الباب التاسع

تقعر المنحنيات واختبار المشتقة الثانية

" يعتبر مفهوم التقعر **concavity** من المفاهيم المفيدة فى وصف منحنى الدالة f (قابلة للاشتقاق) أى أن لها مماس عن النقطة c وهذا يعنى وجود ($f'(c)$) .

<u>تعريف :</u>

اذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل عند النقطة c فى الفترة المفتوحة $1 \supset R$ فان المنحنى يكون واقعا فوق المماس (**comvex**) عند هذه النقطة فى هذه الفترة I (بمعنى اخر منحنى الدالة يكون مقعرا لاسفل **comvex** اذا كان $f'(x)$ تزايدية على الفترة).

والمنحنى يكون واقعا اسفل المماس (**concave**) عند هذه النقطة فى هذه الفترة I (بمعنى اخر منحنى الدالة يكون مقعرا لاعلى **concave** اذا كان $f'(x)$ تناقصية على الفترة.

<u>نظرية (1)</u> :

اذا كانت الدالة f معرفة على الفترة المفتوحة تحتوى c وكان $f'(c)$ موجود أى $f'(c)$ لها وجود. فانه عند النقطة $P(c,f(c))$ يكون منحنى الدالة :

(i) مقعرا لاعلى اذا كان $f'(c) > 0$ على الفترة المفتوحة .

(ii) مقعرا لاعلى اذا كان $f'(c) < 0$ على الفترة المفتوحة .

تعريف (1) : لنفرض ان الدالة f قابلة للتفاضل عند C .

يقال ان منحنى f مقعر للاعلى **concave upward** عند النقطة **(C, F(C))** اذا وجدت فترة مفتوحة]a, b[تحتوى C بحيث انه على هذه الفترة يكون منحنى F واقعا فوق المماس عند P ويقال ان منحنى F مقعر للاسفل **concave downward** عند النقطة P(C, F(C)) اذا وجدت فترة مفتوحة]a, b[تحتوى C بحيث انه على هذه الفترة يكون منحنى F تحت المماس عند P .

نظرية (2) : اذا كانت الدالة F قابلة للتفاضل على فترة مفتوحة تحتوى C ، فانه عند النقطة P(C, F(C)) يكون منحنى F .

(I) مقعر للاعلى اذا كان $f''(c) > 0$

(II) مقعر للاعلى اذا كان $f''(c) < 0$

Solved Problems امثلة محلولة

مثال : ادرس تقعر الدالة $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$

الحــــل :

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$$

$$f''(x) = 6x + 2 = 2(3x + 1)$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0 \quad \text{if} \quad 3x + 1$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{if} \quad 3x + 1 > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) < 0 \quad \text{if} \quad x < -\frac{1}{3},$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{if} \quad x - \frac{1}{3}$$

وبالتالى فان منحنى الدالة مقعرا للاعلى على الفترة $]-\frac{1}{3},\infty[$ تسمى النقطة $P(-\frac{1}{3},-88/27)$ التى يتغير عندها التقعر من التقعر للاسفل إلى التقعر للاعلى **بنقطة الانقلاب** .

مثال : ادرس تقعر الدالة $f(x) = \sin x$

الحـــل : $f''(x)\cos x$, $f''(x) = -\sin x$

حيث $f''(x) = -f(x)$ فان $f''(x) < 0$ عندما $f(x) > 0$ وبالتـــالى فان المنحنى يكون مقعر لاسفل عندما يقع اعلـــى محـــول x .
وبالمثل $f''(x) > 0$ عندما $f(x) < 0$ وبالتالى المنحنـــى يكـــون مقعر لاعلى عندما يقع اسفل محور x .

كل نقطة على منحنى $f(x)$ عندما يتغير التقعر من اسفل الى اعلى أو العكس تسمى نقطة انقلاب **(point of reflection)** .

تعريف : يقال ان $P(c, f(c))$ الواقعة على منحنى الدالة f نقطة انقلاب

Point of inflection اذا كان يوجد فترة]a, b[تحتوى c

بحيث يتحقق واحدة مما يلى :

]a, b[,∈i) f` (x) > 0 if x
]c, b[,∈ f`(x) < 0 if x
]a, b[,∈ii) f`(x) < 0 if x
]c, b[,∈ f`(x) > 0 if x

أى ان **نقطة الانقلاب** هى نقطة يتغير عندها تقعر الدالة من الاعلى إلـــى الاسفل أو من الاسفل إلى الاعلى .

<u>مثال</u>:

ادرس تقعر منحنى الدالة

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}, x\in R-\{1,-1\}$$

<u>الحـــل</u> :

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}, x\in\{1,-1\}$$

$$f''(x)=\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}, x\in\{1,-1\}$$

بملاحظة ان :

$$2(3x^2+1)>0 \quad \forall x\in R$$

فان اشارة المقدار $f`(x)$ تتوقف على اشارة المقام ولكن

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad Vx = -1$$

وتكون اشره المقدار معطاة كما فى الشكل المصاحب وهكذا نحصل على مايلى :

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \varepsilon [-1,1],$$
$$f''(x) < 0 \quad \forall x \varepsilon R - [-1,1],$$

أى أن المنحنى مقعر للاسفل على الفترة [1 ,1-] ومقعر للاعلى على المنطقة $R-[-1, 1]$

يلاحظ هنا انه **لايوجد نقط انقلاب** للدالة f وذلك لان الدالة غير معرفة عند $x = 1, x = -1$

أى لا توجد نقط على المنحنى احداثيها السينى $x = 1$ or $x = -1$

***منحنى الدالة** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

اذا كانت النقطة $P(c, f(c))$ نقطة انقلاب المنحنى الدالـــة f وكانـــت f' متصلة على فترة محتوية علـــى النقطـــة c ، فانـــه مـــن الضرورى ان يكون $f'(c) = 0$ ويمكن اثبات ذلك كما يلى :

اذا كان $f'(c) > 0$ فان هذا يعنى ان $f'(x) > 0$ على فتـــرة مفتوحـــة $]a, b[$ محتوية النقطة c ، وهذا يتعارض مع تعريف

(2) نفس التعارض سنحصل عليه اذا افترضنا ان $f'(c) > 0$.

من ذلك يتضح انه لايجاد نقط الانقلاب تعين اولا الاعــداد اى قــيم x التى تحقق الشرط $f''(x) = 0$ ثم بعد ذلك نختبر هذه الاعداد من حيث انها احداثيات سينية لنقط انقــلاب او لا وذلــك باســتخدام **تعريف (2)** .

وقبل ان نعطى مثال لتوضيح ذلك فاننا سنعطى الاختبار التالى المفيد فى تحديد النقط العظمى المحلية والصغرى المحلية .

اختبار المشتقة الثانية :

The Second Derivative Test

نظرية (3) لنفرض ان الدالة f قابلة للتفاضل علــى فتــرة مفتوحــة تحتوى العدد c بحيث ان $f'(c) = 0$ فيكون

i) اذا كانت $f''(c) > 0$ فان الدالة f نقطة عظمى محلية عند c ،

ii) اذا كانت $f''(c) < 0$ فان الدالة f نقطة صغرى محلية عند c .

ملحوظة (2) :

اذا كان $f''(c) = 0$ فان اختبار المشتقة الثانية لا يستعمل للكشف عن نوعية النقطة $(c, f(c))$ وفى هذه الحالة نلجأ الى اختبار المشتقة الاولى المعطى .

مثال :

اذا كان

$$f(x) = 4x - x^4 + 12$$

ادرس للدالة السابقة نقط القيمة العظمى والصغرى المحلية وادرس افقيا التقعر ثم اوجد الانقلاب ان وجدت .

<u>الحــل</u> :

1) نوجد اولا المشتقة الاولى والثانية للدالة f :

$$f`(x) = 4 - 4x^3 = 4x\ (1 - x^2)$$
$$f``(x) = 4\ -\ 12\ x^2 = 4(1 - 3x^2)$$

يسبخدم التعبير $f`(x) = 0$ للحصول على الاعداد الحرجة وذلك

بوضع $f`(x) = 0$ فتكون الاعداد الحرجة هى $0, 1, -1$.

نوجد قيمة ``f`` عند هذه النقطة لتحديد اشارتها :

$$\mathbf{f``(0) = 4 > 0,\ \ f``(1) = -8 < 0,}$$
$$\mathbf{f``(-1) = -8 < 0}$$

باستخدام اختبار المشتقة الثانية (نظرية (3)) يكون للدالة f قيمة عظمى محلية عند كل من

1- و 1 ويكون لها قيمة صغرى محلية عند القيمة 0 .

نحسب قيم الدالة f عند الاعداد الحرجة :

$$f(0)\ =\ 12\ \ \text{و}\ \ f(1)\ = 13\ = f(-1)$$

فتكون النقط العظمى المحلية هى :

$$(-1, 13)\ \ \text{و}\ \ (1,\ 13)$$

والنقطة الصغرى المحلية هى : $(0, 12)$

2) لايجاد نقط الانقلاب نحل المعادلة $f'(x) = 0$ أى نحل المعادلة :

$$4(1 - 3x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3}/3, x = \sqrt{3}/3$$

وهذا يحدد لنا الفترات التى سنهتم بتعيين اشارة $f'(x)$ خلالها وهى الفترات

$$]-\infty, -\sqrt{3}/3[,]-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3[,]\sqrt{3}/3, \infty[$$

وسننظم ذلك فى الجدول التالى :

التقعر	$f'(x)$	الفترة
للاسفل	- down ward	$]-\infty, -\sqrt{3}/3[$
للاعلى	+ up ward	$]-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3[$
للاسفل	- down ward	$]\sqrt{3}/3, \infty[$

حيث أن اشارة $f'(x)$ تتغير بازدياد x مرورا بكل من $-\sqrt{x}/x, \sqrt{3/3}$ فان النقط المناظرة $(\pm\sqrt{3}/3, 113/9)$ والواقعة على المنحنى تكون انقلاب للدالة. وهذه النقط ايضا هى النقط التى يتغير عندها التقعر. فكما هو واضح من الجدول فان المنحنى مقعر للاسفل

خارج الفترة $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ ويكون مقعرا للاعلى على الفترة .

Sketch the curves : رسم المنحنيات

ان اى دالة تعيين منحنيا هو فئة من النقط $(x, f(x))$ واى نقطة (x, y) من نقط المنحنى يجب ان تحقق المعادلة: $y = f(x)$ ولرسم منحنى الدالة نتبع مايلى :

I . نعين نطاق الدالة f (ومداها ان أمكن)

فمثلا الدالة $f(x) = \sqrt{(2-x)(x+4)}$

معرفة بشرط أن يكون :

$$(2-x)(x+4) \geq 0$$

$$(2-x)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -4$$

وحيث ان معامل x^2 هو -1 فانه :

$$(2-x)(4+x) \geq 0 \forall x \in [-4, 2]$$

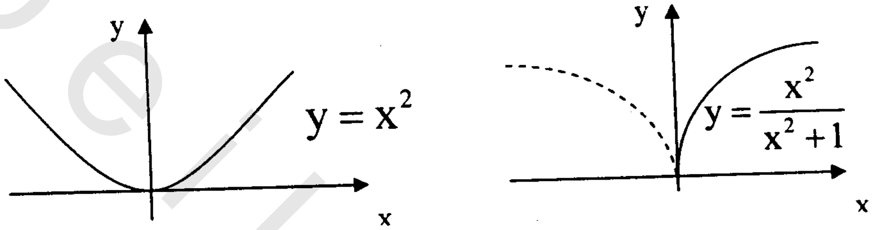
اى ان نطاق الدالة f المعطاه هو [-4, 2]

وهذه هى اكبر فترة يمكن ان يرسم عليها منحنى الدالة ، مع ملاحظة انه لا وجود لمنحنى خارج هذه الفترة .

The Symetry -التماثل.II

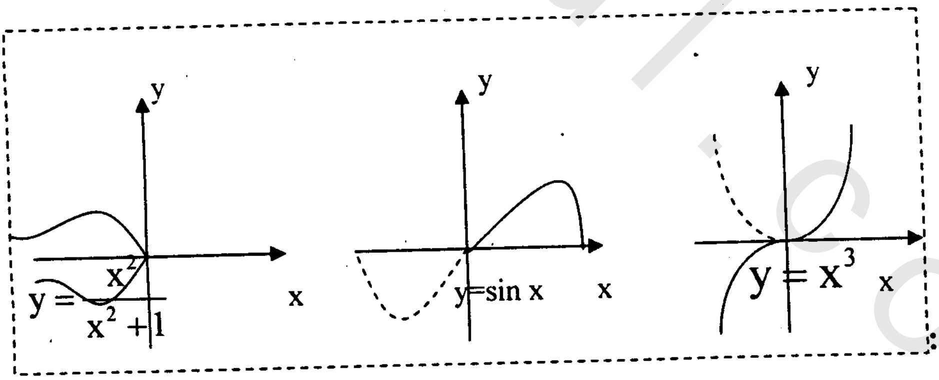
(I) اذا كانت الدالة زوجية (أى أن $f(x) = f(-x)$) ، فان منحنى الدالة

f يكون متماثلا بالنسبة للمحور الصادى. وفى هذه الحالة يكفى ـسم منحنى هذه الدالة ان نرسم الجزء الواقع فى الفترة $0 \le x$ ثم بانعكاس فى المحور الصادى نكمل شكل المنحنى . انظر الاشكال التالية:



(ii) اذا كانت الدالة فردية (اى ان $f(-x) = -f(x)$) على نطاق الدالة ، فان منحنى الدالة f يكون متماثلا بالنسبة لنقطة الاصل. ولرسم هذا الشكل نقوم باجراء نصف دورة حول نقطة الاصل أو بانعكــاس فــى محور الصادات يليه انعكاس فى محور السينات).

انظر الاشكال التالية



III. نقط التقاطع مع المحورين: (اصفار الدالة)

بوضع $x = 0$ فى معادلة المنحنى $y = f(x)$ نحصل على نقط التقاطع مع المحور الصادى .

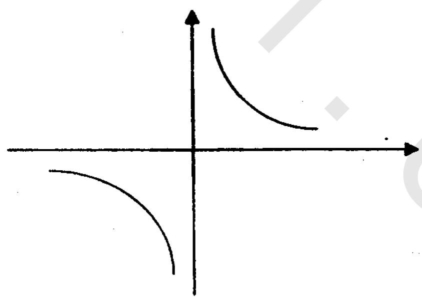
أما اذا وضعنا $y = 0$ فان الجذور الحقيقية للمعادلة $f(x) = 0$ تعيين المواضع التى يقطع فيها المنحنى محور السينات .

IV . نعين النقط العظمى المحلية والصغرى المحلية ونقط الانقلاب ان وجدت .

V. ندرس تقعر منحنى الدالة

VI. الخطوط التقريبية Asymptote Lines

لنعتبر الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمعرفة على $R - \{0\}$ من الواضح ان $y \to 0$ عندما $x \to \pm\infty$ اى ان منحنى الدالة يقترب من المحور السينى كلما زادت قيمة $|x|$ ، لذلك نقول ان المستقيم $y = 0$ هو خط تقربى لهذا المنحنى ، وبالتحديد هو خط تقربى افقى .



كذلك نلاحظ ان :

$$y = \frac{1}{x} \to \infty \quad \text{as} \quad x \to 0+$$

$$y = \frac{1}{x} \to -\infty \quad \text{as} \quad x \to 0-$$

أى أن منحنى الدالة يقترب من المحور الصادى عندما تقترب x من الصفر ، فنقول أن المستقيم $x = 0$ هو خط تقربى راسى لهذا المنحنى.

(i)وبصفة عامة فان المستقيم $y = c$ يكون **خطا تقريبيا أفقيا** **horizontal asymptote** **اذا كانت** :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

(ii) ويكون المستقيم $x = k$ **خطا تقريبيا رأسيا** لمنحنى الدالة **$y = f(x)$**

vertical asymptote اذا كانت :

$$\lim_{x\to k} f(x) = \infty$$

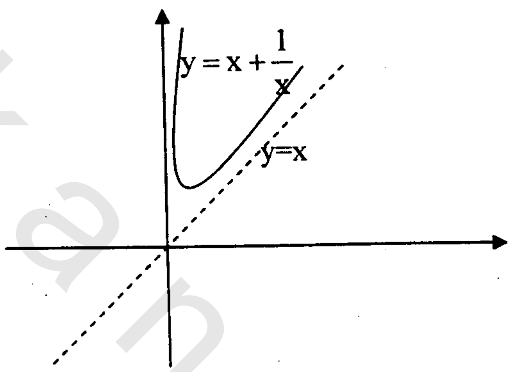
(iii) **خط تقريبى مائل** **Inclined asymptote** تكون معادلته على الصورة **$y = ax + b$** وهو المستقيم الذى يقترب منه منحنى الدالة $y = f(x)$ كلما ابتعدنا عن نقطة الاصل فى اتجاه احد طرفى المستقيم (او كليهما) ومثال ذلك الدالة المعرفة على الفترة $]0,\infty[$

$$\because \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

فان الدالة $y = x + \frac{1}{x}$

تقترب من قيمة الدالة الخطية $\varphi(x) = x$ مع الزيادة فى قيمة x . وعليه

فان $y = x$ خط تقريبى (مائل) للدالة $y = x + \frac{1}{x}$ كما هو مبين بالشكل التالى:



امثلة محلولة Solved Problems

<u>**مثال**</u> :ارسم منحنى الدالة $f(x) = |x|(x + 3)$ على الفترة [-4, 2] .

<u>**الحـل**</u> : I. النطاق = [-4, 2] .

II. الدالة f غير فردية وغير زوجية ولذلك فهى غير متماثلة .

III. بوضع $x = 0$ فان $y = 0$ أى أن المنحنى يمر بالنقطة (0, 0) ، بوضع $y = 0$ يكون.

$$|x|(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -3$$

وبالتالى فان (0 ,3-) هى نقطة تقاطع المنحنى مع المحور السينى .

IV . النقط العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب .

$$f(x)=\begin{cases} x(x+3), & \text{if } 0 \le x \le 2 \\ -x(x+3), & \text{if } -4 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+3, & \text{if } 0 \le x \le 2 \\ -2x-3, & \text{if } -4 \le x \le 0 \\ \text{unknown if} & x = \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 2, & \text{if } 0 \le x \le 2 \\ -2, & \text{if } -4 \le x \le 0 \\ \text{unknown if} & x = \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \quad , \quad f''(-\frac{3}{2})=-2<0$$

أى أن النقطة $(-\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2}))=(-\frac{3}{2},\frac{9}{4})$ نقطة عظمى محلية $f'(0)$ غير معرفة

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \Rightarrow f'(x)<0 \\ x>0 \Rightarrow f'(x)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

نقطة صغرى محلية (0, 0) وباتالى$f`(0)$ غير معرفة .

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \Rightarrow f''(x)<0 \\ x>0 \Rightarrow f''(x)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

نقطة انقلاب (0, 0) .

V. بحث تقعر المنحنى :

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in]0,2]$$

المنحنى مقعر لاعلى $\Leftarrow$ فى هذه الفترة

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in]-4,2]$$

المنحنى مقعر لاسفل $\Leftarrow$ فى هذه الفترة

VI. لايوجد خطوط تقريبية للدالة المعطاه .

<u>مثال</u> : ارسم منحنى الدالة $y = \frac{x - x^2}{x+1}$

<u>الحــل</u> : بالقسمة نحصل على ان الدالة هى :

$$y = (-x-2) - \frac{2}{x-1}$$

I. نطاق الدالة هو $R-\{-1\}$

II. الدالة غير متماثلة (لماذا ؟)

III. $x = 0 \Rightarrow y = 0$

أى أن المنحنى يمر بنقطة الاصل (0, 0) .

$$y = 0 \Rightarrow x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

أى أن المنحنى يقطع المحور السينى فى النقطة (1, 0)

IV . نوجد اولا $y`, y``$:

$$y' = \frac{(x+1)(1-2x)-(x-x^2).1}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{(x+1)^2(-2x-2)-(-x^2-2x+1)2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-4}{(x+1)^3}\, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x \approx -1 = 14$$

$$\Leftrightarrow x \approx -24 \vee x \approx 0.4$$

$$x = 0.4 \Rightarrow y'(0.4) = y''_{x=0.4} < 0$$

$\Rightarrow$ نقطة عظمى محلية (0.4, 0.2)

$f`(-2.4) = y``x = -2.4 > 0$ $x = -2.4$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ نقطة صغرى محلية (-2.4, 5.2)

- من الواضح انه لايوجد x تحقق المعادلـــة $f`(x) = y`` = 0$ ولـــذلك لاتوجد نقط انقلاب .

V. **تقعر المنحنى** : من الجدول التالى تتضح مناطق التقعر .

التقعر $f`(x)$	الفترة
للاعلى + upward للاسفل - downward	$]-\infty,-1[$ $]1,\infty[$

VI. الخطوط التقريبية

(I) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

أى انه لا توجد خطوط تقريبية افقية للمنحنى

(ii) الدالة $x = -1$ f ydv luvtm uk] أى أن $x = -1$ خط تقربى رأسى للدالة .

(iii) حيث أن $x \to \pm\infty$ as $\frac{2}{x+1} \to 0$ فـان $y = -x + 2$ خـط تقربى مائل للمنحنى .

* * *