث $n = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots\ldots$

أى أن نطاق الدالة هو $R - \{x = \frac{\pi}{2} + n\pi\}$

(2) الدالة غير محدودة وبالتالى فان مدى الدالة هو R

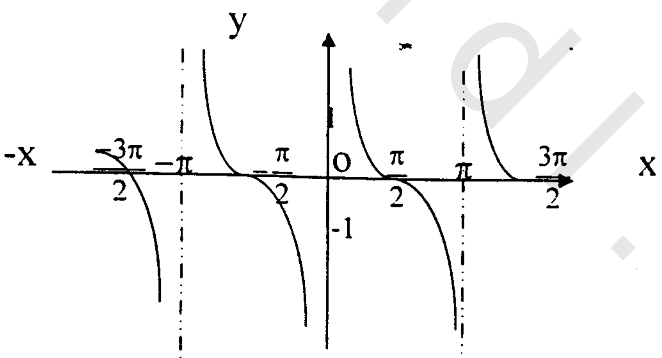
(3) الدالة دورية وطول دورتها = π

(4) الدالة فردية لان $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(iv) دالة ظل التمام Cotangent function

وتعرف كالاتى $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}; x \neq n\pi$

منحنى الدالة يأخذ الصورة الاتية :



تتميز الدالة cot x بالخواص الاتية :

(1) نطاقها جميع قيم x ما عدا اصفار المقام أى عندما $\sin x = 0$

وذلك لقيم

$$x = n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

أى أن نطاق الدالة هو

$$R - \{n\pi\}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(2) الدالة غير محدودة وبالتالى فان مدى الدالة هو R

(3) الدالة دورية وطول دورتها = π

(4) الدالة فردية لان $\cot(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$

(v) دالة قاطع الزاوية Secant function sec x

وتعرف الدالة كالاتى :

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$$

تتميز الدالة sec x بالخواص الاتية :

(1) نطاقها جميع قيم x ما عدا اصفار المقام $k = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$

أى أن نطاقها هو

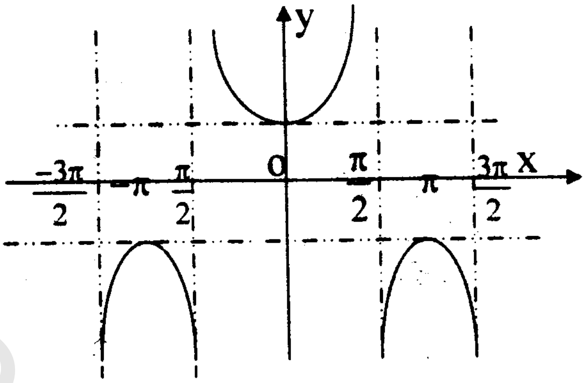
$$R - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots.$$

(2) مدى الدالة هو $R - (-1, 1)$

(3) الدالة دورية وطول دورتها = 2π

(4) الدالة زوجية لان $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

منحنى الدالة يأخذ الصورة الاتية

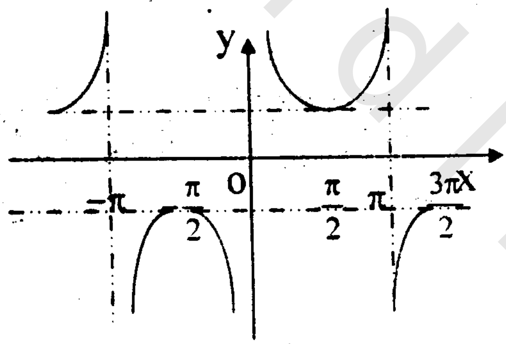


(vi) دالة قاطع تمام الزاوية Cosecant function cosec x

تعرف كالآتى

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, x \neq n\pi$$

منحنى الدالة يأخذ الصورة الاتية :



تتميز الدالة cosec x بالخواص الاتية :

(أ) نطاقها جميع قيم x ما عدا اصفار المقام أى عندما $x = n\pi$ أى أن

نطاقها هو $R - \{n\pi\}$

(2) مدى الدالة هو $R - (-1, 1)$

(3) الدالة دورية وطول دورتها = 2π

(4) الدالة فردية لان

$$\operatorname{cosec}(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = \frac{1}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x$$

بعض المتطابقات الهامة الخاصة بالدوال المثلثية :

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

(2) $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

(3) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \tan y}$$

(4) $\sin 2x - 2 \sin x \cos x$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

(5) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

(6) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

(7) $\cos x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$

$$\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

$$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

$$\cos x.\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

* * *

تمارين

1) اوجد نطاق ومدى الدوال الاتية :

a) $y = \sqrt{x^3 - 3}$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x(x+2)}}$

c) $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 9x}$

d) $y = \sin(1 - x^2)$,

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$

f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}\sqrt{x-7}}$

g) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x-2)}$

h) $y = \dfrac{4x+7}{6x^2 + 13x - 5}$

i) $y = \dfrac{2x-3}{x^2 - x}$

2) لكل من الدوال الاتية حدد ما اذا كانت f دالة فردية أو زوجية :

a) $f(x) = 3x^3 - 4x$

b) $f(x) = 6x^4 - x^2 + 7$

c) $f(x) = 9 - 5$

d) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$

e) $f(x) = 2$

g) $f(x) = 2x^3 + x^2$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

i) $f(x) = |x| = 5.$

3) حدد ما اذا كانت r دالة فردية أو زوجية ام ليست فردية أو زوجية

لكل من الدوال الاتية :

a) $f(x) = x^3 \cos x$

b) $f(x) = x^3 \sin x$

c) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

d) $f(x) = (x-1)(x+1)$

e) $f(x) = \frac{x \tan x}{1+x^3}$

f) $f(x) = \frac{x^2 - \sec x}{x^2 + x^6}$

4) بفرض ان $h(x) = \sin x$ ، $g(x) = \frac{1}{1-x}$ ، $f(x) = x^3 - x$

اوجد الدوال المركبة الاتية :

a) $g(h(x))$

b) $f(g(x))$

c) $h(g(x)$

d) $f(g(h(x)))$

e) $g(f(h(x)))$

f) $g(h(g(x)))$

5) اثبت ان حاصل ضرب دالتين فرديتين يكون داله زوجية ؟

• • •

انواع الدوال Types of Functions

اذا كان $f: A \to B$ راسم حيث $A, B \subset \Re$ يقال ان الراسم **f** داله ذات متغير حقيقى . (فئة الاعداد الحقيقة $\Re$) .

1- دالة كثيرة الحدود :

تكون على الصورة

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + a_n ,$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثوابت ، n عدد صحيح ويسمى درجة كثيرة الحدود اذا كانت $a_0 \neq 0$.

2- الدوال الجبرية :

هى دوال $y = f(x)$ تحقق معادلة على الصورة

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0$$

حيث $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ كثيرات حدود فى x .

3- الدوال المتسامية : هى الدوال التى ليست جبرية.

الدوال المتسامية البسيطة

1- الدالة الاسية

تكون على الصورة $f(x) = a^x$

حيث $a \neq 0,1$

* اذا كان **$a = e$** **الاساس الطبيعى للوغاريتم**

فأن الدالة تأخذ الصورة $f(x) = e^x$

وهذه الدالة لها اهمية فى تعريف بعض الدوال الاخرى .

2- الدالة اللوغاريتمية

Logarithmic Function

اذا كان $a^y = x$ فان y تسمى لوغـــاريتم x للاســـاس a وتكتب $y = \log_\alpha x$ اذا كـــان y ,a مـــوجبتين وكانـــت $a \neq 1$ فيوجد فقط قيمة حقيقية واحدة فقط للمقدار y .

<u>القواعد الاساسية الاتية صحيحة :</u>

(1) $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$

(2) $\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

(3) $\log_a u^r = r \log_a u$

وتستخدم عادة اساسان

أ - نظام **بورودجزيان** الذى اساسه **$a = 10$** .

ب- نظام **نابيرى** الذى اساسه هو الاساس الطبيعى

$a = e = 2.71828$ فى هذه الحالة يكتب **$\ln x$** **بدلا من** $\log_\alpha x$

الدالة اللوغاريتيمة تكون على الصورة $f(x) = \log_{\alpha} x$

واذا كانت $a = e$ تكتب $f(x) = \ln x$.

3- الدوال المثلثية

هى الدوال:

(i) $f(x) = \sin x$

(ii) $f(x) = \cos x$

(iii) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

(iv) $f(x) = \sec x = 1/\cos x$

(v) $f(x) = \operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

(vi) $f(x) = \cot x = 1/\tan x$

وفيما يلى بعض خواص هذه الدوال

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \begin{cases} \text{1a) } 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \\ \text{1b) } 1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \end{cases}$

(2) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

(3) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

(4) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

(2a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(3a) $\cos 2x = \cos^2 - \sin^2 x$

$$(2b)\quad \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$(3b)\quad \cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$(2c)\quad \sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$(3c)\quad \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

ويمكن للطالب مراجعة أو اثبات كثير من المتطابقات المثلثية الاخرى .

4- الدوال المثلثية العكسية

فيما يلى قائمة بالدوال المثلثية العكسية وقيمها الاساسية .

$(1)\ \ y=\sin^{-1}x \quad -\pi/2\le y\le \pi/2$

$(2)\ y=\cos^{-1}x \quad 0\le y\le \pi$

$(3)\ y=\tan^{-1}x \quad -\pi/2< y< \pi/2$

$(4)\ y=\operatorname{cosec}^{-1}x=1/\sin^{-1}x \quad -\pi/2\le y\le \pi/2=\sin^{-1}\dfrac{1}{x}$

$(5)\ y=\sec^{-1}x=1/\cos^{-1}x \qquad 0 < y < \pi$

$(6)\ y=\cos^{-1}x=\pi/2-\tan^{-1}x \qquad 0 < y < \pi$

5- الدوال الزائدية

فيما يلى تعريف الدوال الزائدية بدلالة الدوال الاسية .

(1) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(2) $\cos h\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(3) $\tan x = \sinh x / \cosh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(4) $\text{cosechx} = 1/\sinh x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

(5) $\sec hx = 1/\cosh x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

(6) $\cot hx = \cosh x / \sinh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

وفيما يلى بعض الخواص لهذه الدوال

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \begin{cases} \text{1a) } 1 - \tanh^2 x = \sec h^2 x \\ \text{1b) } \coth^2 x - 1 = \cos ech^2 x \end{cases}$

(2) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

(3) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

(4) $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \mp \tanh x \tanh y}$

(2a) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

(3a) $\cosh 2x = 2 \cosh x - \cosh y$

ويمكن اثبات بعض المتطابقات الاخرى (انظر التمارين)

6- الدوال الزائدية العكسية

اذا كان $x = \sinh y$ فان $y = \sinh^{-1} x$ هى دالة الجيب الزائدية

العكسية للمقدار x، وفيمايلى الصورة اللوغاريتمية للدوال الزائدية العكسية والنطاق التى تكون فيمة حقيقية .

(1) $y = \sinh^{-1} x = \ln[x + \sqrt{(x^2+1)}]$ for all x

(2) $y = \cosh^{-1} x = \ln[x + \sqrt{(x^2-1)}] \quad , \quad x \geq 1$

(3) $y = \tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \quad , \quad |x| < 1$

(4) $y = \operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{(x^2+1)}}{|x|}\right] \quad , \quad x \neq 0$

(5) $y = \operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left[\dfrac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right] \quad , \quad 0 < x \leq 1$

(6) $y = \coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \quad , \quad |x| > 1$

بعض نهايات الدوال

سنقدم هنا نبذ مختصرة عن بعض نهايات الدوال والتى سوف يتم دراستها بالتفصيل فى الفصل الثالث.

اذا فرضنا ان $f(x)$ دالة وحيدة القيمة لجميع قيمة x القريبة من $\mathbf{x = x_0}$ مع امكان الاستثناء x_0 نفسها فاننا نقول ان العدد l هو نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من x_0 وتكتب

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

اذا كان لدى مقدار صغير موجب ε فأنه يمكننا ايجاد عدد موجب

δ (يعتمد على ε) بحيث $|x - x_0| < \delta$ كلما كان

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

في هذه الحالة نقول ان f(x) تؤول ال l عندما x تؤول الى x_0.

بعض النهايات الخاصة :

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x}) = e$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

تمارين

- برهن على صحة كل من المتطابقات التالية :

$$(1)\ \sinh 3x = 4\sinh^3 x + 3\sinh x$$

$$(2)\ \cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$$

$$(3)\ \tan\frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sqrt{\ }(\cosh x - 1)}{\sqrt{\ }(\cosh x + 1)}$$

$$(4)\ \sinh 2x = \frac{2\tanh x}{1 - \tanh^2 x}$$

$$(5)\ \cos 2x = \frac{1+\tanh^2 x}{1-\tanh^2 x}$$

$$(6)\ \sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$(7)\ \sinh x - \sinh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

$$(8)\ \cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$(9)\ \cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$$

10- اذا كان

tan x = tan a tanh b

tan y = cot a tanh b

فاثبت أن :

tan (x + y) = cosec 2a sinh 2b.

* * *