الباب 4

مبدأ الشغل الافتراضي
The Principle of Virtual Work

في هذا الباب ندرس اتزان الجسم المتماسك باستخدام تكنيك هام يسمى "مبدأ الشغل الافتراضي". ومعنى عبارة الشغل الافتراضي يمكن فهمها من العبارة ذاتها. إذ أن هذه الطريقة تفترض أن الجسم المتزن قد حدث له إزاحة عامة صغيرة؛ الأمر الذي يعني أن القوى المؤثرة عليه قد بذلت شغلاً. ولكن، وحيث أن الجسم متزن أصلاً طبقاً للفرض فتكون معادلة الشغل الافتراضي مساوية للصفر.

4.1 معادلة الشغل الافتراضي

في هذا الفصل نحاول الحصول على معادلة الشغل الافتراضي لأي جسم متماسك في وضع الاتزان. لنفرض أن جسماً متماسكاً متزناً تحت تأثير مجموعة من القوى: $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \cdots, \vec{F_n}$، وأن هذه القوى قد أمكن اختزالها إلى قوة وحيدة $\vec{R}$ تؤثر عند نقطة ما، بالإضافة إلى ازدواج محصل متجه عزمه $\vec{Q}$.

ولنفرض ـ أيضاً ـ أن هذا الجسم المتماسك قد أُزيح إزاحة عامة (انتقالية دورانية) صغيرة. إذن فإن هناك شغلاً قد ُبذل في إزاحة هذا الجسم بواسطة القوة المحصلة $\vec{R}$ والازدواج المحصل $\vec{Q}$. في الواقع أن معادلة هذا الشغل الافتراضي هي

$$dw = \vec{R} \cdot d\,\vec{r} + \vec{Q} \cdot d\,\vec{\delta} \tag{4.1}$$

وحيث أن الجسم متزن أصلاً فإن هذا الشغل المبذول، والذي سوف نرمز له بالرمز dw يكون افتراضياً ويساوي صفراً؛ أي أن معادلة الشغل الافتراضي تصبح

$$dw = \vec{R} \cdot d\,\vec{r} + \vec{Q} \cdot d\,\vec{\delta} = 0 \tag{4.2}$$

حيث $d\,\vec{r}$ هي الإزاحة الانتقالية الناتجة عن تأثير القوة المحصلة $\vec{R}$، بينما $d\,\vec{\delta}$ هي الإزاحة الدورانية الناتجة عن تأثير عزم الازدواج المحصل $\vec{Q}$. وبصفة عامة، إذا اتزن الجسم المتماسك تحت تأثير مجموعة القوى الفراغية $\left\{\vec{F_i}\right\}_{i=1}^{n}$؛ فإن معادلة الشغل الافتراضي (4.2) ـ بفرض أهمال الإزاحة الدورانية $d\,\vec{\delta}$ ـ تأخذ الشكل

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot d\,\vec{r_i} = 0 \tag{4.3}$$

حيث $|d\vec{r_i}|$ هي المسافة في اتجاه القوة مقاسة من نقطة الأصل وذلك بعد حدوث الإزاحة الافتراضية التي أدت بدورها إلى الحركة الانتقالية، وبالتالي بذلت القوة $\vec{F_i}$ هذا الشغل.

ملاحظة

عند دراسة الشغل الافتراضي يجب أن نأخذ في الاعتبار نوع القوى التي تؤثر على الجسم من حيث كونها قوى داخلية أم قوى خارجية.

ففي حالة القوى الداخلية مثل الأفعال و ردود الأفعال عند المفصلات الملساء حيث يكون لكل فعل رد فعل مساوٍ له في المقدار ومضاد له في الاتجاه فإن الشغل المبذول نتيجة إزاحة نقطة التلامس إزاحة افتراضية يكون صفراً. ولذا يجب إهمال هذه القوى.

أما في حالة القوى الخارجية وهي تلك القوى التي تبذل شغلاً عند إزاحة الجسم فيمكن دراسة اتزان المجموعة بمساواة هذا الشغل المبذول بالصفر.

انتبه!

إلى القوى التي لاتبذل شغلاً افتراضياً، أو بالأحرى الحالات التي لا تبذل فيها القوى شغلاً.

(1) ينعدم الشغل الذي يبذله الفعل ورد الفعل المتبادلين بين نقطتين ماديتين إذا لم تتغير المسافة بين النقطتين في أثناء إزاحة صغيرة.

(2) ينعدم الشغل المبذول من رد فعل أملس على جسم ينزلق على السطح لأن رد الفعل يكون ـ دائماً ـ عمودياً على اتجاه الإزاحة.

(3) ينعدم الشغل الذي يبذله رد فعل سطح خشن ثابت على جسم يتدحرج بدون انزلاق على السطح.

(4) إذا كانت الإزاحة صغيرة ينعدم الشغل الذي يبذله ردا الفعل المتبادلان بين سطحين يتدحرج كل منهما على الآخر.

(5) إذا دار جسم حول محور ثابت فإن رد فعل المحور لايبذل شغلاً أثناء الحركة، لأن قوة رد فعل المحور تؤثر في نقطة ثابتة.

كيف تبدأ في حل مسائل الشغل الافتراضي؟ للإجابة عن هذا السؤال يجب اتباع الخطوات التالية.

(1) بداية يجب اختيار محاور الإسناد الثابتة، وكذلك يجب اختيار نوع الإحداثيات.

(2) يجب تحديد كل القوى الفعالة أي تحديد كل القوى التي تبذل شغلاً.

(3) تحديد إحداثيات نقط تأثير القوى الفعالة بعد حدوث إزاحات افتراضية.

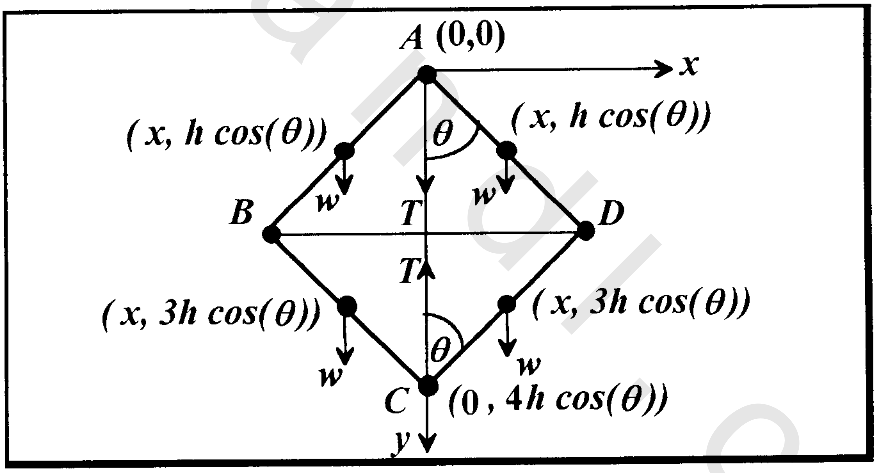
(4) مراعاة الاتجاه الموجب لمحاور الإحداثيات وكذلك مراعاة اتجاهات القوى الفعالة.

(5) كتابة معادلة الشغل الافتراضي (4.3).

مثال 4.1 يتكون المربع $ABCD$ من أربعه قضبان متساوية منتظمة ومتصلة اتصالاً أملس سهلاً. علقت المجموعة من نقطة A، بينما يصل خيط خفيف طوله الطبيعي l بين A, C لحفظ الشكل متزناً. أوجد مقدار الشد فى الخيط باستخدام مبدأ الشغل الافتراضي.

الحل نفرض أن طول أي قضيب هو $2h$. ونفرض ـ أيضاً ـ أن وزن القضيب هو w. باستخدام مبدأ الشغل الافتراضي نفرض أنه قد حدثت إزاحة للمجموعة بحيث أصبحت الزاوية التي يصنعها القضيب مع الرأسي هي θ. انظر شكل (4.1).

شكل 4.1



القوى الفعالة (التي تبذل شغلاً) هي أوزان القضبان (أربع قوى متساوية ولكن تختلف نقط تأثيرها)، وهي قوى موجبة لأنها في الاتجاه الموجب لمحور ـ y.

كذلك فإن الشد في الخيط (قوتان متساويتان ولكن تختلف نقط تأثيرهما) يعتبر من القوى الفعالة التي تبذل شغلاً. بيد أن الشغل الذى تبذله قوة الشد التي نقطة تأثيرها هي نقطة الأصل $A(0,0)$ يساوي الصفر (لأن $r = 0$)، أما قوة الشد التي نقطة تأثيرها هي النقطة $C(0,4h\cos(\theta))$ وهي قوة سالبة، وذلك لأنها عكس الاتجاه الموجب لمحور- y فإنها تبذل شغلاً. عندئذٍ فإن معادلة الشغل الافتراضي (4.2) تعطي

$$wd\left(h\cos\theta\right) + wd\left(h\cos\theta\right) + wd\left(3h\cos\theta\right)$$

$$+wd\left(3h\cos\theta\right) - Td\left(4h\cos\theta\right) = 0$$

أو

$$-2wh\sin(\theta)d\theta - 6wh\sin(\theta)d\theta + 4hT\sin(\theta)d\theta = 0$$

وبما أن الإزاحة التي حدثت صغيرة ولكنها لا تساوي الصفر؛ بمعنى أن $d\theta \neq 0$، إذن، بالقسمة على $d\theta$ نحصل على

$$-8w\sin(\theta) + 4T\sin(\theta) = 0$$

ومنها نجد أن

$$T = 2w$$

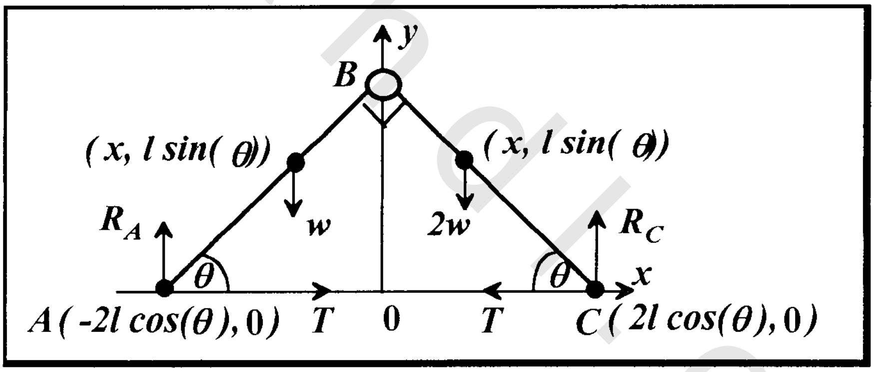
✍.

مثال 4.2 AB, BC قضيبان متساويان طولاً يتصلان اتصالاً مفصلياً أملس سهلا عند نقطة B. وزن القضيب AB هو w، بينما وزن القضيب BC هو $2w$. القضيبان موضوعان في مستوى رأسي بحيث تكون الزاوية بين القضيبين قائمة، وطرفاهما A, C على مستوى أفقي أملس، ويتصل هذان الطرفان بخيط لحفظ الاتزان. أوجد الشد في الخيط.

الحل نفرض أن طول أي قضيب هو $2l$، كما نفرض أن المجموعة حدثت لها إزاحة بسيطة، بحيث أن AC قد استطال قليلاً.

نلاحظ أن ردود الأفعال العمودية عند النقطتين A,C، وكذلك رد الفعل عند المفصل B من القوى التي لاتبذل شغلاً. انظر شكل (4.2).

شكل 4.2



معادلة الشغل الافتراضي تعطي

$$-2wd\left(l\sin(\theta)\right)-wd\left(l\sin(\theta)\right)$$

$$-Td\left(2l\cos(\theta)\right)+Td\left(-2l\cos(\theta)\right)=0$$

أو

$$-3w(l\cos(\theta)d\theta)-2T(-2l\sin(\theta)d\theta)=0$$

وبالقسمة على كل من $l,\ d\theta$ إذن

$$3w(\cos(\theta))-4T(\sin(\theta))=0$$

وبالتالي فإن

$$T=\frac{3}{4}w\cot(\theta)$$

وفي وضع الاتزان فإن $\theta=\frac{\pi}{4}$، وعندئذٍ فإن مقدار الشد يصبح

$$T=\frac{3}{4}w\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3w}{4}$$

حل آخر

من دراسة اتزان كل قضيب على حدة نجد أن $T=R_x$. كما نجد أن

$$R_A=w+R_y,\quad R_C=2w-R_y$$

أو

$$R_A+R_C=3w$$

وهي نفس النتيجة التي يمكن الحصول عليها من دراسة اتزان المجموعة ككل. على أية حال ندرس اتزان القضيب AB حيث نأخذ عزوم القوى حول نقطة A فنجد أن

$$2R_y l\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+2R_x l\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-wl\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

أو

$$2R_y+2R_x=w \qquad \text{(i)}$$

وبدراسة اتزان القضيب BC - مع أخذ عزوم القوى حول نقطة C -
نجد أن

$$2R_y l\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-2R_x l\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+2wl\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

أو

$$2R_x-2R_y=2w \qquad \text{(ii)}$$

من المعادلتين (i), (ii)، وبالجمع (مع ملاحظة أن $T=R_x$) نجد أن

$$4R_x=3w \;\Rightarrow\; R_x=\frac{3w}{4} \;\Rightarrow\; T=\frac{3w}{4}$$

وأيضاً، بالتعويض عن $R_x=\dfrac{3w}{4}$ في أية معادلة من المعادلتين (i), (ii)
نجد أن

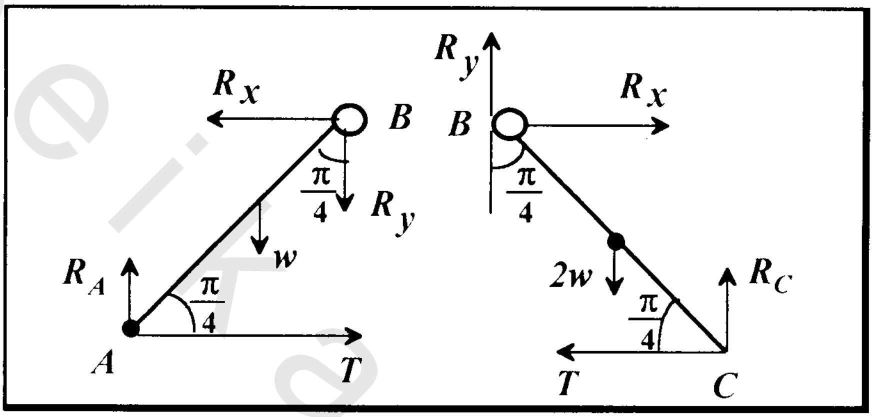
$$2\left(\frac{3w}{4}\right)-2R_y=2w \;\Rightarrow\; R_y=-\frac{1}{4}w$$

وإذا رمزنا إلى رد فعل المفصل عند B بالرمز R_B فسوف نجد أن

$$R_B=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{\left(\frac{3w}{4}\right)^2+\left(\frac{w}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}w$$

انظر شكل (4.3).

شكل 4.3



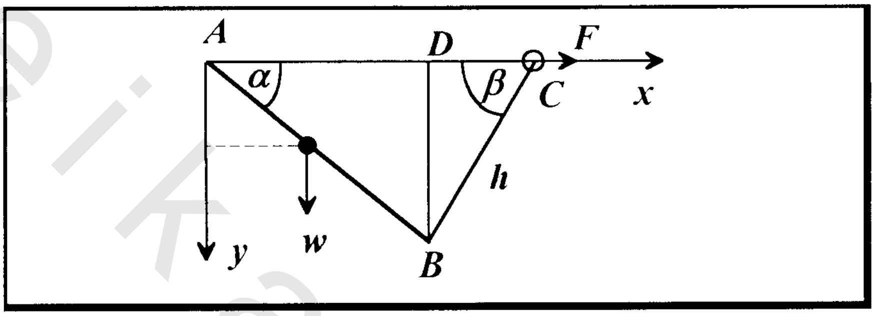
✍.

مثال 4.3 قضيب AB قابل للحركة عند نقطة A، وطرفه الآخر B مربوط بخيط طوله h، ومتصل بحلقة تنزلق على سلك أفقي أملس عند C كما هو في شكل (4.4). اثبت أن القوة الأفقية اللازمة لحفظ المجموعة في حالة اتزان هي $F=\dfrac{w\cos(\alpha)\cos(\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

الحل نفرض أن طول القضيب هو $2l$، وأن وزنه هو w. نفرض - أيضاً ــ أن القوة الأفقية اللازمة لحفظ المجموعة في حالة اتزان هي $\vec{F}$.

نفرض أن المجموعة حدثت لها إزاحة بسيطة، بحيث أن AC قد استطال قليلاً بحيث أن الخيط أصبح يصنع الزاوية β مع الأفقي. وأن القضيب أصبح يصنع الزاوية α مع الأفقي. القوى التي تبذل شغلاً هي القوة الأفقية F، بالإضافة إلى وزن القضيب w. انظر شكل (4.4).

شكل 4.4



معادلة الشغل الافتراضي هي

$$Fd(AC) + wd(l\sin(\alpha)) = 0$$

أو

$$Fd(2l\cos(\alpha) + h\cos(\beta)) + wd(l\sin(\alpha)) = 0$$

وبإجراء عملية التفاضل، إذن

$$F(-2l\sin(\alpha)d\alpha - h\sin(\beta)d\beta) + w(l\cos(\alpha)d\alpha) = 0 \qquad \text{(i)}$$

ولكن، وبما أن

$$BD = 2l\sin(\alpha) = h\sin(\beta)$$

أي أن

$$2l\sin(\alpha) = h\sin(\beta)$$

إذن، بتفاضل الطرفين ـ بالنسبة إلى α ـ نحصل على

$$2l\cos(\alpha) = h\cos(\beta)\ \frac{d\beta}{d\alpha}$$

وبالتالي نجد أن

$$d\beta = \frac{2l\cos(\alpha)}{h\cos(\beta)}d\alpha \qquad \text{(ii)}$$

وبالتعويض عن (ii) في (i) وحيث أن $d\alpha \neq 0$، إذن، وبالقسمة على $d\alpha$، وأيضاً بالقسمة على l نجد أن معادلة الشغل الافتراضي تأخذ الصورة

$$F\left(-2\sin(\alpha) - \sin(\beta)\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta}\right) - w\cos(\alpha) = 0$$

أو

$$-2F\left(\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}\right) + w\cos(\alpha) = 0$$

أو

$$-2F\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\beta)}\right) + w\cos(\alpha) = 0$$

وبالتالي فإن

$$F = \frac{w\cos(\alpha)\cos(\beta)}{2\sin(\alpha+\beta)}$$

✍.

4.2 مسائل

(1) يتكون الشكل الرباعي $ABCD$ من أربع قضبان منتظمة ومتصلة ببعضها بمفصلات ملساء في أطرافها، وبحيث يكون $AB = AD$، $BC = CD$. علق الهيكل في نقطة A، وربط الطرف A بالطرف C بواسطة خيط خفيف، بحيث أن الزاوية ABC أصبحت قائمة. اثبت في وضع الاتزان أن الشد في الخيط يساوي

$$T = w_2 + (w_1 + w_2)\sin^2(\theta)$$

(2) إذا ارتكز طرفا قضيب متزن على مستويين أملسين يميلان بزاويتين α, β على الأفقي، وكان خط تقاطع المستويين أفقيا. فاثبت أن ميل القضيب على الأفقي هو $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{2\sin(\alpha)\sin(\beta)}\right)$.

(3) يتكون سداسي منتظم $ABCDHO$ من ستة قضبان ثقيلة متساوية في الطول والوزن، ومتصلة اتصالاً سهلاً عند أطرافها. فإذا علق الشكل

من النقطة A، واحتفظ السداسي بشكله بواسطة قضيب خفيف AD. في وضع الاتزان أوجد الضغط في القضيب AD.

(4) علقت نصف كرة مصمتة على حافة قاعدتها المستوية، والطرف الآخر من الخيط مثبت في نقطة على حائط رأسي أملس بحيث يكون الجزء المنحني من الكرة ملاصقاً للحائط. إذا كانت θ, ϕ هما زاويتا ميل الخيط والقاعدة المستوية على الرأسي. اثبت أن $\tan(\varphi) - \tan\theta = \frac{3}{8}$.

(5) يتصل القضيبان AB, AC المتظمان والمتساويان في الطول والوزن اتصالاً مفصلياً سهلاً عند A. وضع القضيبان في وضع متماثل في مستوى رأسي على محيط سلك أملس على شكل دائرة رأسية نصف قطرها يساوي ربع طول أي من القضيبين، بحيث كانت نقطة A رأسياً فوق مركز السلك الدائري. اثبت في حالة الاتزان أن $2\sin^3(\theta) = \cos(\theta)$.

(6) علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها w، وطول ضلعها l بأربع خيوط رأسية، طول كل منها ثابت ويساوي l_1. فإذا علقت الصفيحة من رؤوس المربع إلى أربع نقط ثابتة في مستوى أفقي. أوجد الازدواج اللازم للاحتفاظ بالصفيحة في وضع يميل بالزاوية θ على وضع الاتزان.

****