الباب
5

# الاحتكــاك
# Friction

في الحيــاة العمليــة لا يوجــد مــا يســمى "أجســام ملســاء بالتمــام" *(Perfectly Smooth)*، فمهما كانت الأجسام المادية ملساء فإنه ستنشأ بينها (في حالة الاحتكاك) قوة ـ مهما كانت صغيرة جداً ـــ تمنع أحدها من الانزلاق على الآخر. هذه القوة تسمى "قوة الاحتكاك". فعلى سبيل المثال نجد أن الإنسان يستطيع أن يمشي على الأرض دون أن ينزلق أو ينقلب، كما نجد أن عامل النجارة يُدخل بمهارة المسمار في لوح الخشب فيبقى المسمار ثابتاً في مكانه ولا يخرج خارجاً!. فما هو السبب في حدوث ذلك؟ وما هي تلك الخاصية المسئولة عن هذا؟ في الواقع أنها خاصية الاحتكاك *(Friction)* بين الأجسام.

---

## 5.1 مقدمة

في هذا الباب ندرس قوى الاحتكاك *(Forces of Friction)* بين الأجسام المادية؛ تلك القوى التي تنشأ من تلامس الأجسام الخشنة *(Rough)* بعضها مع البعض، ويكون اتجاهها عكس اتجاه حركة الجسم الممكنة وُتسهم إلى حد كبير في مقاومة حركة الأجسام، أو على الأقل حفظها في حالة اتزان.

هذا، وسوف نتعرف في هذا الباب ـ أيضاً ـ على ما يسمى بقوة الاحتكاك النهائية أو القصوى *(Limiting Friction)* وما يسمى معامل الاحتكاك *(Coefficient of Friction)*، كما ُنعرف زاوية الاحتكاك

*(Angle of Friction)*، وكذلك نُعرف زاوية الاحتكاك النهائي *(Angle of Limiting Friction)*، وأيضاً نتعرف على ما يسمى بمخروط الاحتكاك *(Cone of Friction)*.

## 5.2 قوة الاحتكاك بين جسمين

ما هي قوة الاحتكاك؟ كيف تنشأ؟ وما هو تأثيرها على الأجسام من حيث الحركة أو السكون؟ وما هي قيمتها العددية ومتى تصبح هذه القيمة نهاية عظمى؟ وما هو مقدارها عندئذٍ؟

أيضاً ما هو المقصود بزاوية الاحتكاك، وما هي علاقتها بقوة الاحتكاك؟ ومتى تصبح زاوية الاحتكاك نهاية عظمى؟ وما هي علاقتها عندئذٍ مع قوة الاحتكاك العظمى أو النهائية؟

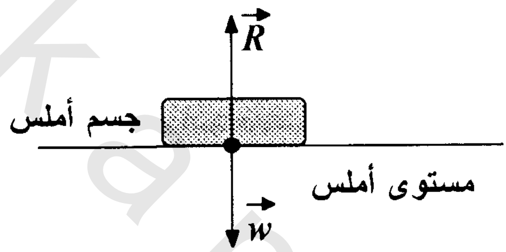
في هذا الفصل سنجيب عن كل هذه التساؤلات وغيرها. ولكن بدايةً دعنا نتفهم سبب عدم وجود قوى احتكاك عند تلامس الأجسام الملساء وسبب وجودها عند تلامس الأجسام الخشنة وذلك بدراسة الحالتين.

### I تلامس الأجسام الملساء

من المعروف أنه إذا وضِعَ جسم أملس *(Smooth Body)* على مستوى أفقي أملس بحيث كان الجسم والمستوى متلامسين *(In Contact)*؛ فإن الجسم يكون متزناً تحت تأثير وزنه وقوة رد فعله على المستوى الأملس وهي بالتأكيد قوة عمودية *(Perpendicular)* على كل من الجسم

والمستوى عند نقطة التماس *(Point of Contact)*. وهكذا نجد أنه إذا أثرت على الجسم أية قوة خارجية ـ مهما كانت صغيرة جداً ـ بحيث أدت إلى اختلال الاتزان فإن الجسم ينزلق *(Sliding)*، وذلك **لأنه لاتوجد أية قوة تمنع** *(Prevent)* **الجسم من الانزلاق على هذا المستوى الأفقي**. انظر شكل (5.1)، حيث $w$ هي كتلة الجسم، كما أن $\vec{R}$ هو رد الفعل.

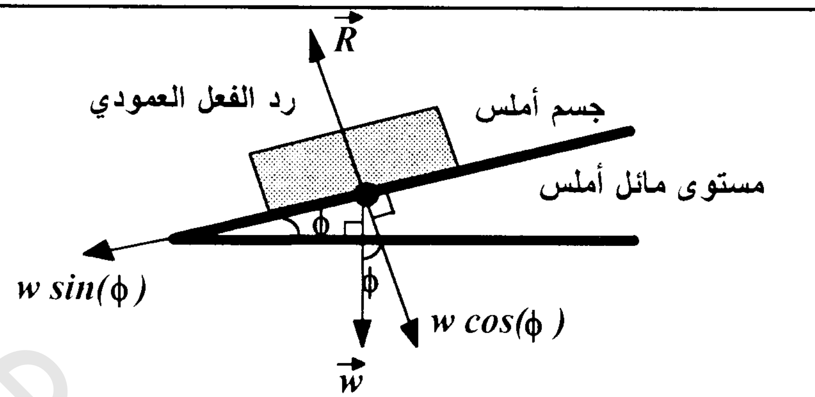
**شكل 5.1**




الجسم متزن تحت تأثير القوتين $R, w$ ، إذ أن $R = w$
ولا توجد أية قوة احتكاك تمنعه من الانزلاق

من ناحية أخرى إذا وضع هذا الجسم الأملس على مستوى مائل أملس *(Inclined Plane)*، يميل على الأفقي بزاوية $\phi > 0$ ـ مهما كانت $\phi$ صغيرة ـ فسوف نجد أن الجسم ينزلق لأسفل المستوى المائل دون أن تمنعه أية قوة من الانزلاق. انظر شكل (5.2).

شكل 5.2




الجسم ينزلق لأسفل تحت تأثير القوة $w \sin(\phi)$

ولا توجد أية قوة احتكاك تمنعه من الانزلاق

كما نجد أن $R = w \cos(\phi)$

## II تلامس الأجسام الخشنة

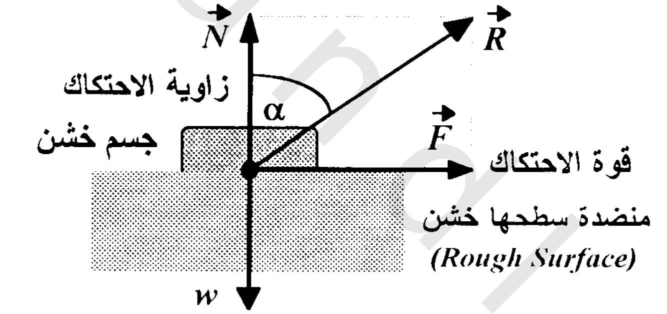
من المعروف أنه إذا وضع جسم ما على منضدة أفقية سطحها خشن ـ مثلاً ـ فإنه تنشأ قوة رد فعل المنضدة على الجسم. لنرمز لهذه القوة بالرمز $\vec{R}$. في الواقع فإن هذه القوة ليس من الضروري أن تكون عمودية على المستوى المماسي للجسم مع المنضدة.

لكن، على أية حال لنفرض أنه أمكن تحليل قوة رد الفعل $\vec{R}$ إلى المركبتين المتعامدتين $\vec{F}, \vec{N}$. في الواقع فإن المركبة العمودية $\vec{N}$ تسمى رد الفعل العمودي *(Normal Reaction)*، أما المركبة $\vec{F}$ فتسمى **"قوة الاحتكاك"**.

بالتأكيد فإن قوة الاحتكاك مهمتها هنا حفظ الجسم في حالة اتزان ومنعه من الحركة في الاتجاه العكسي لها، وذلك في حالة تعرضه لقوة خارجية.

على أية حال فإن الجسم في شكل (5.3) يكون متزناً تحت تأثير وزنه $w$ وقوة رد الفعل العمودي $\vec{N}$. أما قوة الاحتكاك فيكون مقدارها في هذه الحالة مساوياً للصفر. بمعنى أن قوة الاحتكاك تبقى كامنة مادام هذا الجسم في حالة سكون، وليس على وشك الحركة تحت تأثير أية قوة خارجية. انظر شكل (5.3).

شكل 5.3




الجسم متزن تحت تأثير القوتين $N, w$، حيث $N = w$

وتوجد قوة احتكاك $F$ تعمل على منعه من الانزلاق على المنضدة

**انتبه!**

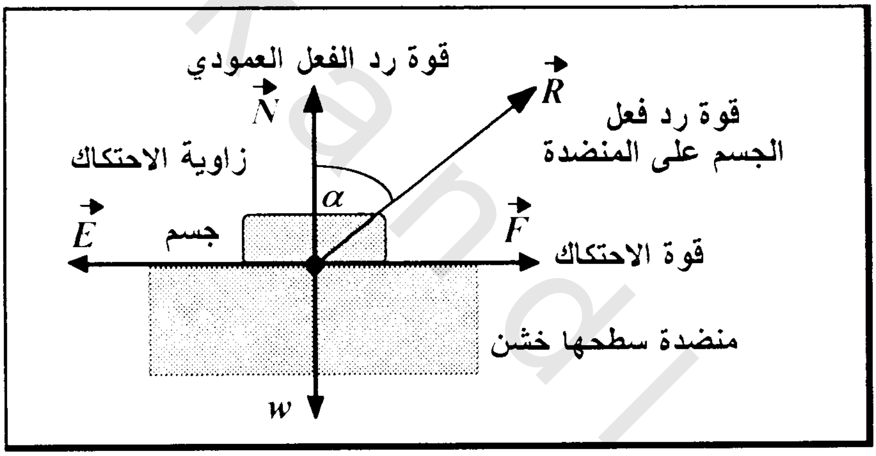
إلى الحالة كما في شكل (5.3) حيث نجد أن مقدار قوة الاحتكاك يكفي فقط لحفظ الاتزان عند تعرض الجسم لقوة خارجية، ويزداد هذا المقدار

تدريجياً إذا اختل الاتزان حتى يصل إلى قيمته العظمى عندما يكون الجسم على وشك الحركة.

فإذا أثرنا الآن بقوة أفقية $\vec{E}$ ، بحيث يزداد مقدارها تدريجياً على هذا الجسم كما في شكل (5.4)، فإن قوة الاحتكاك في المقابل تزداد تدريجيا لتكون كافية لحفظ الجسم في حالة اتزان وتمنعه من الحركة، وبالتالى فإن الجسم عندئذٍ يكون متزناً تحت تأثير أربع قوى بحيث يكون

$$\boxed{N = w,\ E = F} \tag{5.1}$$

شكل 5.4

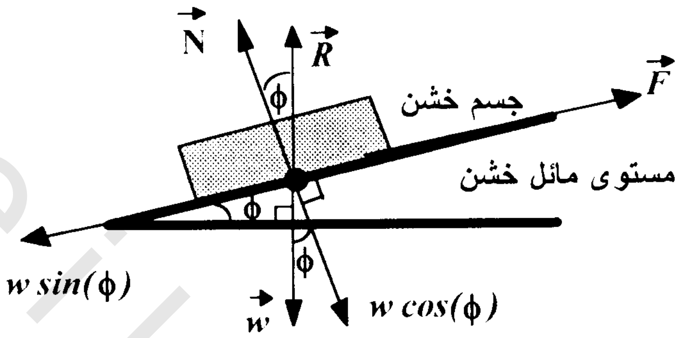



وبازدياد مقدار القوة يزداد مقدار قوة الاحتكاك ويبقى مساوياً له حتى يختل الاتزان ويكون الجسم على وشك الحركة عندئذٍ يكون مقدار الاحتكاك قد وصل إلى قيمته العظمى.

فإذا وضع هذا الجسم الخشن على مستوى مائل خشن فسنجد أن قوة الاحتكاك تمنعه من الانزلاق إلى أسفل إذا كانت زاوية ميل المستوى

المائل على الأفقي تساوي زاوية الاحتكاك النهائية ـ كما سنرى. انظر شكل (5.5).

**شكل 5.5**




الجسم متزن تحت تأثير القوتين $R, w$

أو متزن تحت تأثير القوى $N, F, w\sin(\phi), w\cos(\phi)$

حيث: $N = w\cos(\phi)\ , F = w\sin(\phi)$

**تعريف زاوية الاحتكاك 5.1**

الزاوية المحصورة بين رد الفعل $\vec{R}$، ورد الفعل العمودي $\vec{N}$ تسمى "**زاوية الاحتكاك**" ويرمز لها بالرمز $\alpha$. بالنظر إلى شكل (5.4) نجد أن ظل زاوية الاحتكاك هو

$$\tan(\alpha) = \frac{F}{N} \tag{5.2}$$

✍.

وبالتالي فإن قوة الاحتكاك يمكن أن يعبر عنها بدلالة زاوية الاحتكاك، $\alpha$، ومركبة رد الفعل العمودي وذلك عن طريق العلاقة

$$F = N\tan(\alpha) \tag{5.3}$$

**ملاحظات**

(1) يجب ملاحظة أن زاوية الاحتكاك تكون مساوية للصفر في حالة الاحتكاك بين الأجسام الملساء.

(2) ينعدم الاحتكاك بين جسمين خشنين إذا كانت كل القوى المؤثرة على أيٍ من الجسمين عمودية على سطح التماس المشترك بين الجسمين الخشنين عند نقطة التماس. انظر شكل (5.3)، حيث نجد أن

$$F = N\tan(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \tag{5.4}$$

الأمر الذي يعني أن قوة رد الفعل هي نفسها قوة رد الفعل العمودي.

## 5.2 تعريف قوة الاحتكاك النهائية

قوة الاحتكاك يمكن أن تصل إلى قيمتها العظمى (النهائية) عندما تتغير حالة القوى المؤثرة على الجسم، بحيث يفقد اتزانه ويبدأ في الحركة. عندئذٍ فإن قوة الاحتكاك تصبح قيمة قصوى وتسمى **"قوة الاحتكاك النهائي"** .

### تعريف 5.3 زاوية الاحتكاك النهائية

زاوية الاحتكاك تكون قيمة عظمى (تأخذ أكبر قيمة لها) وتسمى عندئذٍ **"زاوية الاحتكاك النهائية"** عندما تكون قوة الاحتكاك نهائية والجسم على وشك الحركة.

.

### تعريف 5.4 معامل الاحتكاك

تسمى النسبة الثابتة بين الاحتكاك النهائي وقوة رد الفعل العمودي لكل جسمين متلامسين، ويرمز لها بالرمز $\mu$ **"معامل الاحتكاك"**.

.

هذا، وتتوقف قيمة معامل الاحتكاك على طبيعة وخصائص الأجسام المتلامسة. وقد أوضحت التجارب المعملية أن قيمة معامل الاحتكاك محصورة بين الصفر والواحد الصحيح $(1 > \mu > 0)$. وهاكم بعض القيم التقريبية لمعامل احتكاك بعض المواد في جدول (5.1).

جدول 5.1

| المادة | معامل الاحتكاك |
|---|---|
| معدن على معدن | $0.15 < \mu < 0.65$ |
| معدن على جلد | $0.30 < \mu < 0.65$ |
| خشب على خشب | $0.25 < \mu < 0.50$ |
| مطاط على خرسانة | $0.50 < \mu < 0.95$ |

فإذا رمزنا لمقدار قـوة الاحتكـاك النهـائي بـالرمز $F_m$ فسـوف نجـد أنـه عندما تكون زاوية الاحتكاك أكبر قيمة لها ($\lambda$ مثلاً) فإن مقـدار قـوة الاحتكاك النهائي تكون مساوية للمقدار $\mu N$، وذلك لأنه مـن شـكل (5.6) نجد أن

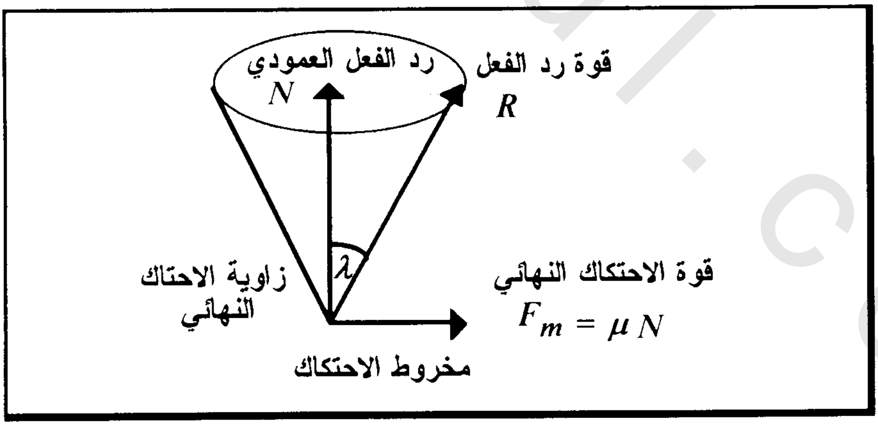
$$\boxed{\frac{F_m}{N} = \mu \;\Rightarrow\; F_m = \mu N} \tag{5.5}$$

أيضاً، وبما أن معامل الاحتكاك يساوي ظل زاوية الاحتكاك العظمى؛ إذن فإن

$$\tan(\lambda) = \frac{\mu N}{N} = \mu \tag{5.6}$$

وبالتعويض من (5.4) في (5.3) نحصل على

$$F_m = \mu N = \tan(\lambda)\, N \tag{5.7}$$




شكل 5.6

### 5.5 تعريف مخروط الاحتكاك

ُيعرف مخروط الاحتكاك على أنه المخروط الذي رأسه هو نقطة التماس المشتركة بين الجسمين الخشنين المتلامسين، ومحوره هو العمود المشترك علي سطح التماس، وزاويته النصف رأسية هي زاوية الاحتكاك العظمى، $\lambda$. انظر شكل (5.3) حيث نجد أن

$$\lambda = \tan^{-1}(\mu) \tag{5.8}$$

✍.

## 5.3 الانزلاق و الانقلاب - *Sliding and Toppling*

رأينا في ما سبق أنه في حالة وجود جسم أملس موضوع على مستوى أفقي أملس أن رد فعل المستوى على الجسم يكون عمودياً ويتزن الجسم تحت تأثير وزنه $w$، ورد الفعل $\vec{R}$؛ بحيث يكون $R = w$. انظر شكل (5.1). فإذا أثرنا بقوة خارجية $\vec{E}$ على الجسم الأملس فمن المتوقع ـ طبعاً ـ أن يتحرك الجسم منزلقاً بدون أية مقاومة وذلك في اتجاه القوة الخارجية $\vec{E}$ مهما كانت هذه القوة الخارجية صغيرة.

فإذا افترضنا ـ الآن ـ أن المستوى الأفقي الموضوع عليه الجسم هو مستوى خشن *(Rough)*. في هذه الحالة فإن رد الفعل لن يكون عمودياً

كما في حالة المستوى الأملس، وبالتالي يجب تحليله إلى مركبتين في اتجاهين متعامدين؛ هما : المركبة المسماة بقوة الاحتكاك $\vec{F}$، ومركبة رد الفعل العمودي $\vec{N}$.

بالتأكيد فإن قوة الاحتكاك $\vec{F}$ تمنع الجسم من إمكانية الحركة في عكس اتجاهها. انظر شكل (5.2).

**انتبه!**

إلى الفرق بين المستوى الأملس حيث لم تكن هناك أي قوى احتكاك، والمستوى الخشن حيث يكون مقدار الاحتكاك $N\tan(\alpha)$، حيث $\alpha$ هي زاوية الاحتكاك بينما $N$ هو مقدار رد الفعل العمودى.

الآن إذا أثرنا بالقوة الخارجية $\vec{E}$ على الجسم؛ فإن قوة الاحتكاك فقط هي التي تقاوم القوة الخارجية وتمنع الجسم من الحركة. في الواقع إن قوة الاحتكاك هذه تمنع الجسم من الانزلاق، كما تمنعه ـ أيضاً ـ من الانقلاب وتحفظه في حالة اتزان. وفي هذه الحالة فإن

$$E = F; \quad F = N\tan(\alpha) \;\&\; \quad N = w \tag{5.9}$$

انظر شكل (5.4). وبازدياد مقدار القوة الخارجية فإن مقدار قوة الاحتكاك أيضاً يزداد في المقابل حتى يصل إلى القيمة القصوى، $F_{\max} = \mu N$، ويصبح عندها الاحتكاك نهائياً ويختل

الاتزان وتصبح الإسطوانة بالتالي على وشك الانزلاق *(Sliding)* أو على وشك الانقلاب *(Toppling)*، أو على وشك الانزلاق ثم الانقلاب. هذا وسوف نتعرف الآن على الحالتين.

## I الاتزان اختل والجسم "على وشك" الانزلاق

عندما يختل الاتزان ويبدأ الجسم في الانزلاق فهذا يعني أن الاحتكاك يكون نهائياً ويساوي $F = \mu N$، وأن رد الفعل $\vec{R}$ يصنع زاوية $\lambda$ مع العمودي المشترك للسطحين المتلامسين؛ الأمر الذي يعني أن زاوية الاحتكاك $\alpha$ تأخذ قيمتها العظمى فتصبح $\lambda$، بمعنى أن $\alpha = \lambda$. وهكذا نجد أنه في حالة الانزلاق أن

$$\boxed{F = \mu N, \quad \alpha = \lambda} \tag{5.10}$$

هذا، وينزلق الجسم إذا كان مجموع مركبات القوى في اتجاه الانزلاق أكبر من مجموع مركبات القوى في الاتجاه المضاد (اتجاه الاحتكاك).

## II الاتزان اختل والجسم "على وشك" الانقلاب

عندما يختل الاتزان ويبدأ الجسم في الانقلاب بمعنى الدوران حول نقطة أو خط فهذا يعني أن الاحتكاك يكون كبيراً لمنع الانزلاق ولكنه ليس نهائياً، ولهذا يسمح للجسم بالانقلاب. وعليه، فإن $F < \mu N$.

كذلك فإن زاوية الاحتكاك $\alpha$ لا تأخذ قيمتها القصوى $\lambda$ ، بمعنى أن $\alpha < \lambda$. وهكذا نجد ـ في حالة الانقلاب ـ أن

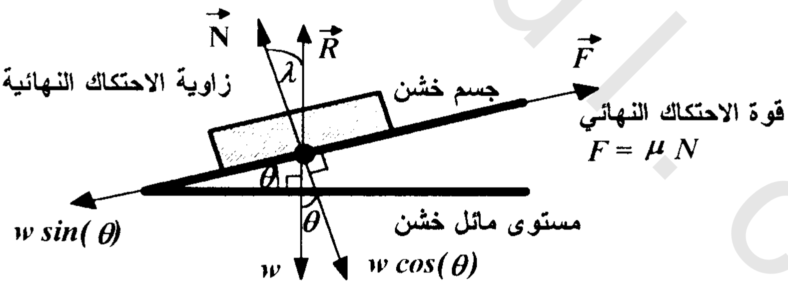
$$F < \mu N, \quad \alpha < \lambda \tag{5.11}$$

هذا، وينقلب الجسم إذا كان مجموع عزوم القوى في اتجاه الانقلاب أكبر من مجموع عزوم القوى في الاتجاه المضاد.

## 5.4 اتزان جسم موضوع على مستوى مائل خشن تحت تأثير وزنه فقط

لنعتبر أن جسماً مادياً وزنه $w$، موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بالزاوية $\theta$. بفرض عدم وجود أي قوى خارجية تؤثر على الجسم فإن الجسم يكون متزناً تحت تأثير قوة وزنه $w$ وقوة رد الفعل $\vec{R}$. انظر شكل (5.7).

شكل 5.7




الجسم متزن تحت تأثير $R, w$

أو متزن تحت تأثير $N, F, w \sin(\theta), w \cos(\theta)$

حيث $N = w \cos(\theta)$ , $w \sin(\theta) = \mu N$

إذن، بفرض أن الجسم متزن تحت تأثير وزنه $w$ ورد الفعل فقط، وعلى وشك الحركة لأسفل المستوى يجب أن تساوي زاوية الاحتكاك $\lambda$، (وهي الزاوية المحصورة بين رد فعل الجسم على المستوى ورد الفعل العمودي) زاوية ميل المستوى على الأفقي. كذلك فإن الاحتكاك يكون نهائياً، بحيث يمنع الجسم من الحركة إلى أسفل. في هذه الحالة فإن

$$F = \mu N, \quad \lambda = \theta \tag{5.12}$$

**بأسلوب آخر** بما أن الجسم متزن، إذن فإن

$$w\cos(\theta) = N, \quad w\sin(\theta) = \mu N$$

أو

$$w\sin(\theta) = \mu(w\cos(\theta)) \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \mu \tag{5.13}$$

وبما أنه، من (5.4) نجد أن معامل الاحتكاك $\mu$ يساوي ظل زاوية الاحتكاك النهائية $\lambda$، إذن فإن الزاوية $\theta$ يجب أن تساوي الزاوية $\lambda$. وهكذا نجد أنه، لإتزان جسم موضوع على مستوى مائل خشن يجب أن تكون زاوية الاحتكاك مساوية لزاوية ميل المستوى على الأفقي. والسؤال المطروح الآن ماذا يحدث فى حالة عدم تساوي زاوية الاحتكاك مع زاوية ميل المستوى؟ للإجابة عن هذا السؤال لدينا الحالات الثلاث الآتية.

**I** إذا كانت $\theta = \lambda, \quad F = \mu N$، فإن هذا يعني أن الجسم يظل متزناً، ويكون على "وشك الحركة" أو الانزلاق إلى أسفل.

**II** إذا كانت $\theta < \lambda$، فإن هذا يعني أن الجسم يظل متزناً، دون أن يكون على وشك الحركة إلى أسفل.

**III** إذا كانت $\theta > \lambda$، فإن الجسم يتحرك، أو ينزلق إلى أسفل المستوى.

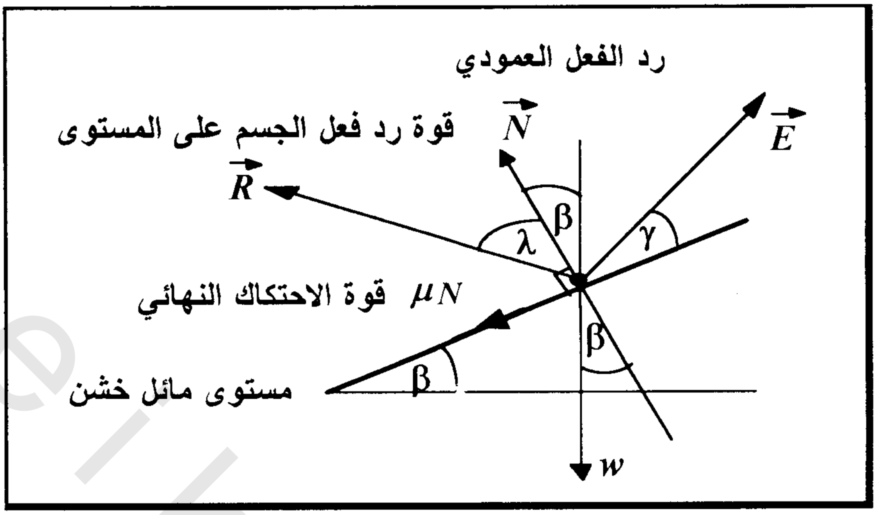
## 5.5 اتزان جسم موضوع على مستوى مائل خشن تحت تأثير وزنه وقوة خارجية

في هذا الفصل ندرس اتزان جسم وزنه $w$، وموضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بالزاوية $\beta$، وتؤثر عليه قوة خارجية $\vec{E}$، بحيث يظل الجسم متزناً، دون أن يكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى، بمعنى أن $\beta < \lambda$. هذا، وسوف نعتبر هنا حالتين.

**الحالة الأولى** نفرض أن القوة الخارجية $\vec{E}$ تصنع زاوية $\gamma$ مع خط أكبر ميل للمستوى المائل الخشن، بحيث يظل الجسم متزناً، ولكنه يكون على وشك الحركة إلى أعلى.

إذن، الجسم يكون متزناً تحت تأثير قوة وزنه $w$، وقوة رد الفعل $\vec{R}$، والقوة الخارجية $\vec{E}$. ولأن النقطة على وشك الحركة إلى أعلى المستوى يكون الاحتكاك نهائياً، ويؤثر في عكس اتجاه الحركة. انظر شكل (5.8).

شكل 5.8




من الواضح أن الجسم يكون متزناً تحت تأثير القوى الثلاث $E, R, w$. بتطبيق قاعدة لامي على هذه القوى الثلاث والمتلاقية في نقطة واحدة نجد أن

$$\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta+\gamma\right)}=\frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma+\lambda\right)}=\frac{E}{\sin\left(\pi-(\beta+\lambda)\right)} \tag{5.14}$$

حيث نحصل من المعادلة

$$\frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma+\lambda\right)}=\frac{E}{\sin(\beta+\lambda)} \tag{5.15}$$

على المعادلة

$$E=\frac{w\sin(\beta+\lambda)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\gamma-\lambda)\right)}=\frac{w\sin(\beta+\lambda)}{\cos(\gamma-\lambda)} \tag{5.16}$$

بالاطلاع على المعادلة (5.13)؛ وبما أن الجسم على وشك الحركة إلى أعلى، إذن فإن الاحتكاك نهائي، وبالتالي فإن زاوية الاحتكاك $\lambda$ نهاية عظمى وثابتة. أيضاً فإن زاوية ميل المستوى على الأفقي هي الزاوية $\beta$ وهي ثابتة. وهكذا نكتشف أن مقدار القوة $E$ يتوقف ـ فقط ـ على مقدار الزاوية $\gamma$.

من الواضح في المعادلة (5.13) أن مقدار القوة يكون أقل قيمة ممكنة عندما يكون المقام أكبر قيمة، أي عندما يكون

$$\cos(\gamma - \lambda) = 1 \tag{5.17}$$

أو

$$\gamma - \lambda = 0 \rightarrow \gamma = \lambda \tag{5.18}$$

أي عندما تكون زاوية الاحتكاك النهائي مساوية للزاوية التي تصنعها القوة مع خط أكبر ميل للمستوى المائل. الأمر الذي يعني أنه عندما يكون اتجاه القوة $\vec{E}$ عمودياً على اتجاه رد الفعل $\vec{R}$ فإن أقل مقدار للقوة (نرمز لها بالرمز $E_{mim}$) اللازمة لحفظ اتزان الجسم، بحيث يكون على وشك الحركة إلى أعلى هو

$$\boxed{E_{mim} = w\sin(\beta + \lambda)} \tag{5.19}$$

أيضاً من المعادلة

$$\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta + \gamma\right)} = \frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma + \lambda\right)} \tag{5.20}$$

نجد أن

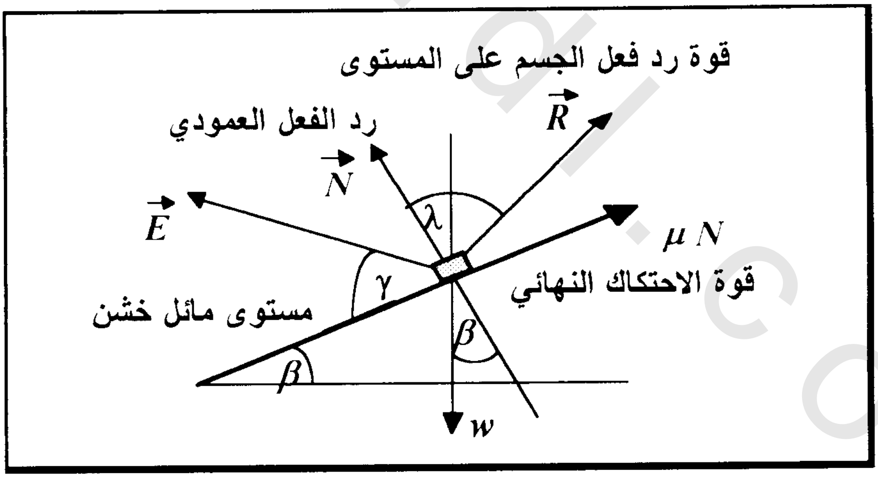
$$R = \frac{w\cos(\beta+\gamma)}{\cos(\gamma-\lambda)} \tag{5.21}$$

**الحالة الثانية**

لنفرض أن القوة الخارجية، $\vec{E}$، تصنع زاوية $\gamma$ مع خط أكبر ميل للمستوى المائل الخشن بحيث يظل الجسم متزناً، ولكنه يكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى.

إذن، الجسم يكون متزناً تحت تأثير قوة وزنه $w$، وقوة رد الفعل $\vec{R}$، والقوة الخارجية $\vec{E}$. ولأن النقطة على وشك الحركة إلى أسفل المستوى يكون الاحتكاك نهائياً، ويؤثر في عكس اتجاه الحركة أي إلى أعلى. انظر شكل (5.9).

**شكل 5.9**



الآن فإن الجسم متزن تحت تأثير القوى الثلاث $E, R, w$، إذن، باستخدام قاعدة لامي على القوى الثلاث $E, R, w$، المتلاقية في نقطة واحدة نجد أن

$$\frac{R}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta+\gamma\right)}=\frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma+\lambda\right)}=\frac{E}{\sin\left(\pi-(\beta-\lambda)\right)} \quad (5.22)$$

ومن المعادلة

$$\frac{w}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma+\lambda\right)}=\frac{E}{\sin\left(\pi-(\beta-\lambda)\right)} \quad (5.23)$$

نحصل على

$$E=\frac{w\sin(\beta-\lambda)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\gamma-\lambda)\right)}=\frac{w\sin(\beta-\lambda)}{\cos(\gamma-\lambda)} \quad (5.24)$$

وكما في الحالة الأولى فإن أقل قيمة للقوة $E$ تكون عندما $\gamma=\lambda$، وعندئذٍ نحصل على

$$E_{\min}=w\sin(\beta-\lambda) \quad (5.25)$$

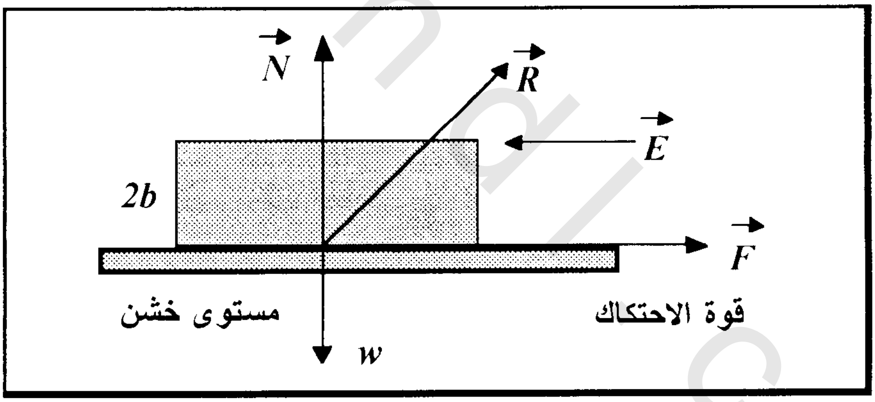
**مثال 5.1** متوازي مستطيلات منتظم طول ضلع قاعدته $2a$، وارتفاعه $2b$، وموضوع على منضدة أفقية خشنة معامل احتكاكها $\mu$.

أثرت قوة أفقية $\vec{E}$ في منتصف أحد الأحرف العليا لأحد الأوجه الرأسية، بحيث تكون عمودية على هذا الحرف. إذا ازداد مقدار القوة حتى اختل التوازن. اثبت أن الجسم ينقلب أو ينزلق على حسب ما إذا كان معامل الاحتكاك $\mu$ أكبر أو أصغر من النسبة $\frac{a}{2b}$.

**الحل** نحاول دراسة حالتي اختلال الاتزان بالانزلاق واختلال الاتزان بالانقلاب كل على حده. ونوجد الشرط اللازم في كلتا الحالتين.

أولاً : نفرض أن الاتزان قد اختل بالانزلاق، بحيث أن مجموع مركبات القوى في اتجاه الانزلاق أكبر من مجموع مركبات القوى في الاتجاه المضاد. انظر شكل (5.10).

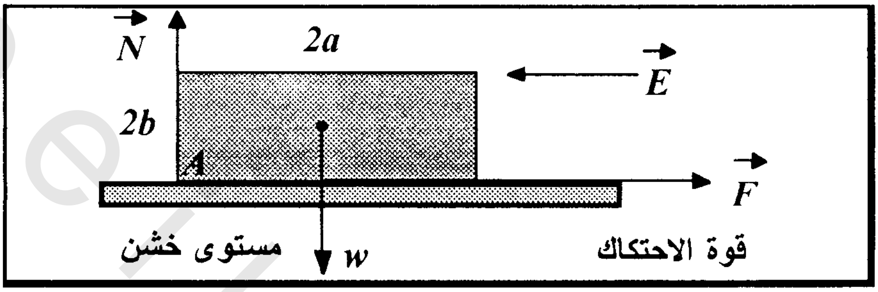
**شكل 5.10**




إذن لدينا شرط الانزلاق

$$N = w\ ,\quad E > \mu N \;\Rightarrow\; E > \mu w \tag{i}$$

ثانياً : نفرض أن الاتزان قد اختل بالانقلاب، بحيث أن مجموع عزوم القوى حول نقطة $A$، والتي تساعد على الدوران (في اتجاه الانقلاب) أكبر من مجموع عزوم القوى في الاتجاه المضاد. انظر شكل (5.11).




شكل 5.11

بما أن الوزن يؤثر في المنتصف، كما أن رد الفعل $\vec{R}$ يمكن تحليله إلى المركبتين $\vec{N}, \vec{F}$ كما في شكل (5.11)، وبأخذ العزوم حول نقطة $A$ نحصل على شرط الانقلاب

$$2b\, E > a\, w \quad \Rightarrow \quad E > \frac{a\, w}{2\, b} \tag{ii}$$

من المعادلتين (i), (ii) نجد أنه، لكي ينزلق متوازي المستطيلات فيجب أن يقل مقدار القوة $E$ في المعادلة (i) عن مقدار القوة $E$ في المعادلة (ii)، أي يجب أن يكون

$$\mu < \frac{a}{2b} \tag{iii}$$

من المعادلتين (i), (ii) ـ أيضاً ـــ نجد أنه، لكي ينقلب متوازي المستطيلات فيجب أن يقل مقدار القوة $E$ في المعادلة (ii) عن مقدار القوة $E$ في المعادلة (i)، أي يجب أن يكون

$$\frac{a}{2b} < \mu \qquad \text{(iv)}$$

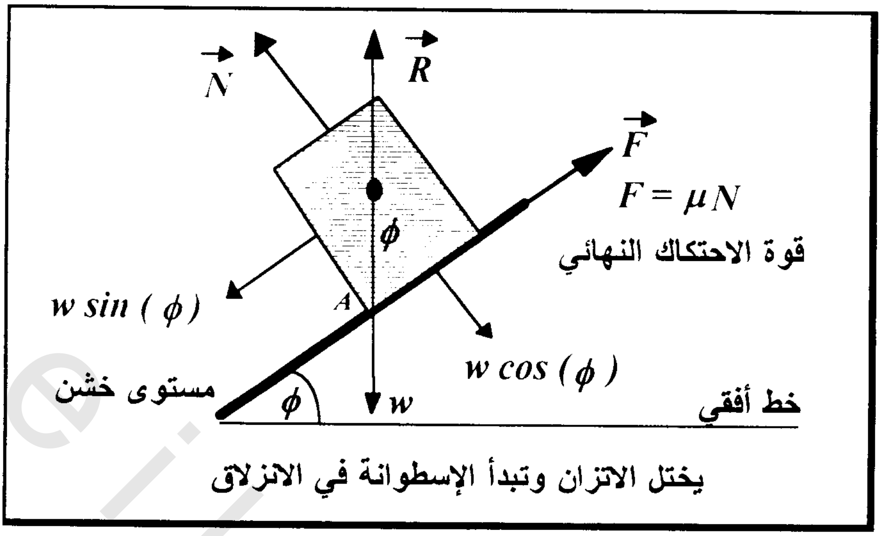
✍.

**مثال 5.2** اسطوانة منتظمة نصف قطرها $a$، وارتفاعها $b$، موضوعة على منضدة خشنة تميل على الأفقي بالزاوية $\phi$، ومعامل احتكاكها $\mu$. إذا ازداد مقدار ميل المنضدة بالتدريج حتى اختل التوازن. اثبت أن الإسطوانة تنقلب قبل أن تنزلق إذا كان $\mu > \frac{2a}{b}$.

**الحل**

نحاول دراسة حالتي اختلال الاتزان بالانزلاق، واختلال الاتزان بالانقلاب كل على حدة. أولاً، بتحليل رد الفعل إلى المركبتين: $\vec{N}, \ \vec{F}$، وتحليل قوة الوزن إلى المركبتين : $w\cos(\phi), \ w\sin(\phi)$، وبفرض أن الاتزان قد اختل بالانزلاق، بحيث يكون مجموع مركبات القوى في اتجاه الانزلاق أكبر من مجموع مركبات القوى في الاتجاه المضاد. انظر شكل (5.12).

شكل 5.12




إذن لدينا

$$N = w\cos(\phi) \tag{i}$$

وشرط الانزلاق

$$w\sin(\phi) > \mu N \tag{ii}$$

أو

$$w\sin(\phi) > \mu w\cos(\phi) \tag{iii}$$

وبالتالي فإن

$$\boxed{\tan(\phi) > \mu} \tag{iv}$$

ثانياً : نفرض أن الاتزان قد اختل بالانقلاب، بحيث أن مجموع عزوم القوى حول نقطة $A$، والتي تساعد على الدوران (في اتجاه الانقلاب) أكبر من مجموع عزوم القوى في الاتجاه المضاد. بأخذ العزوم حول نقطة $A$، نحصل على شرط الانقلاب

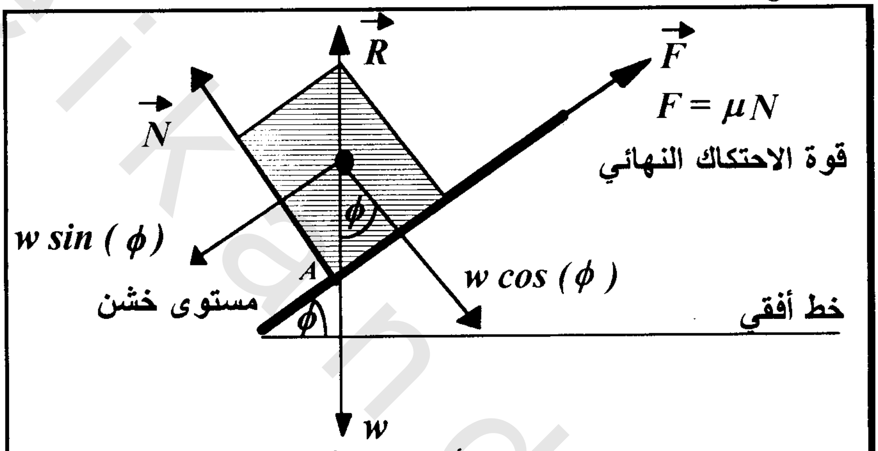
$$\frac{b}{2} w \sin(\phi) > a\, w \cos(\phi) \qquad \text{(v)}$$

أو

$$\tan(\phi) > \frac{2a}{b} \qquad \text{(vi)}$$

من المعادلتين (v) ,(iv) نجد أن الإسطوانة تنقلب قبل أن تنزلق إذا كان $\mu > \frac{2a}{b}$. انظر شكل (5.13).

شكل 5.13




يختل الاتزان وتبدأ الإسطوانة في الانقلاب

**طريقة أخرى**

نلاحظ أنه عندمـا تكـون الإسـطوانة علـى وشـك الانقـلاب يكـون رد الفعل رأسياً، ويمر بنقطة الدوران $A$، وبحيث تكون زاوية الاحتكاك $\lambda$ مساوية لزاوية ميل المنضدة على الأفقي $\phi$. لذلك ولكي تنقلب الإسطوانة ينبغي أن يكون

$$\phi < \lambda$$

أو

$$\tan(\phi) < \tan(\lambda)$$

وبما أن $\mu = \tan(\lambda)$، علاوة على أننا نجد من شكل (5.13) أن $\tan(\phi) = \frac{a}{\frac{b}{2}} = \frac{2a}{b}$، إذن يمكن أن نجد شرط الانقلاب في الصورة

$$\frac{2a}{b} < \mu$$

.

## 5.6 مسائل

(1) وضعت صفيحة مربعة $ABCD$، على مستوى خشن، معامل احتكاكه $\mu$، ويميل على الأفقي بزاوية $\phi$، بحيث ينطبق الضلع $AB$ على خط أكبر ميل، وبحيث يكون مستوى الصفيحة رأسياً، و النقطة $C$ هي أعلى نقطة في الصفيحة. إذا أثرت قوة أفقية تزايدية $\vec{E}$ في نقطة $D$ بحيث يقع خط عملها في مستوى الصفيحة. اثبت أن الصفيحة تكون على وشك الانزلاق (ما لم تكن قد بدأت في الانقلاب) عندما يكون $\mu < \cot(\phi)$، وأن الصفيحة تكون على وشك الانقلاب ما لم تكن قد بدأت في الانزلاق) إذا كانت $\phi = \frac{\pi}{4}$.

(2) تركت سيارة كتلتها 1500 kg. فوق أرض تميل على الأفقي بزاوية $20°$. فإذا كان معامل الاحتكاك بين إطارات السيارة والأرض

هو $\mu = 0.7$، فهل هذه السيارة تتزن في مكانها أم تتحرك منزلقة إلى أسفل؟

(3) صفيحة مربعة $ABCD$ تمثل مكعباً، ينطبق وجهه $AB$ على مستوى خشن أفقي. ربط خيط في $D$، ويمر على بكرة مثبتة عند $E$، ويتدلى من نهايته الأخرى وزن مقداره $P$، إذا كانت زاوية ميل $DE$ على الرأسي هي $\phi$. فاثبت أن المكعب يدور منقلباً حول نقطة $B$ دون أن ينزلق، إذا كان $\cot(\alpha) + \cot(\lambda) < 2$، حيث $\lambda$ هي زاوية الاحتكاك.

(4) يرتكز سلم منتظم بطرفه العلوي على حائط خشن، وبطرفه السفلي على أرض معامل احتكاكها مع السلم يساوي معامل احتكاك الحائط. ما هي المسافة التي يمكن لرجل أن يصعدها على السلم قبل أن ينزلق؟

(5) قضيب منتظم يتزن في مستوى رأسي بأحد طرفيه على حائط خشن، والطرف الآخر على أرض أفقية خشنة لها نفس معامل احتكاك الحائط الخشن. إذا كان الاحتكاك عند طرفي القضيب نهائياً، وكان القضيب يميل على الأفقي بالزاوية $\alpha$ فاثبت أن زاوية الاحتكاك هي $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$.

(6) هيكل مكون من قضيبين خفيفين متساويين $AB,\ BC$، متصلان اتصالاً متماسكاً عند $B$، بحيث يكونا متعامدين. وضع الهيكل على

اسطوانة دائرية خشنة مثبتة، وبحيث يكون القضيبان متساويي الميل على الرأسي. علق وزنان $w_1, w_2$ من النقطتين $A, C$ على الترتيب، بحيث كان $w_2 > w_1$ حتى أصبح الهيكل على وشك الانزلاق. اثبت أن $\frac{w_2}{w_1} = \frac{1+\mu+\mu^2}{1-\mu+\mu^2}$، حيث $\mu$ هو معامل الاحتكاك.

*******************************************