

الباب الحادى عشر

المشتقات الجزئية

Partial derivatives

تعريف: اذا كانت الدالة $Z = f(x, y)$ دالة فى متغيرين فان المشتقة التفاضلية الجزئية بالنسبة الى x تعرف على انها :

$$Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

مع اعتبار y ثابت وبالمثل يمكن تعريف المشتقة التفاضلية الجزئية للدالة بالنسبة إلى المتغير y مع اعتبار x ثابت .

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

المشتقات الجزئية العليا :

اذا كانت الدالة $Z = f(x, y)$ وكانت المشتقات الجزئية الاولى لها Z_x, Z_y فاننا نعرف المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لها .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

نظرية :

إذا كانت الدالة $Z = f(x, y)$ متصلة وكان كل من $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ متصلين

وأيضا فإن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال :

إذا كانت $Z = x^2 y^2 - 3x + 2x^3 y + 5$ فاوجد المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى والثانية .

الحل :

$$z_x = 2xy^2 - 3 + 6x^2 y$$

$$z_{xx} = 2y^2 + 12xy$$

$$z_y = 2x^2 y + 2x^3$$

$$z_{yy} = 2x^2$$

$$z_{xy} = 4xy + 6x^2$$

$$z_{yx} = 4xy + 6x^2$$

من الملاحظ ان $z_{xy} = z_{yx}$ وذلك طبقا للنظرية السابقة

مثال :

اذا كانت $z = x^y$ فاوجد z_x, z_y

الحل :

$$z_x = yx^{y-1}, \quad z_y = \ln x \cdot x^y$$

مثال :

اوجد جميع المشتقات الجزئية للدالة $z = x^2 \sin y$

الحل :

$$\begin{aligned} z_x &= 2x \sin y, & z_{xx} &= 2 \sin y \\ z_y &= x^2 \cos y, & z_{yy} &= -x^2 \sin y \\ z_{xy} &= z_{yx} = 2x \cos y \end{aligned}$$

$$z = e^x \sin y$$

مثال : اذا كان

اثبت ان اولا :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ثانيا :

الحل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \cos y \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^x \cos y \quad (2)$$

في (1) ، (2) ثبت المطلوب اولاً :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = e^x \sin y \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = -e^x \sin y \quad (4)$$

في (3) ، (4) ينتج ان :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x \sin y + (-e^x \sin y) = 0$$

تمرين:

اذا كان $Z = \ln(x^2 + y^2)$ فاوجد Z_x, Z_y, Z_{xx}, Z_{yy}

التفاضل التام

Complete derivative

تعريف :

يعرف التفاضل التام للدالة $Z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

حيث Z_x, Z_y دوال متصلة .

امثلة محلولة Solved Problems

مثال :

$$z = x^3 + xy^2 + \sin xy$$

اوجد التفاضل التام للدالة

الحل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + y \cos xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x \cos xy$$

وبذلك يكون :

$$dz = (3x^2 + y^2 + y \cos xy) dx + (2xy + x \cos xy) dy$$

مشتقة الدوال الضمنية

إذا كانت $f(x, y)$ دالة ضمنية في المتغيرين x, y فإن $df = 0$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx = -\frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y} dy \neq 0$$

وبذلك فإنه يمكن إيجاد المشتقة الأولى للدالة الضمنية باستخدام التفاضل الجزئي .

مثال : أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y^2 \cos y + 2x \sin y + 2xy = 3$

إذا كانت $y^2 \cos y + 2x \sin y + 2xy = 3$

الحل :

$$\cos y + 2x \sin y + 2xy - 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \sin y + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -y^2 \sin y + 2y \cos y + 2x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \sin y + 2y}{-y^2 \sin y + 2y \cos y + 2x \cos y + 2x}$$

مثال: إذا كانت $z = y^x - x^y$ اوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y \cdot y^x - yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = yx^{y-1} - \ln x \cdot x^y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\ln y \cdot y^x - yx^{y-1}}{yx^{y-1} - \ln x \cdot x^y}$$

تمارين

1- في كل من الدوال الآتية اوجد :

$$Z = e^{3x} \cos y \quad (a)$$

$$Z = e^{3x} + \cos x^2 y \quad (b)$$

$$Z = e^x \sinh y + \cos (2x - 3y) + \ln (x + 3y) \quad (c)$$

$$Z = (\sin x)^{\tan y} \quad (d)$$

$$2- إذا كان $Z = (ax + by)^3 + \tanh (ax by) + e^{ax + by}$$$

اوجد : $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

$$b \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y}$$

ثم اثبت ان :

3- اوجد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت

a) $(\cos x)^y + y^{\ln} = 2y$

b) $(\sin^{-1} x)^{\tan y} = (\sec y)^x$

قاعدة السلسلة

اذا كانت $z = f(x, y)$ وكان كل من x, y دوال في المتغير t وبذلك

اذا كانت $x = x(t), y = y(t)$ فان التفاضل التام $\frac{dz}{dt}$ للدالة Z يعطى بالعلاقة .

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

كذلك امتداد لقاعدة السلسلة للتفاضل الجزئى

اذا كان $Z = f(x, y)$ وكان كل من x, y دوال فى المتغيرين (u, v)

$$x = x(u, v) , \quad y = y(u, v)$$

فان

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال : اوجد $\frac{dz}{dt}$ اذا كانت $z = x^3 + y^3$

$$x = e^{t^2}, \quad y = \sin 2t$$

الحل : في قاعدة السلسلة

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2te^{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t$$

$$\therefore \frac{dz}{dt} = 6x^2 te^{t^2} + 6y^2 \cos 2t$$

وبالتعويض عن

$$x = e^{t^2}, \\ y = \sin 2t$$

مثال :

اذا كانت $Z = \ln(x^2 + 3y)$ وكانت

$$X = (u^2 + v)^3, \quad y = \sin u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}$$

فاوجد :

الحل :

في قاعدة السلسلة

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 3y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{x^2 + 3y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 3(u^2 + v)^2 \cdot 2u, \frac{\partial x}{\partial v} = 3(u^2 + v)^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \cos u \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{6x}{x^2 + 3y} (u^2 + v)^2 \cdot 2u + \frac{3}{x^3 + 3y} \cos u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{6x}{x^2 + 3y} (u^2 + v)^2 + \frac{3}{x^3 + 3y} \cdot 0$$

وبالتعويض عن قيم x, y بدلالة (u, v)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{6x}{x^2 + 3y} (u^2 + v)^2 \cdot 2u + \frac{3}{x^3 + 3y} \cos u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{6(u^2 + v)^5}{(x^2 + v)^6 + 3 \sin u}$$

مثال : إذا كان $z = f(x, y)$ وكان

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

اثبت ان :

$$z_r = z_x \cos \theta + z_y \sin \theta$$

$$\frac{1}{r} z_\theta = -z_x \sin \theta + z_y \cos \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$$

الحل :

وهو المطلوب اولا :

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta$$

وهو المطلوب ثانيا :

مثال : اذا كانت $Z = u + x^2$

$$u = x^2 + \sin y \quad , \quad v = \text{Ln}(x + y) \quad \text{وكانت}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{فاوجد :}$$

الحل :

من قاعدة السلسلة

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2v$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x+y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$$

النهايات العظمى والصغرى لدالة في متغيرين

تعريف :

يقال للدالة $z = f(x, y)$ نهاية عظمى عند النقطة (a, b) اذا كان

$$f(a, b) > f(x, y)$$

وذلك لجميع النقط (x, y) القريبة قريبا كافيا من النقط (a, b)

ويقال للدالة $z = f(x, y)$ نهاية صغرى عند النقطة (a, b) اذا كان :

$$f(a, b) < f(x, y)$$

وذلك لجميع النقط (x, y) القريبة قليلا كافيا من النقط (a, b) .

بفرض ان الدالة $z = f(x, y)$ لها نهاية عظمى او صغرى عند النقطة (a, b) .

فان كلا من التفاضل $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ ينعدم أو يكون غير موجود

$$f_x(a, b) = 0 ,$$

$$f_y(a, b) = 0$$

غير موجود $f_x(a, b)$ or $f_y(a, b)$

وتسمى النقطة التي تنعدم عندها المشتقات الجزئية الاولى بالنقطة الحرجة .

نظرية :

اذا كانت الدالة $z = f(x, y)$ لها تفاضلات جزئية حتى الرتبة الثانية

ومتصلة في نطاق تعريفها والذي يحتوى النقطة (a, b) والتي عندها

$$f_x(a, b) = 0 , \quad f_y(a, b) = 0$$

فانه للقيم $x = a$, $y = b$ يكون :

-1- للدالة $z = f(x, y)$ نهاية عظمى اذا كان :

$$f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 > 0$$

$$f_{xx}(a, b) > 0$$

2- للدالة $z = f(x, y)$ نهاية صغرى اذا كان :

$$f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 > 0$$

$$f_{xx}(a, b) < 0$$

3- للدالة $z = f(x, y)$ نهاية عظمى ولا صغرى اذا كان :

$$f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 < 0$$

4- يفشل الاختيار اذا كان

$$f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = 0$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال :

اوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

الحل :

1- نوجد اولا النقط الحرجة للدالة $f(x, y)$

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$f_y = 3x^2 - 3y = 0$$

بحل المعادلتين نجد ان النقط الحرجة هي $(0, 0), (1, 1)$.

ايجاد التفاضلات الجزئية من الرتبة الثانية

$$f_{xx} = 6x \quad f_{yy} = 6x \quad f_{xy} = -3$$

$$f_{xx}(0, 0) = 0 \quad f_{yy}(0, 0) = 0 \quad f_{xy}(0, 0) = -3$$

$$f_{xx}(1, 1) = 6 \quad f_{yy}(1, 1) = 6 \quad f_{xy}(1, 1) = -3$$

دراسة النقط الحرجة (0, 0)

$$f_{xx}(0, 0) \cdot f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2$$

$$= (0) \cdot (0) - (-3)^2 = -9 < 0$$

وبذلك لا يكون للدالة $f(x, y)$ عند النقطة (0, 0) نهاية عظمى ولا

صغرى عند النقطة (1, 1) نجد أن :

$$f_{xx}(1, 1) \cdot f_{yy}(1, 1) - [f_{xy}(1, 1)]^2$$

$$= 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

$$f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$$

اذن للدالة نهاية عظمى عند النقطة (1, 1) .

* * *