حلول مسائل الإستاتيكا

ذات الأرقام الفردية

قال الفلاسفة ..

لاتوجد مشكلة بدون حل

لكن توجد مشكلة بدون فهم

1

(a) نفرض أن

$$\vec{B} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = \left(6\hat{i} + 12\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \left(-2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}\right)$$

$$= 4\hat{i} + 16\hat{j} + 9\hat{k}$$

إذن فإن

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{16 + 256 + 81} = \sqrt{353}$$

أيضاً نفرض أن

$$\vec{A} = \vec{a} + 3\vec{b} = \left(2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}\right) + \left(3\hat{i} - 6\hat{j} - 9\hat{k}\right)$$

$$= 5\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

إذن فإن

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{25 + 4 + 64} = \sqrt{93}$$

(b) نفرض أن

$$\vec{C} = 3\vec{a} + \vec{b} = \left(6\hat{i} + 12\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \left(\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}\right)$$

$$= 7\hat{i} + 10\hat{j}$$

وبالتالي فإن

$$\hat{C} = \frac{7\hat{i} + 10\hat{j}}{\sqrt{49 + 100}} = \frac{7}{\sqrt{149}}\hat{i} + \frac{10}{\sqrt{149}}\hat{j}$$

(c) نفرض أن الزاوية بين المتجهين $\vec{a}\,,\vec{b}$ هي θ، ويمكن أن نحصل عليها من العلاقة (1.23) حيث نجد أن

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\frac{2-8-3}{\sqrt{21}\sqrt{14}}=\frac{-9}{7\sqrt{6}}$$

إذن

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-9}{7\sqrt{6}}\right)$$

(d) بما أنه من (1.37) لدينا

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-7\neq 0$$

إذن فإن المتجهات الثلاثة $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ لا تقع في مستوى أفقي واحد.

(e) بما أن

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=-10\hat{i}+7\hat{j}-8\hat{k}$$

إذن فإن

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -10 & 7 & -8\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=29\hat{i}+38\hat{j}-3\hat{k}$$

أيضاً لدينا

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\hat{i} - \hat{k}$$

وبالتالي فإن

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - \hat{j} + 12\hat{k}$$

وهكذا نجد أن

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}$$

3

نفرض أن الزاوية بين المتجهين $\vec{a}\,,\vec{b}$ هي $\theta = \frac{\pi}{3}$، إذن من (1.23) نجد أن

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) \cdot \left(m\hat{i} - \hat{k}\right)}{\sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}}$$

أو

$$\frac{1}{2} = \frac{m - 1}{\sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{m^2 - 2m + 1}{3\left(m^2 + 1\right)} \Rightarrow$$

$$m^2 - 8m + 1 = 0$$

إذن

$$m_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-4}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

وتكون m المطلوبة هي $m = 4 + \sqrt{15}$.

5

بما أن

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= a^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - b^2$$

وبما أن

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

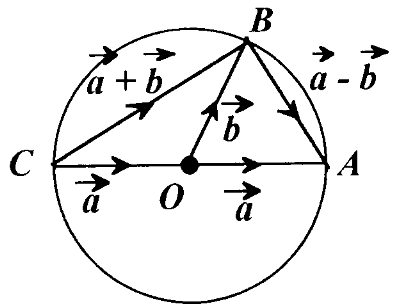
إذن، عندما $a = b$ فإن

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = a^2 - b^2 = 0$$

وهذا يعني أن المتجهين

$$\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \text{ and } \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

متعامدان. انظر شكل (1.20).



شكل 1.20

7

نفرض أن

$$\vec{a}=\left(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\right),\quad \vec{b}=\left(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\right)$$

إذن فإن

$$\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x\right)\hat{i}+\left(a_y-b_y\right)\hat{j}+\left(a_z-b_z\right)\hat{k}$$

وأيضاً

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x\right)\hat{i}+\left(a_y+b_y\right)\hat{j}+\left(a_z+b_z\right)\hat{k}$$

وبالتالي فإن

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=a_x{}^2-b_x{}^2+a_y{}^2-b_y{}^2+a_z{}^2$$

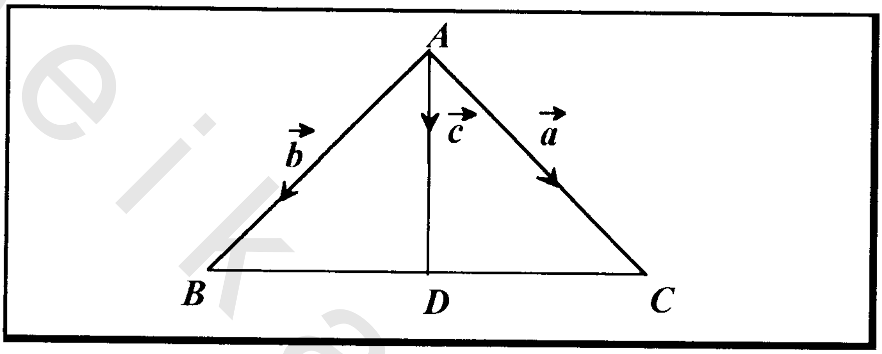
$$-b_z{}^2=\left(a_x{}^2+a_y{}^2+a^2{}_z\right)-\left(b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2\right)$$

وهكذا نجد أن

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=a^2-b^2$$

انظر شكل (1.21).

شكل 1.21



أيضاً، بما أن $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b},\quad \vec{c}+\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}$

إذن

$$\vec{c}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\quad\Rightarrow\quad\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

ويكون شرط تعامد المتجهين $\vec{d},\vec{c}$ هو أن $\vec{d}\cdot\vec{c}=0$. بما أن المثلث متساوي الساقين أي أن $a=b$، إذن

$$\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)=\frac{1}{2}0=0$$

9

لنرمز ـ أولاً ـ للمتجه الذي له نفس اتجاه المتجه $\vec{a}$ ويساوي ضعفه في المقدار بالرمز $\vec{A}$. كما نرمز للمتجه الذي له عكس اتجاه $\vec{a}$، ومقداره $\frac{1}{3}$ مقدار المتجه $\vec{a}$ بالرمز $\vec{B}$. إذن فإن

$$\vec{A} = (2a)\hat{a}, \quad \vec{B} = \left(\frac{1}{3}a\right)(-\hat{a})$$

نوجد مقدار المتجه $\vec{a}$، ومن ثم متجه الوحدة $\hat{a}$، فنجد أنه

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{16+25+9}} = \frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{k}$$

وبالتالي فإن

$$\vec{A} = (2a)\hat{a} = \left(2\cdot 5\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{k}\right)$$

$$= 8\hat{i} - 10\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\vec{B} = \left(\frac{1}{3}a\right)(-\hat{a}) = \frac{5\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} - \frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{k}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}\hat{i} + \frac{5}{3}\hat{j} - \hat{k}$$

11

باستخدام (1.18) نفرض أن المتجه المطلوب هو

$$\vec{a} = 2(\cos(\alpha))\hat{i} + (\cos(\beta))\hat{j} + (\cos(\gamma))\hat{k}$$

بما أن زوايا الاتجاه كلها متساوية، إذن فإن

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma)$$

عندئذٍ نجد من (1.16) أن

$$3\cos^2(\alpha) = 1 \;\Rightarrow\; \cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبما أنه، من المفترض أن تكون كل مركبات المتجه المطلوب موجبة، إذن فإن

$$\vec{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

13

المعادلة المتجهة هي

$$\vec{a} = t\,\vec{v} + \vec{a_0} = t\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{4}{3}\right) + (5, -6, 2)$$

إذن المعادلة البارامترية هي

$$x = \frac{1}{2}t + 5,\ y = 2t - 6,\ z = -\frac{4}{3}t + 2$$

والمعادلة القياسية هي

$$2x - 10 = \frac{y+6}{2} = \frac{-3z+6}{4}$$

15

من (1.54) نجد أن هذه المسافة هي h، حيث

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{(6 \times -5) + (-5 \times 3) + (8 \times 7) - 9}{\sqrt{(6)^2 + (-5)^2 + (8)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

17

لنرمز للخط المطلوب بالرمز l_1، ولنرمز للخط الذي معادلته: $x = t,\ y = -1,\ z = 3 + t$ بالرمز l_2. نفرض أن المعادلة المتجهة (المطلوبة) للخط l_1 الذي يمر بالنقطة $(-1, 3, 4)$، و يوازي الخط l_2 هي $\vec{a} = t_1 \vec{v_1} + \vec{a_0}$. أيضاً، بما أن المعادلة المتجهة للخط l_2 يمكن وضعها في الصورة الاتجاهية $\vec{b} = t_2 \vec{v_2} + \vec{b_0}$، أي في الصورة

$$\vec{b} = t_2(1,0,1) + (0,-1,3)$$

حيث نجد هنا أن $\vec{v_2} = (1,0,1)$. لكننا نجد من التعريف رقم (1.13) أن $\vec{l_2} \parallel \vec{l_1}$ إذا كان $\vec{v_2} \parallel \vec{v_1}$، أي إذا كان $\vec{v_1} = c\,\vec{v_2}$، حيث c أي عدد حقيقي. إذن فإن المعادلة الاتجاهية للخط l_1، والذي يمر بالنقطة $(-1,3,4)$ تصبح

$$\vec{a} = t(1,0,1) + (-1,3,4)$$

حيث $t = ct_1$ هو أي عدد حقيقي.

19

نوجد أولاً المعادلتين الاتجاهيتين للخطين $l_1,\ l_2$ فنجد أنهما على الترتيب

$$\vec{a} = t_1(-2,4,-1) + (-1,3,5)\ ;$$

$$\vec{b} = t_2(1,-1,1) + (-2,-2,2)$$

إذا تقاطع الخطان المستقيمان l_1, l_2 في نقطة ما فإن هذا يعني ـ رياضياً ـ أن

$$t_1(-2,4,-1) + (-1,3,5) = t_2(1,-1,1) + (-2,-2,2) \qquad \text{(i)}$$

وهذه المعادلة الاتجاهية (i) هي في واقع الأمر نظام مكون من ثلاثة معادلات في المجهولين t_1, t_2. وهذه المعادلات الثلاث يمكن الحصول عليها بمقارنة طرفي المعادلة الاتجاهية السابقة فنحصل على

$$-2t_1 - t_2 = -1;\ 4t_1 + t_2 = -5;\ -t_1 - t_2 = -3 \qquad \text{(ii)}$$

بحل أي معادلتين من النظام (ii) يمكن الحصول على البارامترين t_1, t_2، ثم يتم التعويض بهما في المعادلة الثالثة المتبقية فإذا تحققت كان النظام متوافقاً، مما يعني أن هناك نقطة تقاطع للمستقيمين. وإذا لم تتحقق هذه المعادلة الثالثة فإن هذا يعني أن النظام غير متوافق، وعندئذٍ فلا توجد نقط تقاطع ويكون الخطان متخالفين. بحل المعادلتين الأولى والثانية، أي المعادلتين $-2t_1 - t_2 = -1;\ 4t_1 + t_2 = -5$ حلاً آنياً *(Similtineously)* نجد أن

$$t_1 = -3,\ t_2 = 7$$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة الثالثة المتبقية $-t_1 - t_2 = -3$ نجد أنها لا تتحقق. وبالتالي فلا توجد نقطة تقاطع للخطين l_1, l_2. الآن ندرس متجهي الاتجاه للخطين المستقيمين المعطيين l_1, l_2 فإذا كانا غير متوازيين فإن الخطين l_1, l_2 يكونان متخالفين. بما أن

$$\vec{v_1} = (-2, 4, -1),\ \vec{v_2} = (1, -1, 1)$$

وهما غير متعامدين، لأنه، بفرض أن الزاوية بينهما هي θ، فإننا نجد أن

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{v_1 v_2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{21}\sqrt{3}}\right) \neq 0$$

وغيرمتوازيين لأن $\vec{v_1} \neq c\,\vec{v_2}$ لأي عدد حقيقي c، إذن فإن الخطين l_1, l_2 خطان متخالفان.

21

الخط المستقيم يكون عمودياً على المستوى إذا كان متجه الاتجاه له، أي المتجه $\vec{v} = (-1, 3, 2)$ يوازي المتجه العمودي للمستوى وهو $\vec{n} = (1, -3, -2)$. بما أن

$$\vec{n} \wedge \vec{v} = \left(-\hat{i}, 3\hat{j}, 2\hat{k}\right) \wedge \left(\hat{i}, -3\hat{j}, -2\hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

إذن فإن الخط المستقيم المعطى عمودي على المستوى المعطى. للحصـول على نقطة تقاطعه مع هذا المستوى. نوجد - أولاً - المعـادلات البرامترية للخط المستقيم وهي

$$x = -t + 2,\ y = 3t + 1,\ z = 2t + 1$$

بالتعويض في معادلة المستوى نحصل على

$$(-t + 2) - 3(3t + 1) - 2(2t + 1) = 11 \ \Rightarrow\ t = -1$$

إذن نقطة التقاطع هي

$$(x, y, z) = (3, -2, -1)$$

****

1

إذا رمزنا لعزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة $P(4,4,6)$ بالرمز $\vec{M}_P$، فإننا نجد - من (2.9) - أن

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \left(\vec{a} \wedge \vec{F}\right)$$

حيث $\vec{M}_O$ هو عزم القوة $\vec{F}$ حول نقطة الأصل وهو منعدم هنا، بمعنى أن $\vec{M}_O = 0$، لأن القوة تؤثر في نقطة الأصل. أيضاً فإن

$$\vec{a} = \vec{OP} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$$

وبالتالي فإن

$$\vec{M}_P = -\vec{a} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -34\hat{i} + 10\hat{j} + 16\hat{k}$$

3

لنرمز للقوة المراد إيجاد عزمها بالرمز $\vec{F}$. من (1.18) نجد أن

$$\vec{F} = 4\left(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}\right)$$

أيضاً، من (2.9) نجد أن

$$\vec{M}_G = \vec{M}_O - \left(\vec{a} \wedge \vec{F}\right)$$

حيث

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 20\hat{i} - 20\hat{j} + 20\hat{k}$$

وبما أن

$$\vec{a} = \vec{OG} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

إذن

$$\vec{M}_G = \left(20\hat{i} - 20\hat{j} + 20\hat{k}\right) - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \left(20\hat{i} - 20\hat{j} + 20\hat{k}\right) - \left(44\hat{i} - 32\hat{j} + 8\hat{k}\right)$$

$$= -24\hat{i} + 12\hat{j} + 12\hat{k}$$

وبطريقة أخرى مباشرة نجد أن

$$\vec{M}_G = \vec{GP} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = -24\hat{i} + 12\hat{j} + 12\hat{k}$$

5

إذا رمزنا لهذا المحور بالرمز L، فإن متجه عزم القوة $\vec{E}$ حول هذا المحور L نجده من (2.15) في الصورة

$$\vec{M}_L = \left|\vec{M}_L\right| \hat{L}$$

حيث $\hat{L}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{B}$، أي أن

$$\hat{L} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{k}}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{k}$$

وبما أن هذا المحور يمر بنقطة الأصل $O(0,0,0)$، والقوة تمر بالنقطة $(1,2,1)$، إذن فإن $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$، وبالتالي نجد ـ من (2.14) أن

$$\left|\vec{M}_L\right| = \hat{L} \cdot \vec{M}_O = \hat{L} \cdot \left(\vec{r} \wedge \vec{E}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6}{\sqrt{13}} - \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

وهكذا نجد أن متجه عزم القوة $\vec{E}$ حول المحور L هو المتجه

$$\vec{M}_L = |\vec{M}_L|\,\hat{L} = \frac{-3}{\sqrt{13}}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{k}\right) = \frac{-6}{13}\hat{i} + \frac{9}{13}\hat{k}$$

7

في هذا المثال لدينا

$$\vec{F_1} = F\hat{i} + 0\hat{j} + 0\,\hat{k},\ \ \vec{F_2} = 0\,\hat{i} + 0\hat{j} + 2F\hat{k} \qquad \text{(i)}$$

بما أن النقطة $(0,0,0)$ تقع على خط عمل القوة $\vec{F_1}$، بينما تقع النقطة $(0,2,0)$ على خط عمل القوة $\vec{F_2}$، إذن فإن متجهي الموضع لهاتين النقطتين ـ على الترتيب ـ هما

$$\vec{r_1} = 0\,\hat{i} + 0\hat{j} + 0\,\hat{k},\ \ \vec{r_2} = 0\,\hat{i} + 2\hat{j} + 0\,\hat{k} \qquad \text{(ii)}$$

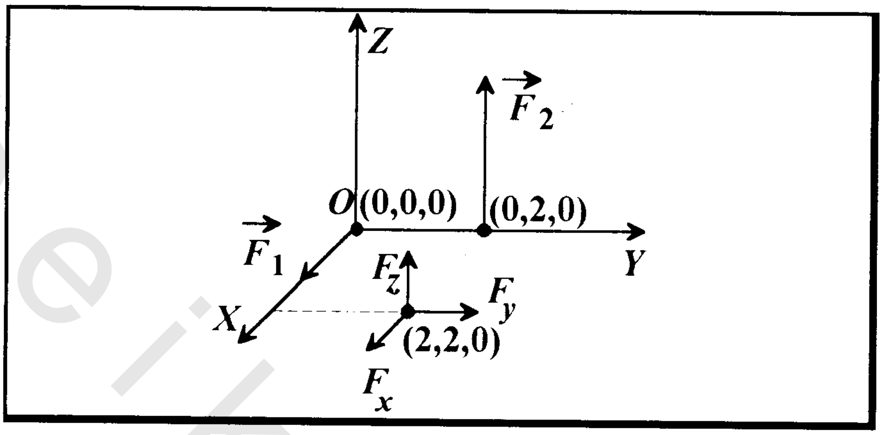
أيضاً فإن القوة المجهولة $\vec{F_3}$ يمكن تمثيلها في الفضاء ثلاثي الأبعاد في الصورة

$$\vec{F_3} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \qquad \text{(iii)}$$

وبما أن النقطة $(2,2,0)$ تقع على خط عمل القوة $\vec{F_3}$ إذن فإن متجه موضع هذه النقطة هو

$$\vec{F_3} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \qquad \text{(iv)}$$

انظر شكل (2.22).



شكل 2.22

لنفرض الآن أن فئة كل القوى تكافىء عند O قوة وحيدة (المحصلة) $\vec{R}$ وازدواج محصل $\vec{Q}_0$، إذن فإن هذه القوة الوحيدة المحصلة هي

$$\vec{R} = (F + F_x)\hat{i} + (F_y)\hat{j} + (2F + F_z)\hat{k} \qquad \text{(v)}$$

وبالتالي فإن

$$X = F + F_x \;\; ; \;\; Y = F_y \;\; ; \;\; Z = 2F + F_z \qquad \text{(vi)}$$

أما الازدواج المحصل فمتجه عزمه هو

$$\vec{Q}_0 = \sum_{i=1}^{3} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (4F + 2F_z)\hat{i} - (2F_z)\hat{j} + (2F_y - 2F_x)\hat{k} \qquad \text{(vii)}$$

وإذا فرضنا أن $\vec{Q_0} = L\hat{i} + M\hat{j} + N\hat{k}$، عندئذٍ فإننا نحصل على الثلاث معادلات

$$L = 4F + 2F_z,\ M = -2F_z,\ N = 2F_y - 2F_x \qquad \text{(viii)}$$

وبالتعويض من (vi), (viii) في (2.46) نجد أن الشرط اللازم لكي تؤول القوة المحصلة والازدواج المحصل إلى قوة وحيدة هو

$$(4F + 2F_z)(F + F_x) - 2F_zF_y$$
$$+ (2F_y - 2F_x)(2F + F_z) = 0$$

أو (بعد الاختصار)

$$2F + 2F_y + F_z = 0 \qquad \text{(ix)}$$

وللحصول على أقل قيمة ممكنة للقوة $\vec{F_3}$، بحيث تؤول كل القوى المعطاة إلى قوة وحيدة، نجد من (i) أن

$$(F_3)^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \qquad \text{(x)}$$

إذن، وبالتعويض عن قيمة F_z من (ix) في (i) نحصل على

$$(F_3)^2 = F_x^2 + F_y^2 + (2F + 2F_y)^2$$

نلاحظ هنا أن القوة F_3 تعتمد على المركبات P_x, P_y فقط، إذن ولكي تكون القوة F_3 أقل ما يمكن فيجب أن نبحث عن P_x, P_y التي تحقق المعادلات

$$\frac{\partial F_3}{\partial F_x} = 0, \quad \frac{\partial F_3}{\partial F_y} = 0$$

وبالتالي فإن

$$2F_3 \frac{\partial F_3}{\partial F_x} = 2F_x + 2(2F + 2F_y) \times 0 = 2F_x = 0$$

ومنها نجد أن

$$F_x = 0 \qquad \text{(xi)}$$

وأيضا فإن

$$2F_3 \frac{\partial F_3}{\partial F_y} = 2F_y + 2(2F + 2F_y)2 = 10F_y + 8F = 0$$

ومنها نجد أن

$$F_y = \frac{-4F}{5} \qquad \text{(xii)}$$

وبالتعويض عن F_y من المعادلة رقم (xii) في المعادلة (ix) نحصل على

$$F_z = \frac{-2F}{5} \tag{xiii}$$

وبالتعويض في (x) من (xi), (xii), (xiii) نحصل على أقل مقدار للقوة $\vec{F_3}$، ونجد أنه يساوي

$$F_3 = \sqrt{\frac{16F^2}{25} + \frac{4F^2}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} F$$

9

نحاول اختزال فئة القوى المعطاة إلى قوة $\vec{R}$ وازدواج $\vec{Q_0}$، عند نقطة الأصل O. بما أن

$$\vec{F_1} = \hat{j},\ \vec{F_2} = \hat{i},\ \vec{F_3} = \hat{k} \tag{i}$$

إذن فإن

$$\vec{R} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \tag{ii}$$

وعندئذٍ فإن

$$X = 1,\ Y = 1,\ Z = 1 \tag{iii}$$

أيضاً فإننا نجد ـ باستخدام (2.28) - (2.25) ,(2.19) ـ أن الازدواج المحصل $\vec{Q_0}$ هو

$$\vec{Q_0} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{j} \qquad \text{(iv)}$$

إذن فإن

$$L = 0,\ M = -1,\ N = 0 \qquad \text{(v)}$$

واضح ـ طبعاً ـ أن الزاوية بين $\vec{R}$ والازدواج $\vec{Q_0}$ ليست قائمة وبالتالي فإن فئة القوى لايمكن اختزالها إلى قوة مفردة. لكن، على أية حال سوف نختزلها إلى لولبية. من المعادلة (iii) نجد أن شدة اللولبية هو المقدار

$$R = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

أيضاً، من المعادلة (2.61) ـ مع الأخذ في الاعتبار المعادلتين (iv), (ii) ـ نجد أن عزم اللولبية هو المقدار

$$W = \frac{\vec{R} \cdot \vec{Q_O}}{R} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \qquad \text{(vi)}$$

أما خطوة اللولبية فنجدها ـ طبقاً للمعادلة (2.59) ـ في الصورة

$$h = \frac{-1}{3} \qquad \text{(vii)}$$

هذا، ولتعيين معادلتي خط عمل المحور المركزي (خط عمل القوة $\vec{R}$) نوجد ـ أولاً ـ احداثيات أية نقطة (x, y, z) على هذا الخط باستخدام المعادلات (2.67), (vi), (viii)، حيث نجد أن

$$x = \frac{1}{3},\ y = 0,\ z = \frac{-1}{3}$$

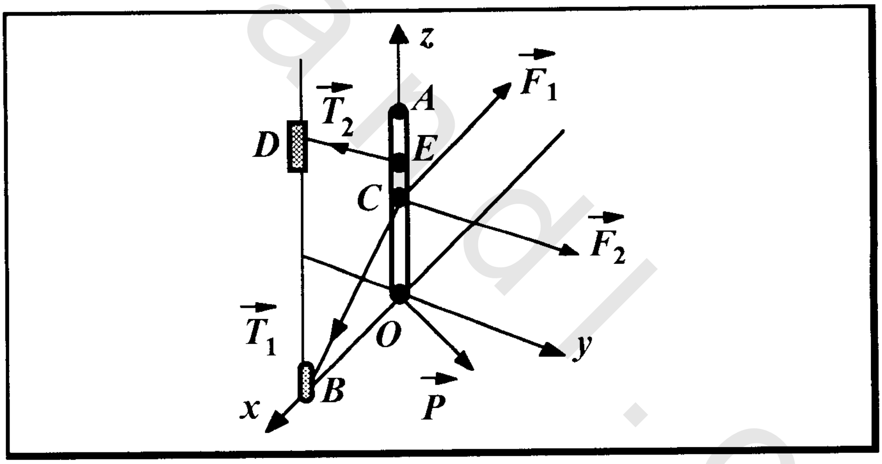
وهكذا نجد أن المعادلة القياسية للمحور المركزي للولبية هي

$$\frac{3\tilde{x}+1}{3} = \frac{\tilde{y}}{1} = \frac{3\tilde{z}-1}{3}$$

حيث $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ هي أية نقطة مجهولة على خط عمل المحور المركزي.

11

يمكن تلخيص معطيات المسألة في شكل (2. 23).



شكل 2.23

نفرض أن قوى الشد في الكابلين CB, DE هما $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ على الترتيب، وأن رد فعل المفصل عند O هو القوة $\vec{P}$ المجهولة في المقدار والاتجاه، إذن فإن القوى المؤثرة على الذراع تصبح

إذن القوى الخمس المؤثرة على الذراع هي

$$\vec{F_1} = -F\hat{i}, \ \vec{F_2} = 2F\hat{j}, \ \vec{T_2} = -T_2\hat{j}, \ \vec{P};$$

$$\vec{T_1} = T_1\hat{T}_1 = \frac{T_1}{\sqrt{2}}\left(\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}\right)$$

حيث

$$\hat{T}_1 = \hat{CB} = \frac{5\hat{i} + 0\hat{j} - 5\hat{k}}{5\sqrt{2}} = \frac{\hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{2}}$$

من المناسب أن نوجد متجه العزم المحصل أو مجموع متجهات عزوم القوى حول نقطة الأصل O لأن هذا يعني تلاشي متجه عزم القوة المجهولة $\vec{P}$ التي تمر بالنقطة O، إذن فإن

$$\vec{Q_O} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ -F & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2F & 0 \end{vmatrix} + \frac{T_1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & -T_2 & 0 \end{vmatrix} = -5F\hat{j} - 10F\hat{i} + \frac{T_1}{\sqrt{2}}\left(5\hat{j}\right) + 7T_2\hat{i}$$

$$= \left(-10F + 7T_2\right)\hat{i} + \left(\frac{5T_1}{\sqrt{2}} - 5F\right)\hat{j}$$

وبالتالي فإن

$$L = -10F + 7T_2,\ M = \frac{5T_1}{\sqrt{2}} - 5F$$

وبما أن المجموعة متزنة، إذن، فإن المركبتين L, M يجب أن تتلاشيا، إذن فإن

$$-10F + 7T_2 = 0,\ \frac{5T_1}{\sqrt{2}} - 5F = 0$$

وبحذف F من هاتين المعادلتين نجد أن

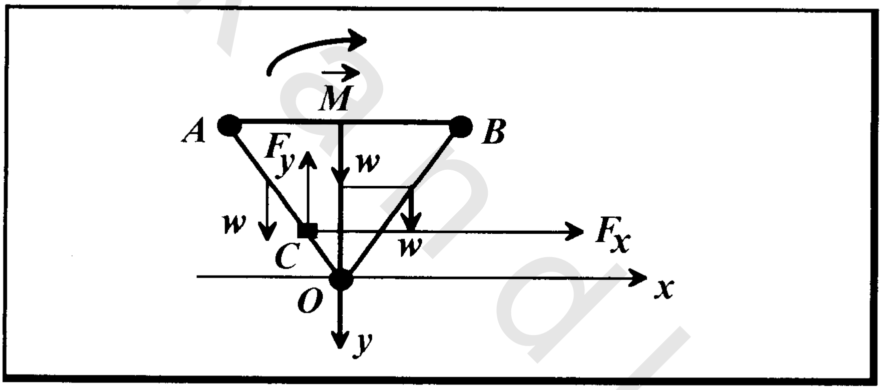
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

****

1

لحل هذا المثال نتبع خطوتين؛ الخطوة الأولى تختص بدراسة حالة اتزان الهيكل المكون من القضبان الثلاثة ككل. الخطوة الثانية تختص بدراسة اتزان كل قضيب من قضبان الهيكل على حدة. نفرض ـ أولاً ـ أن القوة والازدواج اللازمين للاتزان هما على الترتيب $\vec{F}, \vec{M}$. ولنفرض أن l هو طول ضلع المثلث، ولنختر الاتجاهات الموجبة لمحوري الإحداثيات الكارتيزية x, y كما هو في شكل (3.6).

شكل 3.6



الآن يتم تحليل القوة $\vec{F}$ إلى المركبتين F_x, F_y في اتجاه المحورين x, y، وبما أن وزن كل قضيب يؤثر في منتصفه والمجموعة متزنة، إذاً من (2.70) نجد أن مركبات محصلة القوة في اتجاهي المحورين x, y تتلاشى، أي أن

$$F_x = 0, \;\; 3w - F_y = 0 \;\; \Rightarrow \;\; F_y = 3w \qquad \text{(i)}$$

إذن القوة اللازمة للتثبيت مقدارها

$$F=\sqrt{(F_x)^2+(F_y)^2}=3w \qquad \text{(ii)}$$

أيضاً من (2.70) فإن المجموع الجبري لعزوم كل القوى حول أية نقطة في مستوى القوى، مضافاً إليها الازدواج M يجب أن يتلاشى، إذن، بأخذ العزوم حول نقطة C نجد أن

$$-M-w\left(\frac{l}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)-w\left(\frac{l}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{l}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$+w\left(\frac{l}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=0$$

أو

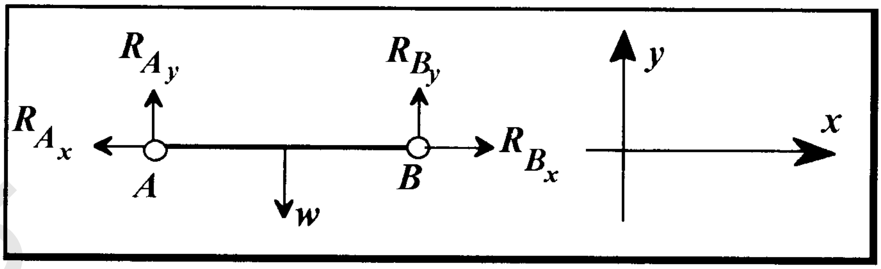
$$-M-\frac{wl}{8}-w\left(\frac{l}{4}+\frac{l}{8}\right)+\frac{wl}{8}=0$$

حيث نحصل منها على

$$M=\frac{3wl}{8} \qquad \text{(iii)}$$

الآن ندرس اتزان كل قضيب على حدة. لنفرض اتجاهات ردود الأفعال كما هو مبين في شكل (3.7)، مع ملاحظة أنه إذا حصلنا على رد فعل بإشارة سالبة يكون اتجاهه عكس الاتجاه المفروض.

شكل 3.7



بدراسة اتزان القضيب AB على حدة، نجد ـ من تلاشي محصلة القوى المؤثرة عليه ـ أن

$$R_{B_x} = R_{A_x}\ ,\ R_{A_y} + R_{B_y} - w = 0 \tag{iv}$$

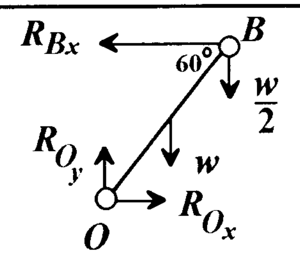
وبأخذ عزوم القوى حول نقطة A نحصل على

$$R_{B_y} l - w\frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_{B_y} = \frac{w}{2} \tag{v}$$

وبالتعويض في (iv) نحصل على

$$R_{A_y} = \frac{w}{2} \tag{vi}$$

الآن ندرس اتزان القضيب BO، مستخدمين في ذلك المعلومات التي حصلنا عليها من دراسة القضيب AB. انظر شكل (3.8).



شكل 3.8

بسبب أن القضيب BO متزن فإن محصلة القوى في اتجاه المحورين x, y تساوي الصفر، إذن

$$R_{O_x} = R_{B_x}\,, \quad -\frac{w}{2} - w + R_{O_y} = 0 \;\Rightarrow\; R_{O_y} = \frac{3w}{2} \qquad \text{(vii)}$$

للحصول على مركبة رد الفعل R_{O_x}، نأخذ عزوم القـوى حـول نقطـة B فنجد أن

$$w\frac{l}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - R_{O_y}\cdot l\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + R_{O_x}\cdot l\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

أو

$$w\frac{l}{4} - \frac{3w}{2}\cdot\frac{l}{2} + R_{O_x}\cdot l\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

إذن

$$R_{O_x} = \frac{w}{\sqrt{3}} \qquad \text{(viii)}$$

وبالتالي نجد من (vii), (viii) أن مقدار رد الفعل عند المفصل O هو

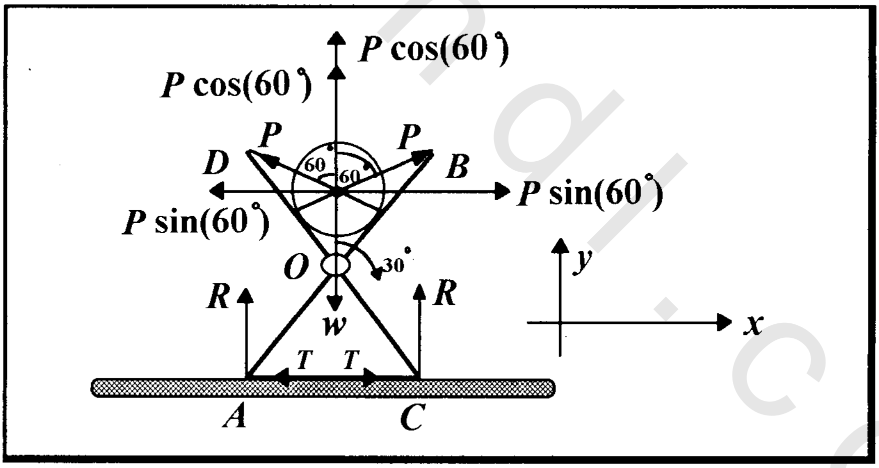
$$R_O = \sqrt{\frac{w^2}{3} + \frac{9w^2}{4}} = \sqrt{\frac{31}{12}}w$$

3

أولاً يجب إهمال قوة وزن القضيبين وذلك لأنهما قضيبان خفيفان.

وكذلك يجب مراعاة أن $\vec{Q}$ وهو رد فعل المفصل عند O عمودي على خط التماثل. ولنفرض أن الشد في الخيط هو $\vec{T}$، كما نفرض أن رد فعل القرص الدائري هو $\vec{P}$، ورد فعل القضيب على المنضدة الأفقية هو $\vec{R}$. انظر شكل (3.9).

شكل 3.9



بدراسة اتزان الهيكل ككل نجد أن

$$2R - w = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{w}{2}$$

وبدراسة اتزان القرص نجد أن

$$2P\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - w = 0 \quad \Rightarrow \quad P = w$$

وبدراسة اتزان القضيب AB على حدة، نجد أنه واقـع تحت تأثير قـوة ضغط القرص (القوة P) عليه، والشد T في الخيـط المثبـت فيـه، عـلاوة على رد فعل المنضدة R. بأخذ عزوم القوى حول نقطة O نحصل على

$$T \times \frac{l}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - R \times \frac{l}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - P \times r\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

أو

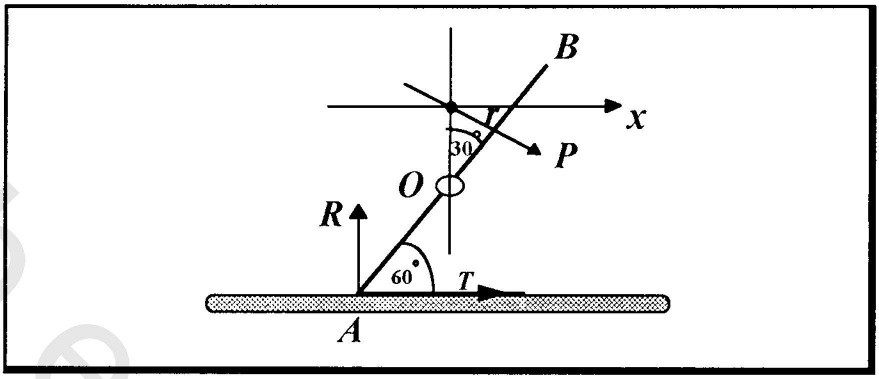
$$T \times \frac{l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - R \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2} - P \times r\sqrt{3} = 0$$

حيث نجد ـ باستخدام التعويضات $P = R = w$ ـ أن مقـدار الشـد في الخيط هو

$$T = \frac{w}{\sqrt{3}} + \frac{4wr}{l}$$

انظر شكل (3.10).

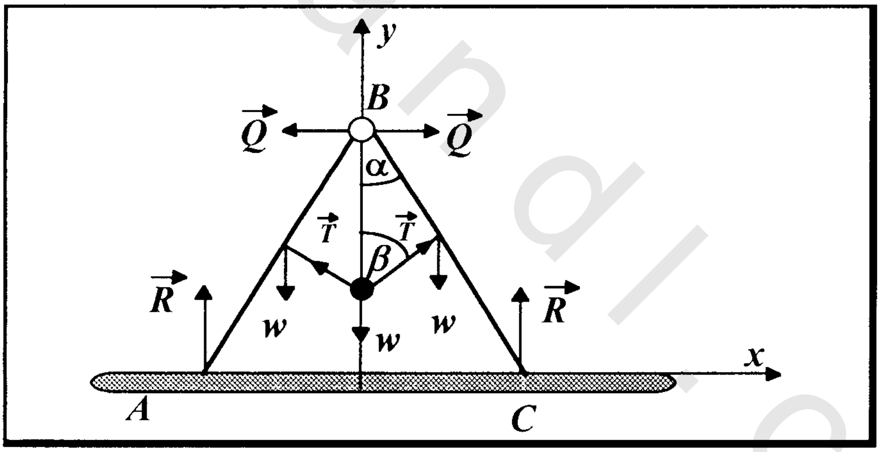
شكل 3.10



5

نفرض أن طول القضيب l، وأن وزنه w، ونختار الاتجاهات الموجبة للمحورين x, y كما في شكل (3.11).

شكل 3.11

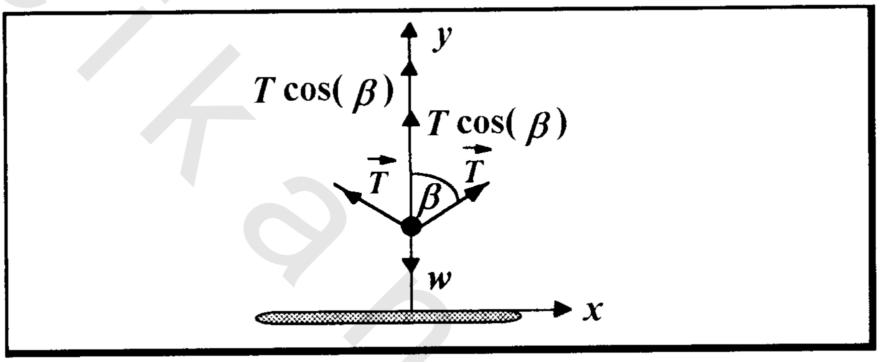


من شكل (3.11)، وبدراسة اتزان الهيكل المكون من القضيبين والكتلة المعلقة نجد أن

$$2R = 3w \;\Rightarrow\; R = \frac{3w}{2} \qquad \text{(i)}$$

وبالاطلاع على شكل (3.12)، ودراسة اتزان الكتلة المعلقة على حدة نجد أن

$$2T\cos(\beta) - w = 0 \;\Rightarrow\; T = \frac{w}{2\cos(\beta)} \qquad \text{(ii)}$$



شكل 3.12

أيضاً، وبتحليل قوة الشد ودراسة اتزان القضيب AB على حدة انظر شكل (3.13) نجد أن

$$Q = T\sin(\beta) \qquad \text{(iii)}$$

أما عزوم القوى المؤثرة على القضيب AB حول نقطة O فتعطي

$$Q\frac{l}{2}\cos(\alpha) - R\frac{l}{2}\sin(\alpha) = 0 \qquad \text{(iv)}$$

أو

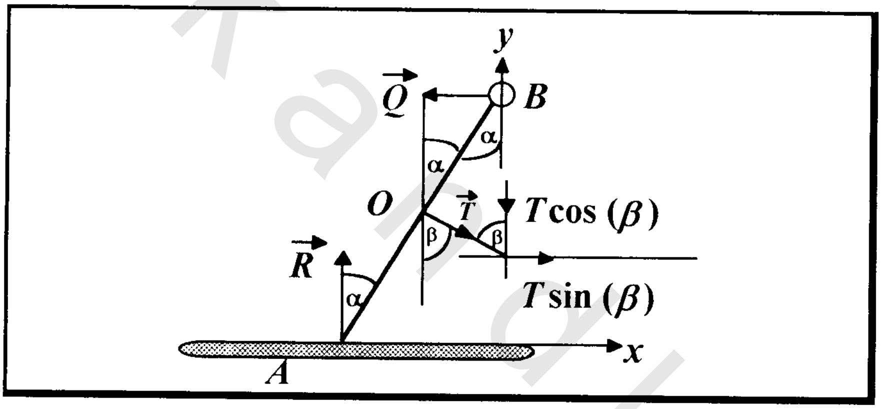
$$\tan(\alpha) = \frac{Q}{R} \qquad \text{(v)}$$

وبالتعويض من المعادلات (i), (ii), (iii) في المعادلة (v) نحصل على

$$\tan(\alpha) = \frac{T\sin(\beta)}{\frac{3w}{2}} = \frac{\frac{w}{2\cos(\beta)} \times \sin(\beta)}{\frac{3w}{2}} = \frac{\tan(\beta)}{3} \qquad \text{(vi)}$$

أو

$$\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)} = 3 \qquad \text{(vii)}$$

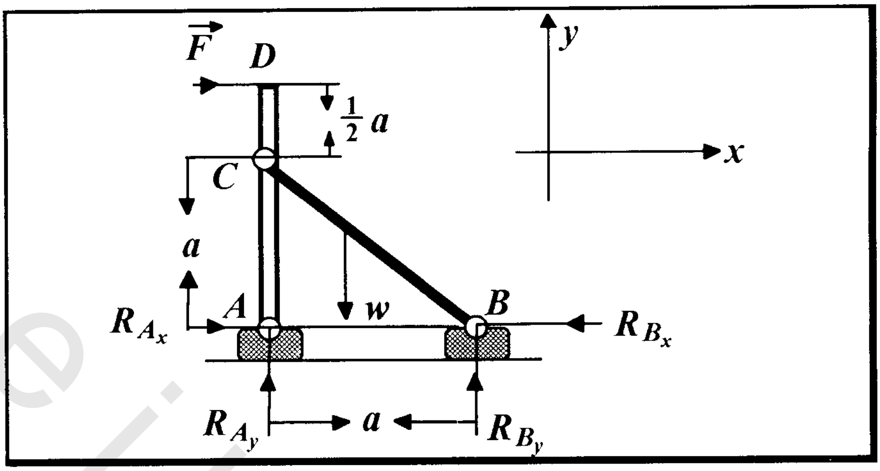


شكل 3.13

7

أولاً ندرس حالة اتزان الهيكل ككل. فنظهر ردود الأفعال عند المفصلات A, B، بينما لانظهرها عند المفصل C، حيث تلاشي ردود الأفعال بعضها البعض بين القضيبين $AD,\ BC$ عند المفصل C. انظر شكل (3.14).

شكل
3.14



بسبب اتزان الهيكل فإن محصلة القوى في اتجـاه المحوريـن $x,\ y$ يجـب أن تتلاشى، إذن

$$R_{A_x} + F - R_{B_x} = 0 \Rightarrow R_{A_x} - R_{B_x} = -\frac{w}{2}; \qquad \text{(i)}$$

$$R_{A_y} + R_{B_y} - w = 0 \Rightarrow R_{A_y} + R_{B_y} = w \qquad \text{(ii)}$$

وأيضاً نجد بسبب الاتزان أن عزوم القوى حول نقطة B ـ مثلاً ـ تساوي الصفر، أي أن

$$-F \times \frac{3}{2}a - R_{A_y} \times a + w \times \frac{a}{2} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

أو

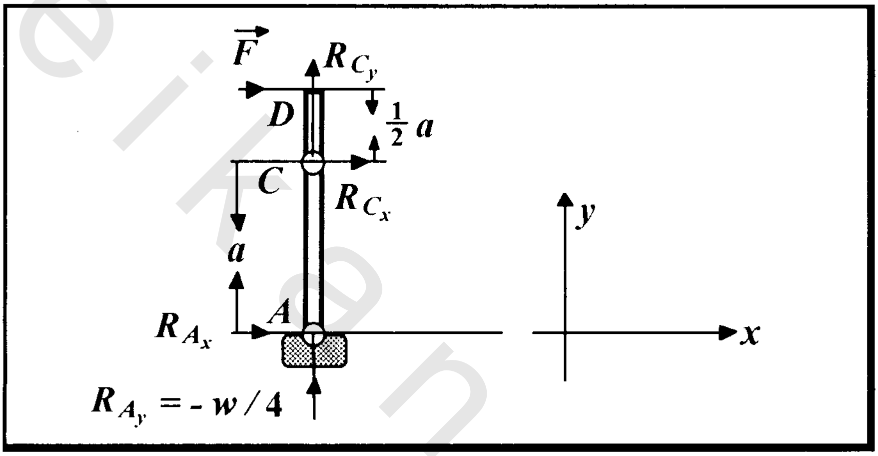
$$-\frac{3aw}{4} - aR_{A_y} + \frac{wa}{2} = 0 \Rightarrow R_{A_y} = -\frac{w}{4} \qquad \text{(iv)}$$

بالتعويض من (iv) في (ii) نجد أن

$$R_{B_y} = w + \frac{w}{4} = \frac{5w}{4} \qquad \text{(v)}$$

الآن ندرس اتزان القضيب AD على حدة، حيث يظهر في هذه الحالة رد فعل المفصل عند C نتيجة لضغط القضيب BC عليه، انظر شكل (3.15).

شكل 3.15



بسبب اتزان القضيب BD فإن محصلة القوى في اتجاه المحورين $x,\ y$ يجب أن تتلاشى، إذن

$$R_{A_x} + R_{C_x} + F = 0 \;\Rightarrow\; R_{A_x} + R_{C_x} = -\frac{w}{2}\ ; \qquad \text{(vi)}$$

$$R_{A_y} + R_{C_y} = 0 \;\Rightarrow\; R_{C_y} = -R_{A_y} = \frac{w}{4} \qquad \text{(vii)}$$

وأيضاً نجد بسبب اتزان القضيب AD أن عزوم القوى حول نقطة C ـ مثلاً ـ تساوي الصفر، أي أن

$$-F \times \frac{1}{2}a + R_{A_x} \times a = 0 \Rightarrow R_{A_x} = \frac{w}{4} \qquad \text{(viii)}$$

بالتعويض من (viii) في (vi) نحصل على

$$R_{C_x} = -\frac{3w}{4} \qquad \text{(ix)}$$

من (vii), (ix) نحصل على مقدار رد الفعل عند المفصل C في الصورة

$$\boxed{R_C = \sqrt{\frac{9w^2}{16} + \frac{w^2}{16}} = \frac{5w}{2\sqrt{10}}} \qquad \text{(x)}$$

من (iv), (viii) نحصل على مقدار رد الفعل عند المفصل C في الصورة

$$\boxed{R_A = \sqrt{\frac{w^2}{16} + \frac{w^2}{16}} = \frac{w}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{(xi)}$$

****

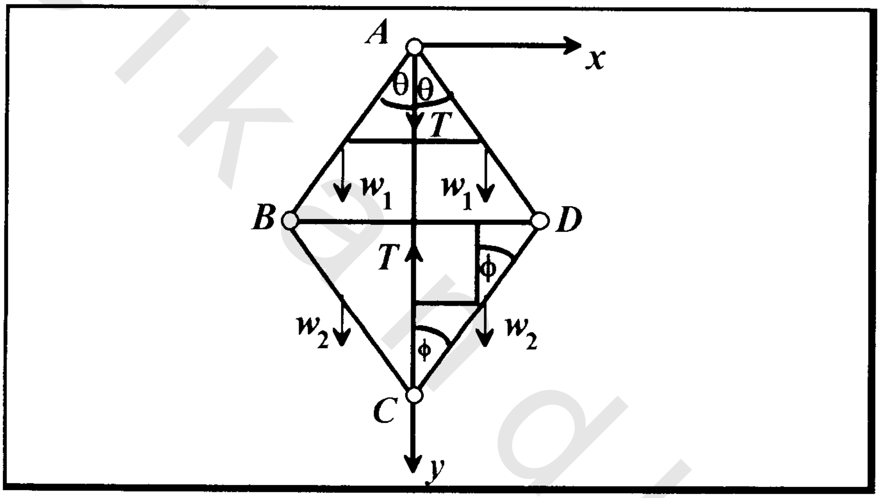
1

لنفرض أن

$$AB = AD = 2l_1 \ , \ \ BC = CD = 2l_2$$

ولنختر الاتجاهات الموجبة لمحوري الإحداثيات الكارتيزية x, y كما هو في شكل (4.5).

شكل 4.5



معادلة الشغل الافتراضي هي

$$2w_1 d\left(l_1 \cos(\theta)\right) + 2w_2 d\left(2l_1 \cos(\theta) + l_2 \cos(\phi)\right)$$

$$-Td\left(2l_1 \cos(\theta) + 2l_2 \cos(\phi)\right) = 0 \qquad \text{(i)}$$

أو

$$2w_1\left(-l_1 \sin(\theta) d\theta\right)$$

$$+2w_2\left(-2l_1\sin(\theta)d\theta-l_2\sin(\phi)d\phi\right)$$

$$-T\left(-2l_1\sin(\theta)d\theta-2l_2\sin(\phi)d\phi\right)=0 \qquad \text{(ii)}$$

وبما أنه من شكل (4.5) لدينا

$$2l_1\sin(\theta)=2l_2\sin(\phi) \Rightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{\sin(\phi)}{\sin(\theta)} \qquad \text{(iii)}$$

إذن، وبالتفاضل نجد أن

$$l_1\cos(\theta)d\theta=l_2\cos(\phi)d\phi$$

ومنها نجد أن

$$d\phi=\frac{l_1\cos(\theta)}{l_2\cos(\phi)}d\theta$$

$$=\frac{\sin(\phi)}{\sin(\theta)}\times\frac{\cos(\theta)}{\cos(\phi)}d\theta=\tan(\phi)\cot(\theta)d\theta \qquad \text{(iv)}$$

من (iii)، وباستبدال $l_1\sin(\theta)$ بدلاً من $l_2\sin(\phi)$ نحصل على

$$2w_1\left(-l_1\sin(\theta)d\theta\right)$$

$$+2w_2\left(-2l_1\sin(\theta)d\theta-l_1\sin(\theta)d\phi\right)$$

$$-T\left(-2l_1\sin(\theta)d\theta-2l_1\sin(\theta)d\phi\right)=0 \qquad \text{(v)}$$

وبالقسمة على $-2l_1\sin(\theta)$، إذن

$$w_1(d\theta)+2w_2(d\theta)+w_2(d\phi)=T(d\theta)+T(d\phi) \qquad \text{(vi)}$$

وبالتعويض من (iv) في (vi) نحصل على

$$w_1(d\theta)+2w_2(d\theta)+w_2\left(\tan(\phi)\cot(\theta)d\theta\right)$$
$$=T(d\theta)+T\left(\tan(\phi)\cot(\theta)d\theta\right) \qquad \text{(vii)}$$

وفي وضع الاتزان فإن

$$\phi+\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{2}-\theta \Rightarrow \tan(\phi)=\cot(\theta) \qquad \text{(viii)}$$

بالتعويض من (viii) في (vii)، والقسمة على $d\theta$ نحصل على

$$w_1+2w_2+w_2\cot^2(\theta)=T\left(1+\cot^2(\theta)\right) \qquad \text{(ix)}$$

وبالتالي فإن

$$w_1+2w_2+w_2\cot^2(\theta)=T\left(\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right) \qquad \text{(x)}$$

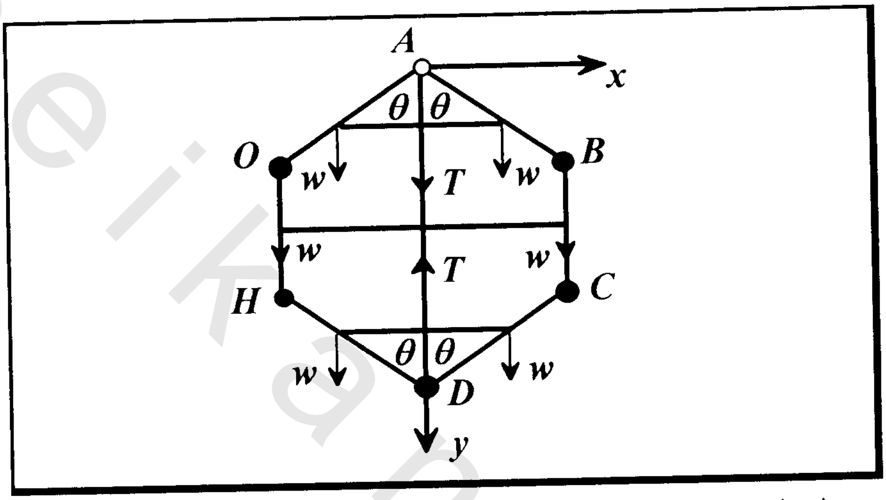
أو

$$T=\sin^2(\theta)w_1+2\sin^2(\theta)w_2+w_2\cos^2(\theta)$$
$$=(w_1+w_2)\sin^2(\theta)+w_2 \qquad \text{(xi)}$$

3

نفرض أن وزن أي قضيب هو w، وطوله $2h$. ولنختر الاتجاهات الموجبة لمحوري الإحداثيات الكارتيزية x, y كما هو في شكل (4.6).

شكل 4.6



معادلة الشغل الافتراضي هي

$$2wd\left(h\cos(\theta)\right) + 2wd\left(2h\cos(\theta) + h\right)$$

$$+2wd\left(3h\cos(\theta) + 2h\right) - Td\left(4h\cos(\theta) + 2h\right) = 0 \qquad \text{(i)}$$

بعد التفاضل، والقسمة على $d\theta$ نحصل على

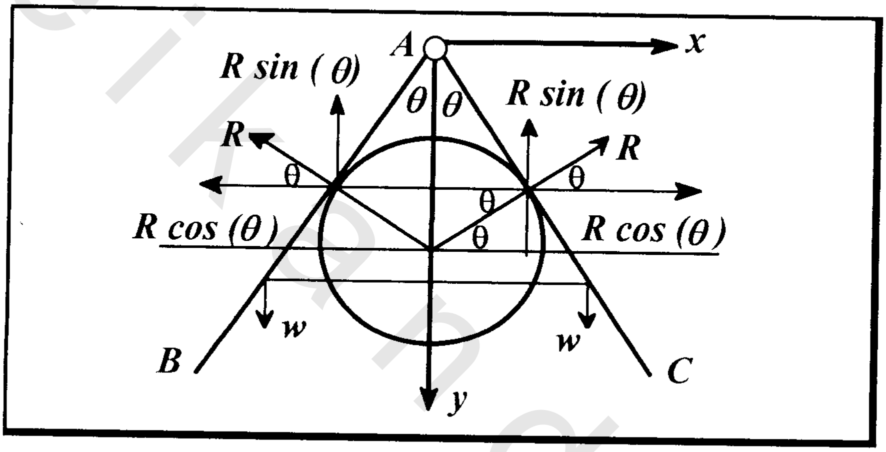
$$-12hw\sin(\theta) + 4hT\sin(\theta) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

وبالتالي فإن

$$4hT\sin(\theta) = 12wh\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad T = 3w \qquad \text{(iii)}$$

5

نفرض أن وزن أي قضيب هو w، وأن طوله $4a$، وبالتالي فإن نصف قطر السلك الدائري هو a. لنفرض أن رد فعل السلك الدائري هو R يكون عمودياً على القضبان. ولنختر الاتجاهات الموجبة لمحوري الإحداثيات الكارتيزية x, y كما هو في شكل (4.7).



شكل 4.7

معادلة الشغل الافتراضي هي

$$2wd\left(2a\cos(\theta)\right)+2R\cos(\theta)d\left(a\cos(\theta)\right)$$

$$-2R\sin(\theta)d\left(\frac{a\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}\right)=0 \qquad \text{(i)}$$

أو

$$-4aw\sin(\theta)d\theta-2aR\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta$$

$$-2aR\sin(\theta)\left(\frac{-2\sin^2(\theta)\cos(\theta)-\cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)}\right)d\theta=0 \qquad \text{(ii)}$$

وبالقسمة على $-2a\sin(\theta)d\theta$، إذن

$$2w+R\cos(\theta)+R\frac{-2\sin^2(\theta)\cos(\theta)-\cos^3(\theta)}{\sin^2(\theta)}=0 \qquad \text{(iii)}$$

وبما أنه، من دراسة حالة اتـزان الهيكـل المكـون مـن القضيبـين والسـلك الدائري ككل نجد أن

$$2R\sin(\theta)=2w \quad \Rightarrow \quad R=\frac{w}{\sin(\theta)} \qquad \text{(iv)}$$

إذن، بالتعويض من (iv) في (iii)، والاختصار يمكن أن نحصل على

$$2\sin^3(\theta)+\cos(\theta)\sin^2(\theta)$$
$$-2\sin^2(\theta)\cos(\theta)-\cos^3(\theta)=0 \qquad \text{(v)}$$

أو

$$2\sin^3(\theta)-\cos(\theta)\left(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right)=0$$

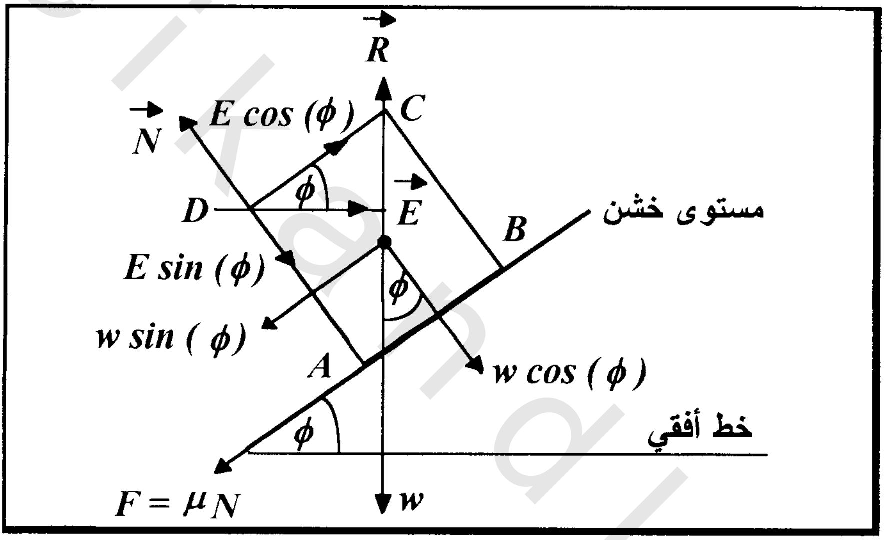
وهكذا نجد أن

$$2\sin^3(\theta)=\cos(\theta)$$

****

1

نفرض أن طول ضلع الصفيحة h، وأن وزنها w. عندما يختل الاتزان وتكون الصفيحة على وشك الانزلاق فهذا يعني أن قوة الاحتكاك تكون نهائية وتساوي μN، حيث N هور رد الفعل العمودي، بينما μ هو معامل الاحتكاك. انظر شكل (5.14).



شكل 5.14

إذن من حالة الاتزان نجد أن

$$E\cos(\phi) = w\sin(\phi) + \mu N; \qquad \text{(i)}$$

$$N = E\sin(\phi) + w\cos(\phi) \qquad \text{(ii)}$$

بالتعويض من (ii) في (i) نجد أن

$$E(\cos(\phi)-\mu\sin(\phi))=w\sin(\phi)+\mu w\cos(\phi) \qquad \text{(iii)}$$

أو

$$E=\frac{w(\sin(\phi)+\mu\cos(\phi))}{\cos(\phi)-\mu\sin(\phi)} \qquad \text{(iv)}$$

وبما أن $E>0$، إذن فإن

$$\cos(\phi)-\mu\sin(\phi)>0 \;\Rightarrow\; \mu<\cot(\phi) \qquad \text{(v)}$$

عندما يختل الاتزان وتكون الصفيحة على وشك الانقلاب حول النقطة B فهذا يعني أن قوة الاحتكاك F تكون أقل من μN، ولكنها كافية لمنع الانزلاق (انظر شكل (5.15)). إذن من حالة الاتزان، وبأخذ عزوم القوى حول نقطة B، نجد أن

$$-E\cos(\phi)h+E\sin(\phi)h+w\sin(\phi)\frac{h}{2}+w\cos(\phi)\frac{h}{2}=0 \qquad \text{(vi)}$$

أو

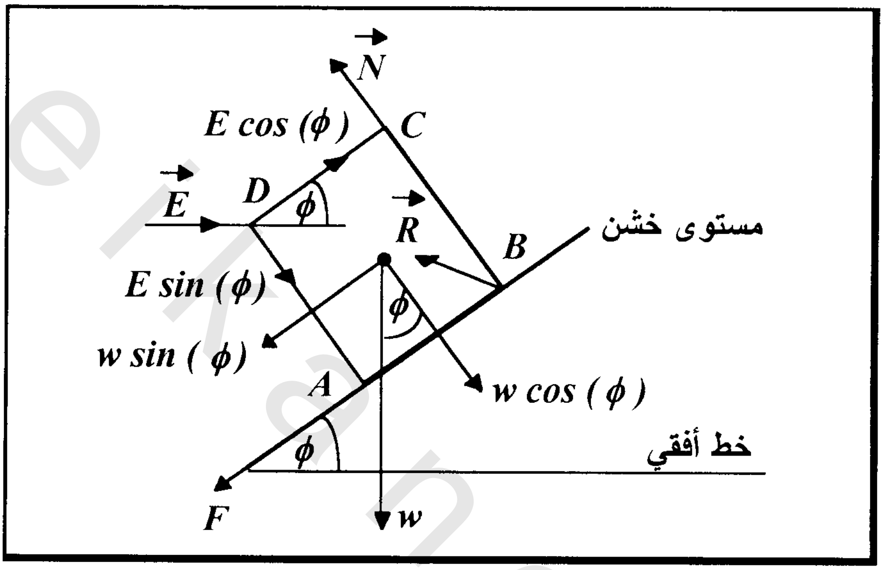
$$w\sin(\phi)+w\cos(\phi)=2E(\cos(\phi)-\sin(\phi)) \qquad \text{(vii)}$$

أي أن

$$E=\frac{w(\sin(\phi)+\cos(\phi))}{2(\cos(\phi)-\sin(\phi))} \qquad \text{(viii)}$$

وبما أن $E > 0$، إذن فإن

$$\cos(\phi) - \sin(\phi) > 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\phi) < 1 \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(ix)}$$

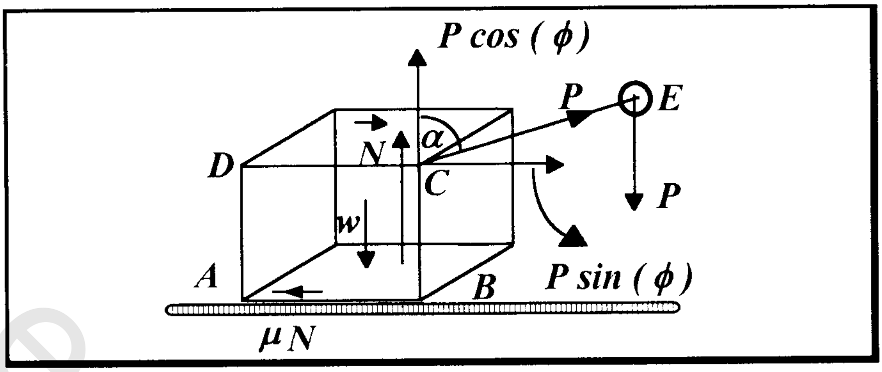


شكل 5.15

3

نفرض أن وزن المكعب هو w، ويؤثر في مركزه، كما نفرض أن طول ضلعه هو h. الآن دعنا، نفرض ـ أولاً ـ أن المكعب فقد اتزانه وبدأ في الانزلاق (لاحظ الفرق بين الانزلاق، وعلى وشك الانزلاق). انظر شكل (5.16).

شكل
5.16



في هذه الحالة فإن

$$P\sin(\phi) > \mu N\,,\quad N + P\cos(\phi) = w \tag{i}$$

وبالتالي فإن

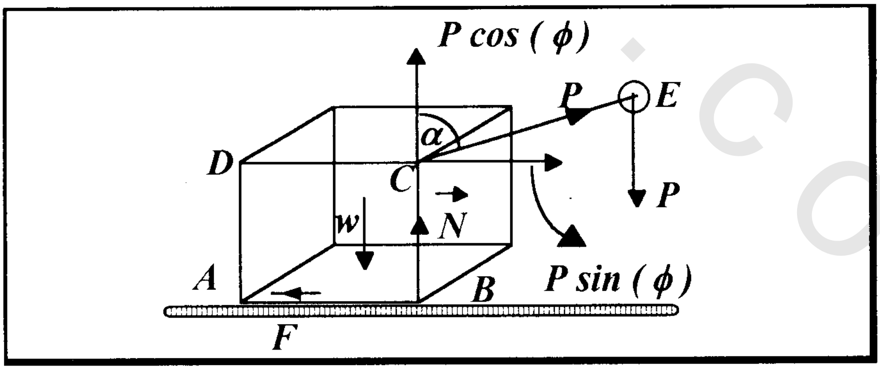
$$P\sin(\phi) > \mu\big(w - P\cos(\phi)\big)$$

أو

$$P > \frac{w\,\mu}{\sin(\phi) + \mu\,\cos(\phi)} \tag{ii}$$

ثانياً، نفرض أن المكعب فقد اتزانه وبدأ في الانقلاب (لاحظ الفـرق بـين الانزلاق، وعلى وشك الانزلاق). انظر شكل (5.17).

شكل
5.17



في هذه الحالة فإن مجموع عزوم القوى حول B (اتجاه الدوران) يجب أن يكون أكبر من العزوم في الاتجاه المضاد. إذن

$$P\sin(\phi)h > w\frac{h}{2} \;\Rightarrow\; P > \frac{w}{2\sin(\phi)} \qquad \text{(iii)}$$

وبالتالي فإنه لكي ينقلب المكعب أولاً دون أن ينزلق يجب أن تكون القوة P أقل من القوة التي تسبب له الانزلاق، وأكبرمن القوة التي تسبب له الانقلاب. إذن نجد من (ii), (iii) أن

$$\frac{w\,\mu}{\sin(\phi)+\mu\,\cos(\phi)} > P > \frac{w}{2\sin(\phi)} \qquad \text{(iv)}$$

أو

$$\frac{\mu}{\sin(\phi)+\mu\,\cos(\phi)} > \frac{1}{2\sin(\phi)}$$

إذن

$$\frac{1}{\mu}+\cot(\phi) < 2$$

وبما أن

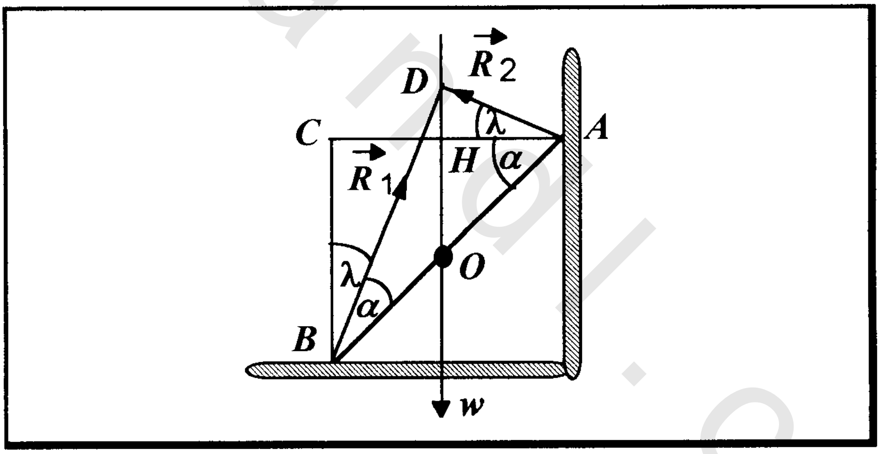
$$\mu = \tan(\lambda) \;\Rightarrow\; \frac{1}{\mu} = \cot(\lambda)$$

إذن فإن

$$\cot(\lambda)+\cot(\phi) < 2$$

5

بما أن الاحتكاك نهائي، إذن فإن زاوية الاحتكاك ـ المطلوب الحصول عليها ـ أيضاً تكون نهائية، لنرمز لها بالرمز λ، وهي الزاوية المحصورة بين رد الفعل والرأسي. إذن فإن رد فعل الأرض على القضيب عند نقطة B (نرمز له بالرمز $\vec{R}_1$) يصنع الزاوية λ مع الرأسي، ورد فعل الحائط الخشن على القضيب عند النقطة A (نرمز له بالرمز $\vec{R}_2$) يصنع نفس الزاوية λ مع الرأسي، وذلك لأن معامل احتكاك الأرض يساوي معامل احتكاك الحائط. انظر شكل (5.18).



شكل 5.18

من شكل (5.18) نجد أن

$$\hat{ADB} = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \lambda) - (\alpha + \lambda) = \frac{\pi}{2} \quad \text{(i)}$$

أيضاً بسبب الاتزان فإن خط عمل وزن القضيب يجب أن يمر بنقطة تقاطع رديي الفعلين $\vec{R}_1, \vec{R}_2$. وبما أن الوزن يؤثر في منتصف القضيب، إذن فإن

$$OD = OA \quad \Rightarrow \quad O\hat{D}A = O\hat{A}D \qquad \text{(ii)}$$

ولكن، من المثلث AHD نجد أن

$$H\hat{D}A = \frac{\pi}{2} - \lambda \;\Rightarrow\; O\hat{D}A = \frac{\pi}{2} - \lambda \qquad \text{(iii)}$$

وبما أن

$$O\hat{A}D = \lambda + \alpha \qquad \text{(iv)}$$

إذن، بالتعويض من (iii), (iv) في (ii) نحصل على

$$\frac{\pi}{2} - \lambda = \lambda + \alpha \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \qquad \text{(v)}$$

****