الباب
1

المتجهات
Vectors

في الطبيعة يمكن أن نجد كميات نحتاج لتعريفها ووصفها إلى معرفة مقدارها *(Magnitude)* فقط، مثل الطول، المساحه، الكتلة، الحجم، درجة الحرارة. هذه الكميات عادة تسمى كميات قياسية *(Scalars)*.
كما يمكن أن نجد كميات نحتاج لتعريفها ووصفها إلى معرفة مقدارها واتجاهها *(Direction)* معاً، مثل القوة التي تؤثر على جسم مادي فتسبب له الحركة، حيث يكون لهذه القوة مقدار واتجاه، أيضاً نجد أن السرعة لها مقدار واتجاه. في الواقع أن مثل هذه الكميات تسمى متجهات *(Vectors)*.
هذا، ويمكن تمثيل المتجه ـ هندسياً ـ بخط مستقيم محدود الطول، طوله يعبر عن مقدار المتجه، أما اتجاهه فيعبر عنه اتجاه الخط نفسه. ويرمز للمتجه إما بالحروف الثقيلة *(Bold)*، أو بوضع سهم فوق الحرف. كما أن للمتجهات جبراً خاصاً بها، فعمليات الجمع، والطرح، والضرب بالنسبة للمتجهات تختلف تماماً عن تلك العمليات الجبرية الخاصة بالأعداد.

1.1 جبر المتجهات ـ *The Algebra of Vectors*

نقدم في هذا الفصل بعض العمليات الجبرية الخاصة بالمتجهات مثل عملية جمع المتجهات *(Addition of Vectors)*، وطرح المتجهات *(Subtraction of Vectors)*، أيضاً نقدم المفاهيم والتعريفات الهامة مثل

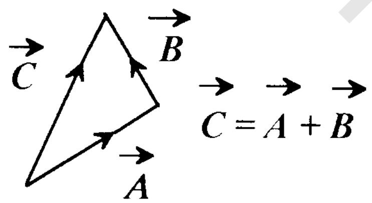
ضـــرب المتجـــه في مقـــدار قياســـي، وكذلـــك عمليـــة الضـــرب القياسي *(Scalar Multiplication)* الثنائي، وعملية الضرب القياسى الثلاثي، وعملية الضرب الاتجاهي *(Vector Multiplication)* الثنـائي، وعملية الضرب الاتجاهي الثلاثي.

تعريف 1.1 جمع المتجهات

حيث إن المتجهات لاتمثل أعداداً جبرية فقط وإنما تعبر ـ أيضاً ـ عن اتجاهات، لذا فإن جمع المتجهات يخضع لقواعد جمع المسافات (قاعده المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع). وعلى هذا يمكن جمع المتجه $\vec{A}$ والمتجه $\vec{B}$ مثلاً كما هو في شكل (1.1)، لنجد أن حاصل جمعهما هو المتجه $\vec{C}$ بحيث أن

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.1}$$

شكل 1.1



جمع المتجهات

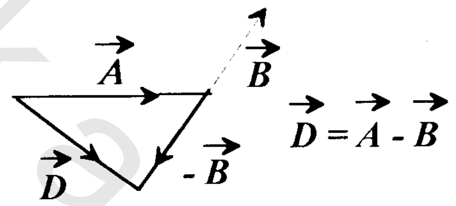
.✍

تعريف طرح المتجهات
1.2

يمكن طرح المتجهين $\vec{B}$ ، $\vec{A}$ - مثلاً - كما هو في شكل (1.2) لنجد أن حاصل طرحهما هو المتجه $\vec{D}$ بحيث يكون

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right) \tag{1.2}$$

شكل 1.2



طرح المتجهات

✍.

ملاحظة لاحظ أن

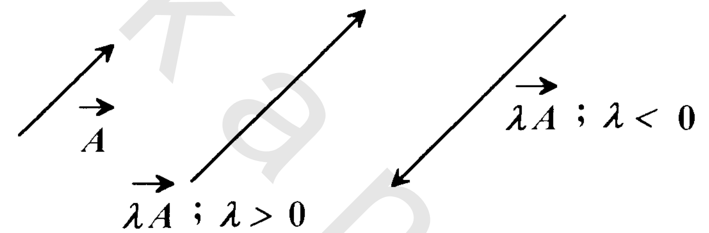
$$\vec{B} + \left(-\vec{B}\right) = 0 \tag{1.3}$$

تعني أن 0 هو المتجه الصفري *(Zero Vector)*، وهوالمتجه الذي مقداره صفر، واتجاهه غير معين.

تعريف ضرب المتجه في مقدار قياسي 1.3

إذا كان $\vec{A}$ متجهاً، λ مقداراً قياسياً فإن الكمية المتجهة $\lambda\vec{A}$ تعبر عن حاصل ضرب المتجه $\vec{A}$ في المقدار القياسي λ. ويكون $\lambda\vec{A}$ هو متجه له نفس اتجاه $\vec{A}$ إذا كانت $\lambda > 0$ وفي عكس اتجاه $\vec{A}$ إذا كانت $\lambda < 0$، أما مقداره فهو $|\lambda\vec{A}|$. انظر شكل (1.3).

شكل 1.3



ضرب المتجه $\vec{A}$ فى الكمية القياسية λ

✍.

تعريف متجه الوحدة - *Unit Vector* 1.4

يعرف متجه الوحدة لأي متجه على أنه متجه مقداره الوحدة، واتجاهه هو نفس اتجاه المتجه الأصلي.

✍.

فإذا كان المتجه $\vec{A}$ متجهاً غير صفري، فإن متجه الوحدة في اتجاه $\vec{A}$ ـ ويرمز له بالرمز $\hat{A}$ ـ هو متجه مقداره الوحدة واتجاهه هو نفس اتجاه المتجه الأصلي $\vec{A}$ أي أن متجه وحدة المتجه $\vec{A}$ هو المتجه

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} \quad ; \quad A = \left|\vec{A}\right| \tag{1.4}$$

نظرية 1.5 إذا كانت $\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{C}$ متجهات غير صفرية، فإن العلاقات الآتية كلها صحيحة.

(1) قانون الادماج *(Associative Law)*

$$\vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} \tag{1.5}$$

(2) قانون التوزيع *(Distributive Law)*

$$\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\vec{A} = \lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{A} \tag{1.6}$$

(3) قانون التباديل *(Commutative Law)*

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.7}$$

✍.

1.2 تمثيل المتجه في الفضاء ثلاثي الابعاد R^3

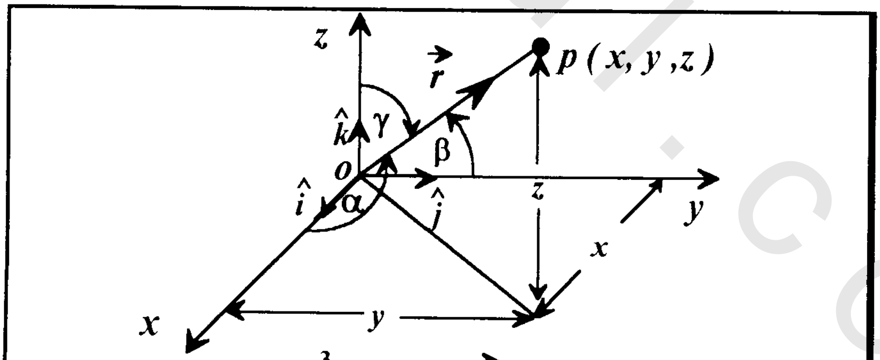
لتمثيل المتجه $\vec{r}$ ـ مثلاً ـ في الإحداثيات الكارتيزية في الفضاء الثلاثي، نفرض في البداية أن المتجهات $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ هي متجهات الوحدة في الاتجاه الموجب للمحاور الأساسية ox, oy, oz، وهذه المحاور بالطبع متعامدة وتخضع لقاعدة اليد اليمنى أو قاعدة البريمة. إذن فإن المتجه $\vec{r}$ يمكن تمثيله في الإحداثيات الكارتيزية في الفضاء الثلاثي كما في شكل (1.4) ليأخذ الصورة

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.8}$$

حيث x, y, z هي مركبات المتجه $\vec{r}$ في اتجاه المحاور الأساسية. أما مقدار المتجه فهو الكمية

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} \tag{1.9}$$

شكل 1.4



تمثيل المتجه $\vec{r}$ في الفضاء R^3

تعريف متجه الموضع ـ *Position Vector*
1.6

المتجه $\vec{r}$ الذي يحدد موضع النقطة $p(x, y, z)$ في الفضاء R^3، حيث نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل يسمى "متجه الموضع".

✍.

تعريف زوايا الاتجاه ـ *Directional Angels*
1.7

الزوايا α, β, γ التي يصنعها المتجه $\vec{r} = \vec{op}$ مع المحاور الأساسية الكارتيزية ox, oy, oz ـ على الترتيب ـ تسمى "زاويا الاتجاه". هذه الزاويا الاتجاهية تقاس من المحاور الأساسية إلى المتجه $\vec{r}$. لاحظ ـ أيضاً ـ أن كل زاوية اتجاهية تنتمي إلى النطاق $[0, \pi]$.

✍.

انتبه!

في كثير من الأحيان يكون من المناسب التعبير عن المتجه بدلالة مركباته وذلك للاختصار، فمثلاً المتجه $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ في الفضاء الثلاثي يمكن أن يكتب في الصورة

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \qquad (1.10)$$

نظرية 1.8 إذا كانت النقطتان $P_1(x_1,y_1,z_1),\ P_2(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين في الفضاء الثلاثي فإن المتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ يُعرف على أنه المتجه

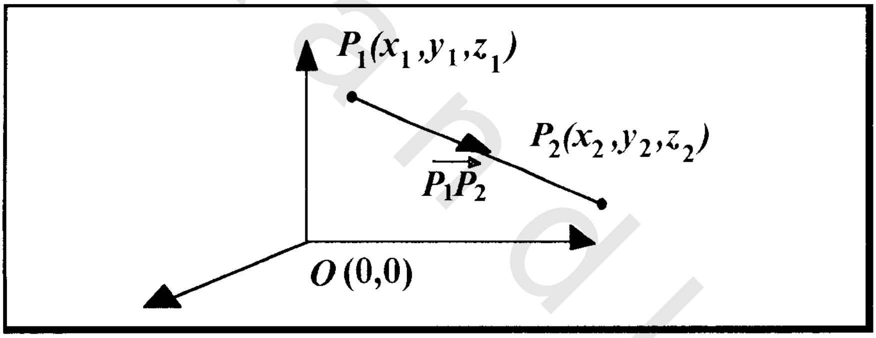
$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k} \tag{1.11}$$

ويكون مقداره هو

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.12}$$

انظر شكل (1.5).

شكل 1.5



✍.

1.3 جيوب التمام الاتجاهية - Direction Cosines

للحصول على جيوب التمام الاتجاهية $\cos(\alpha),\ \cos(\beta),\ \cos(\gamma)$ للمتجه $\vec{r}$ ، نجد - أولاً - من شكل (1.4) أن المتجه $\vec{r}$ يمكن تمثيله في الفضاء الثلاثي في الصورة

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1.13}$$

حيث

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} \tag{1.14}$$

حيث x, y, z هي مركبات المتجه $\vec{r}$. كذلك نجد من الرسم في (1.4) أن

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r}, \quad \cos(\beta) = \frac{y}{r}, \quad \cos(\gamma) = \frac{z}{r} \tag{1.15}$$

بالتربيع، والجمع نجد أن

$$\boxed{\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = 1} \tag{1.16}$$

أيضاً من (1.15) نجد أن

$$\boxed{x = r\cos(\alpha), y = r\cos(\beta), z = r\cos(\gamma)} \tag{1.17}$$

بالتعويض من (1.17) في (1.13) نجد أن

$$\vec{r} = (r\cos(\alpha))\hat{i} + (r\cos(\beta))\hat{j} + (r\cos(\gamma))\hat{k}$$

أو

$$\vec{r} = r\left(\cos(\alpha)\hat{i} + \cos(\beta)\hat{j} + \cos(\gamma)\hat{k}\right) \tag{1.18}$$

وهذه صورة أخرى يمكن بها التعبير عن المتجه $\vec{r}$ بدلالة جيوب التمام الاتجاهية وليس بدلالة مركباته. هذا، ومن (1.18) يمكن ـ أيضاً ـ الحصول على شكل وحدة المتجه $\vec{r}$ بدلالة جيوب التمام الاتجاهية ليأخذ الصورة

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \left(\cos(\alpha)\right)\hat{i} + \left(\cos(\beta)\right)\hat{j} + \left(\cos(\gamma)\right)\hat{k} \tag{1.19}$$

الأمر الذي يعني أن جيوب تمام الاتجاه لأي متجه $\vec{r}$ هي عبارة عن مركبات متجه الوحدة له مع المحاور الأساسية.

1.4 ضرب المتجهات . *Product of Vectors*

بسبب الأختلاف الجذري للمتجهات عن الأعداد فإن عمليات ضرب الأعداد لاتصلح للمتجهات، ولذا يجب تعريف عمليات ضرب تصلح للتعامل مع المتجهات ـ مع الأخذ في الأعتبار أن المتجه يتكون من مقدار واتجاه.

في هذا الفصل سنعرف أربعة أنواع من عمليات الضرب الخاصة بالمتجهات. النوع الأول من هذا الضرب يسمى " الضرب القياسي

(Scalar Product)" ويكون الناتج كمية قياسية. والنوع الثاني من ضرب المتجهات يعرف باسم "الضرب الاتجاهي *(Vector Product)*" ويكون الناتج كمية متجهة. أما النوع الثالث فيعرف باسم "الضرب الثلاثي القياسي *(Triple Scalar Product)*"، وأما النوع الرابع من ضرب المتجهات فهو المعروف باسم "الضرب الاتجاهي الثلاثي *(Triple Vector Product)*".

1.9 تعريف الضرب القياسي لمتجهين

لنفرض أن المتجهات $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ هي متجهات الوحدة في اتجاه المحاور $ox,\ oy,\ oz$ على الترتيب، ولنعتبر المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ كما في الصورة (1.20)، حيث

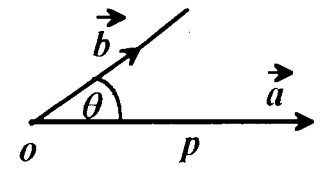
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \qquad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k} \tag{1.20}$$

يُعرَّف حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ ـ ويرمز له بالرمز $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ـ على أنه الكمية القياسية

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\ \cos(\theta)} \tag{1.21}$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{a}\,,\vec{b}$ ، كما أن $a = |\vec{a}|$ هو مقدار المتجه $\vec{a}$ ، أما $b = |\vec{b}|$ فهو مقدار المتجه $\vec{b}$.

شكل 1.6



✍ .

ملاحظة

(1) نلاحظ أن الكمية $ab\ \cos(\theta)$ هي كمية قياسية أي أن $\vec{a}\cdot\vec{b} = scalar$. كما نلاحظ أن op يمثل مسقط المتجه $\vec{b}$ على المتجه $\vec{a}$.

(2) نلاحظ ـ أيضاً ـ أنه إذا كان $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ فهذا يعني أن هناك ثلاثة احتمالات:

الاحتمال الأول: هو أن المتجه $\vec{a}$ متجه صفري، والمتجه $\vec{b}$ متجه غير صفري.

الاحتمال الثاني: هو أن المتجه $\vec{b}$ هو المتجه الصفري والمتجه $\vec{a}$ متجه غير صفري.

الاحتمال الثالث: هو أن الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $\vec{a}\,,\vec{b}$ زاوية قائمة، بمعنى أن المتجه $\vec{a}$ يكون عمودياً على المتجه $\vec{b}$. في هذه الحالة فإن

$$\cos(\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

وباختصار فإن

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{a}=0 \\ or\;\; \vec{b}=0 \\ or\;\; \vec{a}\perp\vec{b} \end{cases} \tag{1.22}$$

1.5 الزاوية المحصورة بين متجهين

للحصول على الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $\vec{a}\,,\vec{b}$ نجد من الصورة (1.17) أن

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} \tag{1.23}$$

وبما أن

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}\right)\cdot\left(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\right)$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.24}$$

وذلك لأن

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \tag{1.25}$$

إذن فإن

$$\cos(\theta) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}} \tag{1.26}$$

1.6 خواص الضرب القياسي

إذا كانت المتجهات $\vec{a}, \ \vec{b}, \ \vec{c}$ متجهات غير صفرية، وكانت λ أية كمية قياسية فإن القوانين التالية كلها صحيحة ويمكن إثباتها

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \tag{1.27}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{1.28}$$

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c} \right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \tag{1.29}$$

$$\left(\lambda \vec{a}\right)\cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\cdot \vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\left(\lambda \vec{b}\right) \tag{1.30}$$

مثال 1.1 إذا أعطيت المتجهات

$$\vec{a} = 5\hat{i} - 4\hat{j},\quad \vec{b} = -3\hat{i} + 2\hat{j},\quad \vec{h} = 6\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k};$$

$$\vec{c} = -\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k},\quad \vec{d} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

فأوجد: (1) المتجه $3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. (2) متجهات الوحدة للمتجه $\vec{c}$، وكذلك المتجه $\vec{b} + 2\vec{c}$. (3) مقدار المتجه $\vec{c} + \vec{d}$. (4) زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{a} + \vec{d}$. (5) الزاوية بين المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$. (6) اثبت أن المتجهين $\vec{h}, \vec{d}$ متوازيان.

الحل (1)

$$3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \left(15\hat{i} - 12\hat{j} + 0\hat{k}\right) + \left(-3\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}\right)$$

$$+\left(\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}\right) = 13\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k}$$

(2)

$$c = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11} \Rightarrow \hat{c} = \frac{\vec{c}}{c} = \frac{1}{\sqrt{11}}\left(-\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}\right)$$

(3)

$$\vec{c} + \vec{d} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \Rightarrow \left| \vec{c} + \vec{d} \right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

(4) بما أن

$$\vec{a} + \vec{d} = 8\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k} \quad , \quad \left| \vec{a} + \vec{d} \right| = \sqrt{68}$$

إذن، من (1.15) يمكن أن نحصل على

$$\cos(\alpha) = \frac{8}{\sqrt{68}} \quad , \cos(\beta) = \frac{0}{\sqrt{68}} \quad , \cos(\gamma) = \frac{-2}{\sqrt{68}}$$

(5) للحصول على الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $\vec{a}\,,\,\vec{b}$ نجد من (1.26) أن

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{\left(5\hat{i} - 4\hat{j}\right) \cdot \left(-3\hat{i} + 2\hat{j}\right)}{\left(\sqrt{25+16}\right)\left(\sqrt{9+4}\right)} = \frac{-15-8}{\sqrt{41}\sqrt{13}}$$

وبالتالي فإن

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-23}{\sqrt{41}\sqrt{13}}\right)$$

(6) بما أن

$$\hat{d} = \frac{\vec{d}}{d} = \frac{1}{\sqrt{29}}\left(3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}\right)$$

$$= \cos(\alpha_1)\hat{i} + \cos(\beta_1)\hat{j} + \cos(\gamma_1)\hat{k} \qquad \text{(i)}$$

وبما أن

$$\hat{h} = \frac{\vec{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{116}}\left(6\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}\right)$$

$$= \cos(\alpha_2)\hat{i} + \cos(\beta_2)\hat{j} + \cos(\gamma_2)\hat{k} \qquad \text{(ii)}$$

إذن، من (ii) ,(i) نجد أن

$$\cos(\alpha_1) = \frac{3}{\sqrt{29}}, \ \cos(\alpha_2) = \frac{6}{\sqrt{116}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

وبالتالي فإن

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

أيضاً فإن

$$\cos(\beta_1) = \frac{4}{\sqrt{29}}, \ \cos(\beta_2) = \frac{8}{\sqrt{116}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

إذن

$$\beta_1 = \beta_2$$

وأخيراً فإن

$$\cos(\gamma_1) = \frac{-2}{\sqrt{29}}, \quad \cos(\gamma_2) = \frac{-4}{\sqrt{116}} = \frac{-2}{\sqrt{29}}$$

إذن

$$\gamma_1 = \gamma_2$$

الأمر الذي يعني أن زوايا الاتجاه لكل من المتجهين $\vec{h}, \vec{d}$ كلها متساوية، وبالتالي فإن المتجهين متوازيان.

طريقة أخرى

لإثبات توازي المتجهين $\vec{h}, \vec{d}$ نثبت أن الزاوية المحصورة بينهما صفر. للحصول على الزاوية المحصورة بينهما نجد من (1.26) ـ باعتبار أن الزاوية بينهما ϕ ـ أن

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{h} \cdot \vec{d}}{hd}$$

$$= \frac{\left(6\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}\right) \cdot \left(3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}\right)}{\left(\sqrt{36 + 64 + 16}\right)\left(\sqrt{9 + 16 + 4}\right)} = \frac{18 + 32 + 8}{\sqrt{116}\sqrt{29}} = 1$$

وبالتالي فإن

$$\phi = \cos^{-1}(1) = 0$$

إذن فإن المتجهين $\vec{h}, \vec{d}$ متوازيان.

مثال 1.2 إذا كان

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \quad \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$$

أوجد قيمة λ بحيث يكون المتجه $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ عمودياً على المتجه $\vec{c}$.

الحل بما أن

$$\vec{a} + \lambda\vec{b} = (1-\lambda)\hat{i} + (2+2\lambda)\hat{j} + (3+\lambda)\hat{k}$$

وحيث إن المتجه $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ هو متجه عمودي على المتجه $\vec{c}$ ، إذن فإن حاصل ضربهما القياسي يساوي الصفر، أي أن

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} + \lambda\vec{b}\right) = 0$$

أو

$$\left(3\hat{i} + \hat{j}\right) \cdot \left((1-\lambda)\hat{i} + (2+2\lambda)\hat{j} + (3+\lambda)\hat{k}\right) = 0$$

أو

$$3(1-\lambda) + (2+2\lambda) = 0$$

وبالتالي فإن

$$3 - 3\lambda + 2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 5$$

✍.

مثال 1.3 أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ إذا كان

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0\ ;\quad |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ |\vec{c}|=7$$

الحل بما أن

$$\cos(\theta)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{3\times 5}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{15} \tag{i}$$

وحيث أن

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$$

إذن فإن

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(-\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\vec{c}=c^2 \tag{ii}$$

ولكن لدينا

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=a^2+b^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right) \tag{iii}$$

إذن، من (ii), (iii)، ومع ملاحظة أن

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$$

نجد أن

$$a^2 + b^2 + 2\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = c^2 \qquad \text{(iv)}$$

ومنها نجد أن

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 - a^2 - b^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(49 - 9 - 25) = \frac{15}{2}$$

وبالتعويض في (i) نحصل على

$$\cos(\theta) = \frac{15/2}{15} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

✍.

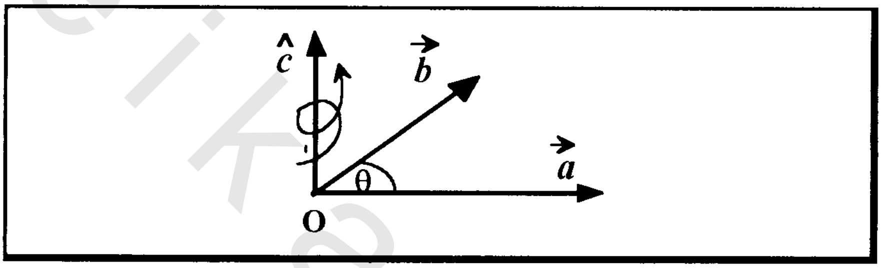
تعريف الضرب الاتجاهي لمتجهين – Vector Product 1.10

يعرِّف حاصل الضرب الاتجـاهي *(Cross Product)* للمتجهـين $\vec{a}\,,\,\vec{b}$

على أنه المتجه $\vec{c}$ ، والذي ُيعطى بالعلاقة

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = ab\sin(\theta)\hat{c}} \qquad (1.31)$$

حيث $\hat{c}$ هو متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يجمع المتجهين $\vec{a} , \vec{b}$ في اتجاه إبهام اليد اليمنى عندما تدور أصابع هذه اليد من المتجه $\vec{a}$ إلى المتجه $\vec{b}$ ، أو في اتجاه البريمة حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{a} , \vec{b}$. انظر شكل (1.7).



شكل 1.7

1.7 بعض نتائج الضرب الاتجاهي

إذا كان

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k} \tag{1.32}$$

متجهين غير صفريين فإن القوانين التالية كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1.33}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|}{ab} \tag{1.34}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \tag{1.35}$$

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = ab\sin(\theta) = \Delta \tag{1.36}$$

حيث Δ هي مساحة متوازي الأضلاع الذي ضلعاه هما المتجهان $\vec{a}, \vec{b}$.

$$\hat{i} \wedge \hat{i} = \hat{j} \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{k} = 0 \tag{1.37}$$

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k} \;,\quad \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i} \;,\quad \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j} \tag{1.38}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} = 0, \;\text{ or }\; \vec{b} = 0, \;\text{ or }\; \vec{a} \,//\, \vec{b} \tag{1.39}$$

إذا كانت القيم (a_x, a_y, a_z) هي مركبات المتجه $\vec{a}$ ، وكانت (b_x, b_y, b_z) هي مركبات المتجه $\vec{b}$ ، فإن شرط توازي المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ هو

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \tag{1.40}$$

إثبات الخاصية رقم (1.33)

نفرض المتجهين

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \quad , \quad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

إذن، فإن حاصل ضربهما الاتجاهي هو المتجه $\vec{c}$ ، حيث نجد أنه

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\right) \wedge \left(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}\right)$$

$$= \left(a_x b_x\right)\left(\hat{i} \wedge \hat{i}\right) + \left(a_x b_y\right)\left(\hat{i} \wedge \hat{j}\right) + \left(a_x b_z\right)\left(\hat{i} \wedge \hat{k}\right)$$

$$+\left(a_y b_x\right)\left(\hat{j} \wedge \hat{i}\right) + \left(a_y b_y\right)\left(\hat{j} \wedge \hat{j}\right) + \left(a_y b_z\right)\left(\hat{j} \wedge \hat{k}\right)$$

$$+\left(a_z b_x\right)\left(\hat{k} \wedge \hat{i}\right) + \left(a_z b_y\right)\left(\hat{k} \wedge \hat{j}\right) + \left(a_z b_z\right)\left(\hat{\hat{j}} \wedge \hat{k}\right)$$

ومن المعادلات (1.38), (1.37), (1.35) نجد أن

$$\left(\hat{j} \wedge \hat{i}\right) = -\hat{k},\ \left(\hat{k} \wedge \hat{i}\right) = -\hat{j},\ \left(\hat{k} \wedge \hat{j}\right) = -\hat{i}\ ;$$

$$\left(\hat{i} \wedge \hat{j}\right) = \hat{k}, \left(\hat{i} \wedge \hat{k}\right) = \hat{j}, \left(\hat{j} \wedge \hat{k}\right) = \hat{i}$$

وبالتالي فإن

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_x b_y\right)\left(\hat{k}\right) + \left(a_x b_z\right)\left(\hat{j}\right)$$

$$+\left(a_y b_x\right)\left(-\hat{k}\right) + \left(a_y b_z\right)\left(\hat{i}\right) + \left(a_z b_x\right)\left(-\hat{j}\right) + \left(a_z b_y\right)\left(-\hat{i}\right)$$

وبالترتيب نجد أن

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{i} - \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{j}$$

$$+\left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k}$$

وباستخدام تعريف المحدد *(Determinant)* من الدرجة الثالثة يمكن التعبير عن حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{a}, \vec{b}$ في الصورة (1.33).

مثال 1.4 اثبت أن

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)^2 = a^2 b^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$

الحل بما أن

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$$

$$= \left|ab\sin(\theta)\hat{n}\right|^2 = \left(ab\sin(\theta)\right)^2 = a^2b^2\left(1 - \cos^2(\theta)\right)$$

$$= a^2b^2 - \left(ab\cos(\theta)\right)^2 = a^2b^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$

إذن فإن

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)^2 = a^2b^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$

✍.

مثال 1.5 إذا كان

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}\,; \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c}\,; \quad \vec{a} \neq 0$$

فاثبت أن $\vec{b} = \vec{c}$.

الحل بما أن

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \quad ; \quad \vec{a} \neq 0$$

ومن قانون التوزيع (1.6) نجد أن

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=0\Rightarrow\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$$

وبالتالي ولأن $\vec{a}\neq 0$ ، فيوجد لدينا فقط احتمالان: الاحتمال الأول هو أن

$$\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$$

الاحتمال الثاني هو أن الكمية المتجهة $\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$ عمودية على المتجه $\vec{a}$. ولكن، وبما أنه من معطيات المثال لدينا

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{c}\quad;\quad\vec{a}\neq 0$$

إذن

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$$

ولأن $\vec{a}\neq 0$ فيوجد لدينا أيضاً احتمالان فقط : الاحتمال الأول هو أن يكون

$$\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=0$$

والاحتمال الثاني هو أن يوازي المتجه $\vec{a}$ الكمية المتجهة $\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$.

إذن، بالمقارنة والمنطق ينتج أن $0=\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$ وبالتالي فإن $\vec{b}=\vec{c}$.

✍.

مثال 1.6 أوجد متجه الوحدة العمودي على كل من المتجهين

$$\vec{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k},\quad \vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$$

الحل بما أن حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين هو ـ أيضاً ـ متجهٌ عمودي على المستوى الذي يجمع كلا المتجهين. إذن فإن $\hat{c}$ هو متجه الوحدة العمودي على كل من $\vec{a},\vec{b}$، حيث

$$\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=-4\hat{i}-8\hat{j}-4\hat{k}$$

إذن متجه الوحدة المطلوب هو

$$\hat{c}=\frac{\vec{c}}{c}=\frac{-4\hat{i}-8\hat{j}-4\hat{k}}{\sqrt{16+64+16}}=\frac{-1}{\sqrt{6}}\left(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)$$

✍.

تعريف الضرب الثلاثي القياسي – Triple Scalar Product 1.11

يعرف حاصل الضرب الثلاثي القياسي على أنه حاصل الضرب القياسي لمتجهين أحدهما هو نفسه حاصل ضرب اتجاهي لمتجهين أخريين، ويعبر عن ذلك ـ رياضيا ـ في الصورة الرياضية

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}= \text{كمية قياسية} \tag{1.41}$$

وهذا يمثل ـ هندسياً ـ حجم متوازي السطوح الذي أحرفه هي الأضلاع $\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}$. لاحظ ــ أيضــاً ــ أن شــرط وقــوع المتجهــات الثلاثــة $\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}$ في مستوى واحد هو

$$\boxed{\vec{a}\,.\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=0} \tag{1.42}$$

تعريف الضرب الثلاثي الاتجاهي – Triple Vector Product 1.12

يعرف حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي على أنه حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين أحدهما هو نفسه حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين أخريين. ويمكن كتابة ذلك في الصور الآتية

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{c} \qquad (1.43)$$

$$\left(\vec{b} \wedge \vec{c} \right) \wedge \vec{a} = \left(\vec{b} \cdot \vec{a} \right) \vec{c} - \left(\vec{c} \cdot \vec{a} \right) \vec{b} \qquad (1.44)$$

✍.

إثبات **الصورة رقم** (1.44)

من الصورة رقم (1.43) نجد أن

$$\left(\vec{b} \wedge \vec{c} \right) \wedge \vec{a} = - \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c} \right) =$$

$$= - \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{c}$$

$$= \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{c} - \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \vec{b}$$

مثال 1.7 أوجد طول العمود الساقط من النقطة $A(-1,1,1)$ على المستقيم الواصل من النقطة $B(2,-1,-2)$ إلى النقطة $D(1,3,1)$.

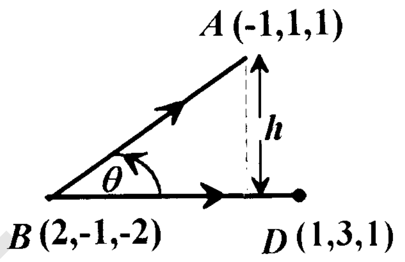
الحل بما أن

$$\vec{BD} \wedge \vec{BA} = (BD)(BA)\sin(\theta)\, \hat{n}$$

حيث $\hat{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على كل من المتجهين $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}$.

انظر شكل (1.8).

شكل 1.8



من شكل (1.8) نجد أن

$$h = (BA)\sin(\theta)$$

وبالتالي فإن

$$\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA} = (BD)h\,\hat{n}$$

أو

$$\left|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA}\right| = \left|(BD)h\,\hat{n}\right| = (BD)h$$

وهكذا نجد أن

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA}\right|}{BD}$$

وبما أن

$$\overrightarrow{BD} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} \quad , \quad \overrightarrow{BA} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

إذن

$$\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k},$$

$$\left| \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA} \right| = \sqrt{172}$$

وبالتالي فإن

$$h = \frac{\left| \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA} \right|}{BD} = \frac{\sqrt{172}}{\sqrt{26}} = 2.5720$$

.✍

1.8 معادلات الخط المستقيم في الفضاء الثنائي الابعاد

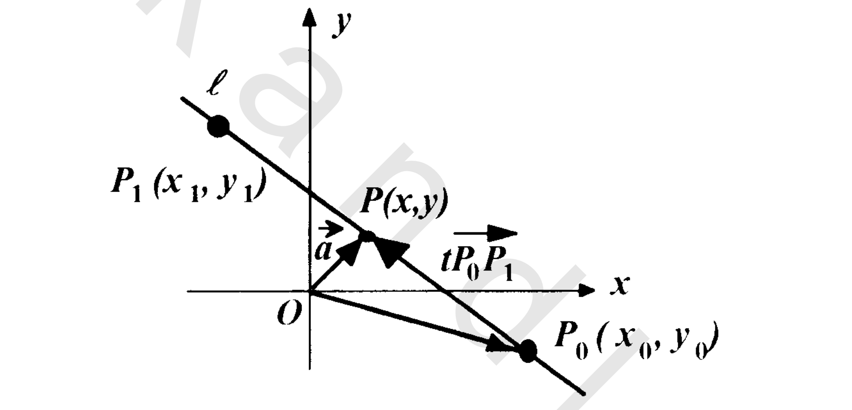
في هذا الفصل نحاول التعرف على معادلة الخط المستقيم في الفضاء الثنائي *(Line in 2-Dimensional Space)* أو المستوى وذلك في صورتين : الصورة الأولى هي المعادلة الاتجاهية *(Vector Equation)*، والصورة الثانية هي المعادلة البارامترية *(Parametric Equation)*.

أولاً المعادلة الاتجاهية ـ Vector Equation

دعنا نجتهد الآن في إيجاد المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم بمعلومية نقطتين واقعتين عليه.

نفرض الخط المستقيم ℓ في الفضاء الثنائي (أو المستوى R^2)، ولنفرض أنه يمر بالنقطتين $P_0(x_0, y_0)$ $P_1(x_1, y_1)$، ولنفرض ـ أيضاً ـ أن $P(x, y)$ هي أية نقطة اختيارية واقعة عليه، ولنفرض أن $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ كما في شكل (1.9).

شكل 1.9



المعادلة الاتجاهيه للخط المستقيم في R^2

من الرسم في شكل (1.9) نجد أن المتجه الذي يعبر عن المتجه الذي له نفس اتجاه الخط المستقيم ℓ هو

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

هذا، ويمكن الوصول إلى النقطة $P(x,y)$ بالتحرك من النقطة O إلى النقطة $P_0(x_0,y_0)$، فنحصل على المتجه $\overrightarrow{OP_0}$، ثم نضيف إليه المتجه $t\,\overrightarrow{P_0P_1}$ (طوله يعتمد على مقدار t)، فنصل بذلك إلى النقطة $P(x,y)$، حيث t هو أي بارامتر *(Parameter)*.

ملاحظة

لأن النقطة $P(x,y)$ يمكن أن تكون أية نقطة على الخط المستقيم ℓ وليست نقطة بعينها فمن الضروري ضرب المتجه $\overrightarrow{P_0P_1}$ في العدد الحقيقي *(Real Number)* t.

وهكذا نجد أن

$$\vec{a} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\,\overrightarrow{P_0P_1}$$

وإذا فرضنا أن

$$\vec{a}_0 = \overrightarrow{OP_0}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$$

عندئذٍ فإن المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم ℓ تأخذ الصورة

$$\boxed{\vec{a} = t\,\vec{v} + \vec{a}_0} \tag{1.45}$$

حيث يسمى المتجه $\vec{v}$ "متجه الاتجاه" *(Direction Vector)* للخط المستقيم ℓ.

انظر

إلى التشابه بين المعادلة الاتجاهية $\vec{a} = t\,\vec{v} + \vec{a}_0$ ، والمعادلة القياسية *(Scalar Equation)* $y = mx + b$ حيث m هو الميل، أما b فهو الجزء المقطوع من محور ـ y.

ثانياً المعادلة البارامترية ـ Parametric Equation

للحصول على المعادلة البارامترية للخط المستقيم نجد أن المعادلة الاتجاهية (1.45) يمكن إعادة كتابتها في الصورة

$$x\hat{i} + y\hat{j} = t\left[(x_1 - x_0)\hat{i} + (y_1 - y_0)\hat{j}\right] + x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$$

$$= \left(t(x_1 - x_0) + x_0\right)\hat{i} + \left(t(y_1 - y_0) + y_0\right)\hat{j}$$

وبمقارنة طرفي هذه المعادلة المتجهة، نحصل على المعادلات البارامترية للخط المستقيم في الصورة التالية

$$\boxed{x = t(x_1 - x_0) + x_0, \quad y = t(y_1 - y_0) + y_0} \qquad (1.46)$$

بالطبع يمكن الحصول على الصورة القياسية لمعادلة الخط المستقيم في المستوى بمعلومية النقطتين $P_0(x_0, y_0),\ P_1(x_1, y_1)$ الواقعتين عليه، وذلك من الصورة البارامترية (1.46) بعد حذف البارامتر t، لنجدها في الصورة

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}} \tag{1.47}$$

مثال 1.8 أوجد المعادلات المتجهة، والبارامترية للخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1,1),(-2,5)$. استخدم - أولاً - النقطة $P_0=(1,1)$،ثم استخدم ثانياً النقطة $P_0=(-2,5)$.

الحل نفرض أن المتجه الذي يعبر عن الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1,1),(-2,5)$ هو المتجه $\vec{v}$. انظر شكل (1.10). إذن فإن

$$\vec{v}=(-2-1,5-1)=-3\hat{i}+4\hat{j}$$

ومن المعادلة المتجهة للخط المستقيم (1.45) - مع الأخذ في الاعتبار أن $P_0=(1,1)$ - نجد أن

$$\vec{a}=t_1(-3,4)+(1,1)$$

وبالتالي فإن المعادلة البارامترية تصبح

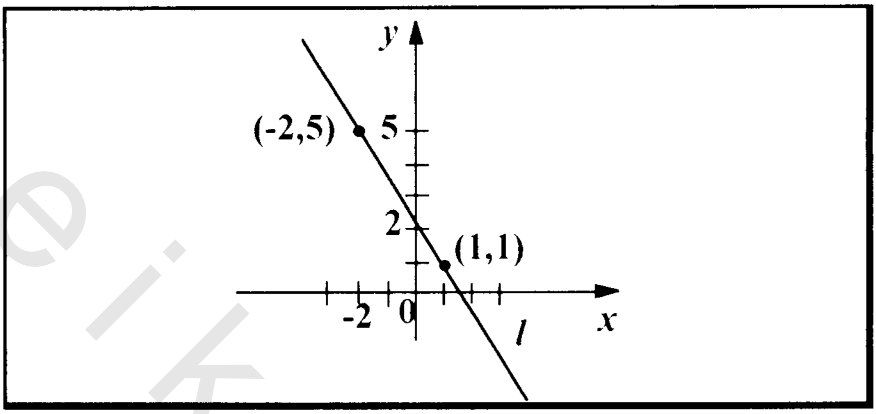
$$x=-3t_1+1\ ,\ \ y=4t_1+1 \tag{i}$$

أيضاً، من المعادلة المتجهه للخط المستقيم (1.45) - مع الأخذ في الاعتبار أن $P_0=(-2,5)$ - نجد أن

$$\vec{a}=t_2(-3,4)+(-2,5)$$

إذن المعادلة البارامترية تأخذ الصورة

$$x = -3t_2 - 2 \;,\; y = 4t_2 + 5 \qquad \text{(ii)}$$



شكل 1.10

✍.

نلاحظ

أن المعادلتين البارامتريتين (ii) ,(i) مختلفتان، ولكن إذا حذفنا البارامترين t_1, t_2 منهما فإن أية معادلة منهما تؤول إلى المعادلة الوحيدة $y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$، وهي المعادلة القياسية لهذا الخط المستقيم، ولهذا فإنه توجد للخط المستقيم الواحد أكثر من معادلة بارامترية، ولكن توجد معادلة واحدة قياسية على الصورة $y = mx + b$.

1.9 معادلات الخط المستقيم في الفضاء الثلاثي الابعاد

إذا أعطيت النقطتان $P_0(x_0, y_0, z_0), P_1(x_1, y_1, z_1)$ في الفضاء R^3، إذن فإن المتجه الذي يمر بهاتين النقطتين هو المتجه

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \left(x_1 - x_0 \,,\, y_1 - y_0 \,,\, z_1 - z_0\right) \qquad (1.48)$$

وتكون المعادلة المتجهه للخط المستقيم، الذي تقع عليه النقطتين P_0 , P_1 هي المعادلة

$$\vec{a} = t\,\vec{v} + \vec{a}_0$$

$$= t\left(x_1 - x_0 \,,\, y_1 - y_0 \,,\, z_1 - z_0\right) + \left(x_0 \,,\, y_0 \,,\, z_0\right) \qquad (1.49)$$

وعندئذٍ فإن المعادلات البارامترية الثلاث يمكن أن تأخذ الصورة

$$\begin{cases} x = t\left(x_1 - x_0\right) + x_0 \\ y = t\left(y_1 - y_0\right) + y_0 \\ z = t\left(z_1 - z_0\right) + z_0 \end{cases} \qquad (1.50)$$

أو

$$\begin{cases} x - x_0 = t\left(x_1 - x_0\right) \\ y - y_0 = t\left(y_1 - y_0\right) \\ z - z_0 = t\left(z_1 - z_0\right) \end{cases} \qquad (1.51)$$

وبحذف البارامتر t من هذه المعادلات نحصل على المعادلة القياسية للخط المستقيم في الصورة

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}} \qquad (1.52)$$

بشرط أن

$$x_1 - x_0 \neq 0, \quad y_1 - y_0 \neq 0, \quad z_1 - z_0 \neq 0$$

و إذا فرضنا أن

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \left(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\right) = \left(v_1, v_2, v_3\right)$$

حيث ترمز الكميات $\left(v_1, v_2, v_3\right)$ إلى مركبات متجه الاتجاه $\vec{v}$ ، إذن فإننا نحصل على

$$\boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_2}} \tag{1.53}$$

ملاحظات هامة

(1) نلاحظ أنه في حالة الفضاء الثنائي R^2 توجد معادلة قياسية واحدة هي المعادلة

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

أو

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\left(x - x_0\right) = m\left(x - x_0\right)$$

حيث m هو ميل الخط المستقيم. أما في حالة الفضـاء الثلاثـي R^3 فإنـه توجد معادلتان هما

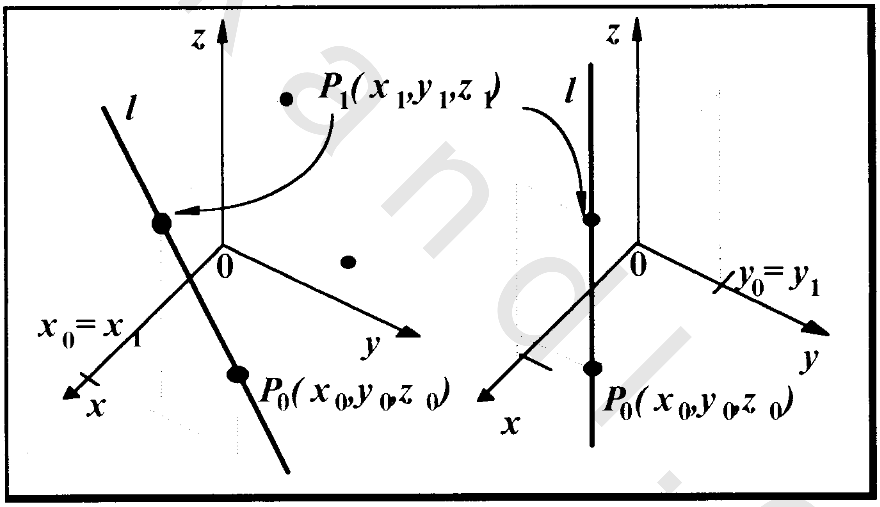
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

(2) إذا كان كل القيم $x_1 - x_0,\ \ y_1 - y_0,\ \ z_1 - z_0$ مساوية للصفر، فإن النقطة $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ في هذه الحالة تنطبق على النقطة $P_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$.

(3) إذا كانت قيمة واحدة أو قيمتان من الأعداد

$$x_1 - x_0,\quad y_1 - y_0,\quad z_1 - z_0$$

مساوية للصفر ، فإن هذا يعني أن الخط المستقيم يوازي مستوى واحداً أو مستويين من مستويات الإحداثيات. انظر شكل (1.11).



شكل 1.11

مثال 1.9 أوجد المعادلات المتجهة، والبارامترية للخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $P_0(1,2,3),\ P_1(-1,1,4)$.

الحل متجه الاتجاه للخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $P_0(1,2,3)$، $P_1(-1,1,4)$ هو المتجه

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = (-2,-1,1)$$

وتكون المعادلة المتجهة له هي

$$\vec{a} = t(-2,-1,1) + (1,2,3)$$

والمعادلات البارامترية هي

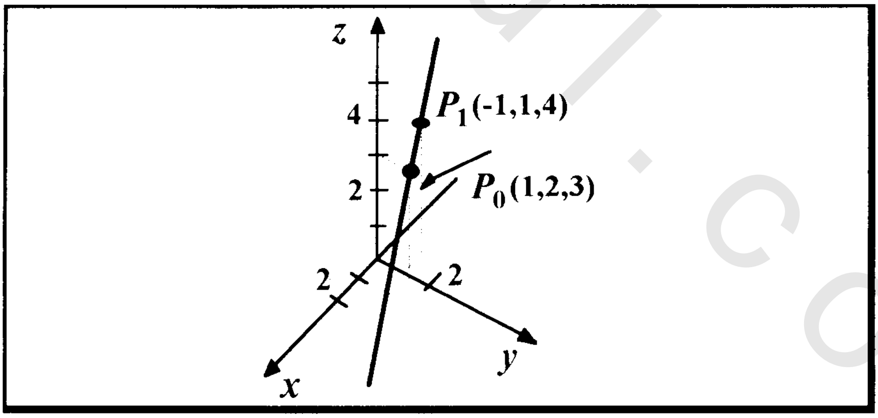
$$x = -2t + 1 \quad , \quad y = -t + 2 \quad , \quad z = t + 3$$

والمعادلة القياسية هي

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

انظر شكل (1.12).

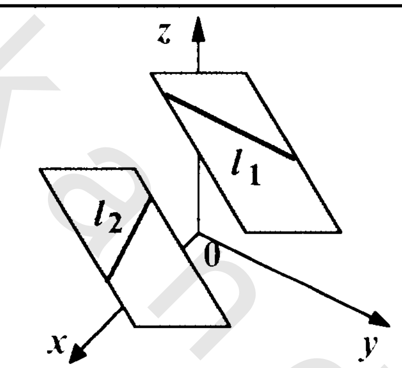
شكل 1.12



انتبه!

إلى حقيقة أنه في حالة الفضاء الثنائي R^2، فإن أي خطين مستقيمين إما أن يكونا متوازيين أو أن يكونا متقاطعين. ولكن في حالة الفضاء الثلاثي R^3 فتوجد حالة ثالثة حيث يمكن للخطين المستقيمين أن يقعا في مستويين متوازيين مع أن الخطين نفسيهما يمكن أن يكونا غير متوازيين. انظر شكل (1.13).

شكل 1.13



الخطان المتخالفان

تعريف 1.13 لنفرض أن المعادلتين المتجهتين للخطين المستقيمين ℓ_1, ℓ_2 هما على الترتيب

$$\vec{a} = t_1 \vec{v}_1 + \vec{a}_1, \quad \vec{b} = t_2 \vec{v}_2 + \vec{a}_2$$

إذن، فإن

(1) الخطان ℓ_1, ℓ_2 يكونا متوازيين *(Parallel)* إذا كان $\vec{v}_2 \parallel \vec{v}_1$.
أي إذا كان متجها الاتجاه لكليهما متوازيين.

(2) الخطان ℓ_1, ℓ_2 يكونا متعامدين *(Perpendicular)* إذا كان $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ أي إذا كان متجها الاتجاه لكليهما متعامدين.

(3) الخطان ℓ_1, ℓ_2 يكونا خطين متخالفين إذا كانا غير متقاطعين وكان متجها الاتجاه $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ غير متوازيين.

✍.

1.10 تقاطع خطين مستقيمين في الفضاء الثلاثي الابعاد

لتحديد نقطة تقاطع الخطين المستقيمين ℓ_1, ℓ_2 في الفضاء الثلاثي R^3. نفرض أن المعادلتين المتجهتين للخطين ℓ_1, ℓ_2 هما

$$\vec{a} = t_1 \vec{v}_1 + \vec{a}_1, \quad \vec{b} = t_2 \vec{v}_2 + \vec{a}_2$$

طبعاً، فإن الخطين يتقاطعان إذا كانت ـ وفقط إذا كانت ـ توجد قيم للبارامترات t_1, t_2، بحيث أن إحداثيات النقطة $t_1 \vec{v}_1 + \vec{a}_1$ على الخط ℓ_1 تنطبق على إحداثيات النقطة $t_2 \vec{v}_2 + \vec{a}_2$ على الخط ℓ_2 . بمساواة المعادلتين المتجهتين للخطين نحصل على

$$t_1 \vec{v_1} + \vec{a_1} = t_2 \vec{v_2} + \vec{a_2} \tag{1.54}$$

وإذا فرضنا أن

$$\vec{v_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \vec{v_2} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \tag{1.55}$$

وأن

$$\vec{a_1} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \vec{a_2} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \tag{1.56}$$

وبالتعويض من (1.56) ,(1.55) في (1.54)، وبمساواة المعاملات في الطرفين فإننا نحصل على المعادلات الثلاث الآتية

$$\begin{aligned} t_1\alpha_1 + \gamma_1 &= t_2\beta_1 + \xi_1 \\ t_1\alpha_2 + \gamma_2 &= t_2\beta_2 + \xi_2 \\ t_1\alpha_3 + \gamma_3 &= t_2\beta_3 + \xi_3 \end{aligned} \tag{1.57}$$

للحصول على t_1, t_2 نحل - آنياً - أي معادلتين من المعادلات الثلاث، ثم نعوض بقيم t_1, t_2، التي حصلنا عليها في المعادلة الثالثة فإذا تحققت المعادلة فهذا يعني أن النقطة $t_1 \vec{v_1} + \vec{a_1} = t_2 \vec{v_2} + \vec{a_2}$ هي نقطة التقاطع. وفى هذه الحالة يسمى نظام المعادلات (1.51) نظام متوافق *(Consistent)*. وإذا لم تحقق القيم t_1, t_2 المعادلة الثالثة فإنه لا توجد نقطة تقاطع، ويسمى النظام في هذه الحالة نظاماً غير متوافق *(Inconsistent)*.

مثال 1.10 أوجد نقطة تقاطع الخطين $l_1: \vec{x} = s(1,1,0) + (2,0,4)$,

$$l_2: \vec{x} = t(1,-1,3) + (0,0,1)$$

الحل من المعادلتين المتجهتين للخطين l_1, l_2 يمكن تكوين نظام المعادلات (1.51) كالتالي

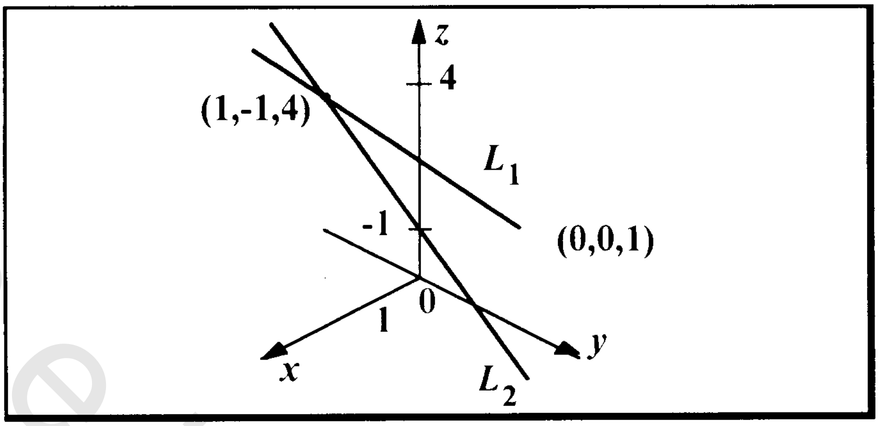
$$s + 2 = t; \; s = -t; \; 4 = 3t + 1$$

بكل يسر يمكن ـ الآن ـ من المعادلة البارامترية الأخيرة أن نحصل على $t = 1$، وبالتعويض بهذه القيمة في المعادلة الثانية نحصل على $s = -1$، وبالتعويض عن القيمتين $t = 1, \; s = -1$ في المعادلة الأولى، نجد أنها تتحقق. إذن فالنظام متوافق وتوجد نقطة التقاطع الآتية

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= s(1,1,0) + (2,0,4) \\ &= t(1,-1,3) + (0,0,1) \\ &= -1 \cdot (1,1,0) + (2,0,4) \\ &= 1 \cdot (1,-1,3) + (0,0,1) = (1,-1,4) \end{aligned}$$

إذن نقطة التقاطع هي النقطة $(x, y, z) = (1, -1, 4)$. انظر شكل (1.14).

شكل 1.14



✍.

مثال 1.11 أوجد معادلات الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(1,2,3)$، والعمودي على المستقيم $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{-3}$ الذي يوازي المستوى الذي معادلته $6x-y=10$.

الحل المستقيم المطلوب عمودي على المستقيم $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z}{-3}$، إذن فهو عمودي على متجه الاتجاه له أي عمودي على المتجه $\vec{v}=(2,5,-3)$.

أيضاً المستقيم المطلوب يوازي المستوى $6x-y=10$، إذن فهو عمودي على المتجه العمودي على المستوى، أي عمودي على المتجه $\vec{n}=(6,-1,0)$. إذن المستقيم المطلوب عمودي على كلٍ من المتجهين $\vec{v},\vec{n}$، وبالتالي فهو يوازي المتجه $\vec{v}\wedge\vec{n}$، أي يوازي المتجه

$$\vec{v} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\hat{i} - 18\hat{j} - 32\hat{k}$$

وبما أن المستقيم المطلوب يمر بالنقطة $(1,2,3)$، إذن فإن معادلته الاتجاهية هي

$$\vec{a} = t(-3,-18,-32) + (1,2,3)$$

والمعادلات البارامترية هي

$$x = -3t + 1,\ y = -18t + 2,\ z = -32t + 3$$

والمعادلة القياسية هي

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{18} = \frac{z-3}{32}$$

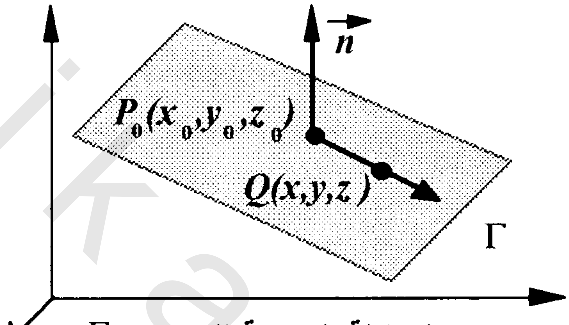
.

1.11 المستوى في الفضاء ثلاثي الأبعاد

للحصول على المعادلة المتجهة للمستوى، نفرض أن النقطتين $Q(x,y,z),\ P_0(x_0,y_0,z_0)$ تقعان على المستوى Γ مثلاً، ولنفرض أن $\vec{n}$ ، حيث $\vec{n} \in R^3$ هو متجه عمودي على المستوى Γ، وبالتالي فهو عمودي على كل متجه ينتمي إليه. انظر شكل (1.15).

إذن فإن المتجه $\vec{n}$ عمودي على المتجه $\overrightarrow{P_0Q}$ الذي يقع داخل المستوى Γ. إذن، فإن المعادلة المتجهة للمستوى Γ هي

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0Q} = 0 \tag{1.58}$$



المعادلة المتجهة للمستوى Γ

شكل 1.15

الآن لنفرض أن

$$\vec{n} = (a, b, c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

وبما أن

$$\overrightarrow{P_0Q} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

إذن

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

أو

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

أو

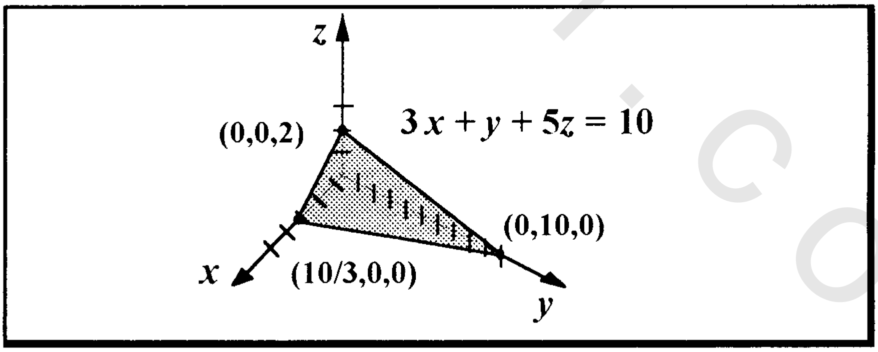
$$\boxed{ax + by + cz = d; \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0} \tag{1.59}$$

المعادلة (1.59) تسمى **"المعادلة القياسية الخطية"** للمستوى Γ في الفضاء R^3، والذي فيه $\vec{n} = (a, b, c)$ هو المتجه العمودي على المستوى، وبحيث أن النقطة $Q(x, y, z)$ هي أية نقطة تقع على المستوى، وبحيث ألا تكون كل الأعداد a, b, c مساوية للصفر.

مثال 1.12 أوجد المعادلات المتجهة والقياسية للمستوى الذي يمر بالنقطة $(-2, 1, 3)$، بحيث يكون المتجه العمودي عليه هو المتجه $\vec{n} = 3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$.

الحل نفرض أن $P_0(x_0, y_0, z_0) = (-2, 1, 3)$، وأن $Q(x, y, z)$ هي أية نقطة في المستوى. انظر شكل (1.16).

شكل 1.16



إذن، من (1.58) نجد أن المعادلة المتجهة للمستوى هي

$$\left(3\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}\right)\cdot\left((x+2)\hat{i}+(y-1)\hat{j}+(z-3)\hat{k}\right)=0$$

وبالتالي فإن المعادلة القياسية هي

$$3(x+2)+(y-1)+5(z-3)=0$$

أو

$$3x+y+5z=10$$

ولكي نرسم هذا المستوى نوجد المساقط *(Traces)* على مستويات الإحداثيات، وهذه المساقط هي الخطوط *(Lines)* التي يتقاطع بها المستوى مع مستويات الإحداثيات. فمثلاً لإيجاد الخط المستقيم، الذي يتقاطع به المستوى مع مستوى الإحداثيات ـ xy، نضع $z=0$ في معادلة المستوى. بالمثل ـ يمكن بوضع $y=0$ أو $x=0$ ـ أن نحصل على كل نقط الخطوط المستقيمة، التي يتقاطع بها المستوى مع مستوى الإحداثيات ـ yz ، ومستوى الإحداثيات ـ xz.

✍.

مثال 1.13 أوجد نقط تقاطع الخط المستقيم، الذي معادلتة المتجهة هي $\vec{a}=t(1,-2,3)+(-1,1,3)$ مع المستوى الذي معادلته القياسية هي $2x-y+z=7$.

الحل من المعادلة المتجهه للخط المستقيم نحصل على

$$x = t - 1, y = -2t + 1, z = 3t + 3 \quad \text{(i)}$$

ولأن الخط يتقاطع مع المستوى إذن فإن النقطة (x, y, z) والمعطاة في (i) تقع أيضاً في نفس المستوى وتحقق معادلته. انظر شكل (1.17).

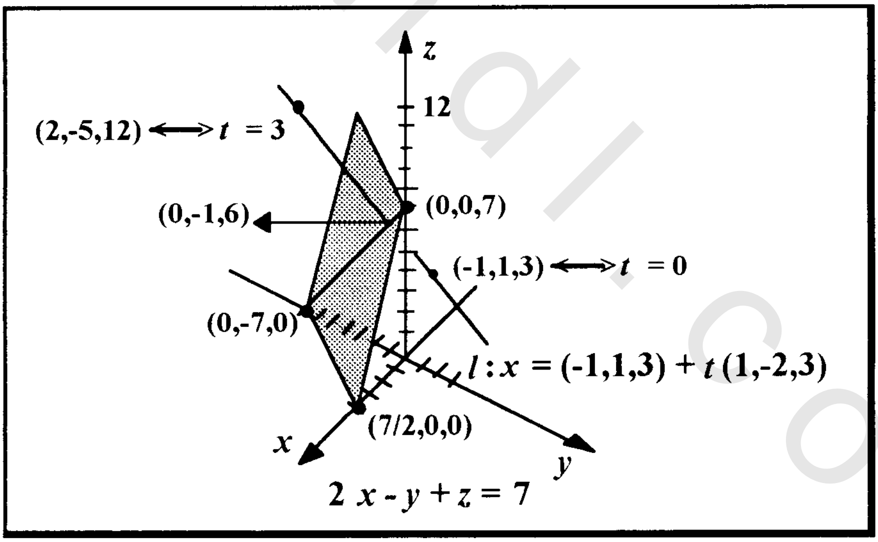
إذن، وبالتعويض عن x, y, z من (i) في معادلة المستوى، نحصل على

$$2(t-1) - (-2t+1) + (3t+3) = 7$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على $t = 1$، وبالتعويض في (i) نجد أن نقطة التقاطع هي النقطة

$$(x, y, z) = (0, -1, 6)$$

شكل 1.17



✍.

تعريف 1.14 المستويان Γ_1, Γ_2 في الفضاء الثلاثي R^3 يكونا متوازيين إذا كان $\vec{n_2} \parallel \vec{n_1}$، ويكونان متعامدين إذا كان $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$، حيث المتجه $\vec{n_1}$ هو العمودي على المستوى Γ_1، بينما المتجه $\vec{n_2}$ هو العمودي على المستوى Γ_2.

✍.

مثال 1.14 بين أن المستويين

$$\Gamma_1:\ \ 2x - 3y + 5z = 7,\ \ \Gamma_2:\ \ -3x + \frac{9}{2}y - \frac{15}{2}z = 5$$

لاتوجد بينهما نقط مشتركة.

الحل

من معادلة المستوى Γ_1 نجد أن $\vec{n_1} = (2, -3, 5)$، ومن معادلة المستوى Γ_2 نجد أن $\vec{n_2} = \left(-3, \frac{9}{2}, -\frac{15}{2}\right)$. وهكذا نجد أن

$$\vec{n_1} = -\frac{2}{3}\vec{n_2}$$

الأمر الذي يعني أن المتجهين العموديين $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ متوازيان، وبالتالي فإن المستويين Γ_1, Γ_2 إما أن يكونا متوازيين أو منطبقين. ونستبعد أن يكونا منطبقين لأن النقطة $\left(\frac{7}{2}, 0, 0\right)$ تقع في المستوى Γ_1 ولا تقع

على المستوى Γ_2. إذن فالمستويان Γ_1, Γ_2 متوازيان ولا توجد بينهما أي نقط مشتركة.

✍.

مثال 1.15 أوجد المعادلات المتجهة والقياسية لخط تقاطع المستويين

$$3x - 2y + z = 1, \quad -2x + y + 3z = 2$$

الحل

للحصول على معادلة خط تقاطع المستويين نقوم أولاً بحل المعادلتين معاً. ولأنهما معادلتان فقط وفي ثلاثة مجاهيل نحاول حذف أحد المتغيرات الثلاثة x, y, z. بضرب المعادلة $-2x + y + 3z = 2$ في العدد 2، والجمع مع المعادلة $3x - 2y + z = 1$ يمكن لنا حذف المتغير y، وهكذا نحصل على $x = 7z - 5$. أيضاً، بالتعويض عن $x = 7z - 5$ في المعادلة $-2x + y + 3z = 2$ نحصل على $y = 11z - 8$. إذن، لقد استطعنا بهذا التصرف الرياضي أن نعبر عن المتغيرين x, y بدلالة المتغير z. الآن نضع $z = t$، فنحصل على x, y بدلالة t لنحصل في النهاية على المعادلات البارامترية لخط التقاطع، والتي تأخذ الصورة

$$x = 7t - 5 \quad , \quad y = 11t - 8 \quad , \quad z = t$$

وللحصول على المعادلة القياسية لخط تقاطع المستويين نحذف t من هذه المعادلات البارامترية فنحصل على

$$\frac{x+5}{7}=\frac{y+8}{11}=\frac{z}{1}$$

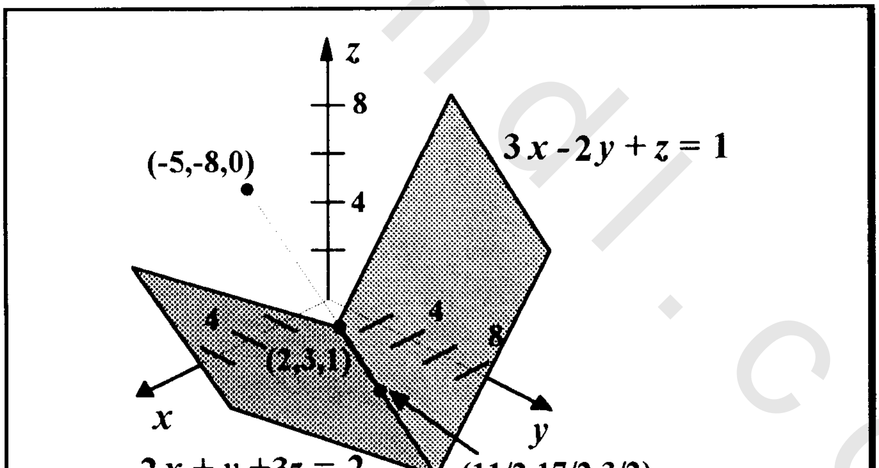
أما معادلة خط التقاطع الاتجاهية فيمكن الحصول عليها طبعاً بمقارنة المعادلة البارامترية السابقة مع المعادلة (1.26)، حيث نجد أن

$$(x_0, y_0, z_0)=(-5,-8,0); \qquad (v_1, v_2, v_3)=(7,11,1)$$

وبالتالي فإن معادلة خط التقاطع الاتجاهية هي

$$\vec{a}=t\,\vec{v}+\vec{a}_0=t(7,11,1)+(-5,-8,0)$$

انظر شكل (1.18).



شكل 1.18

طريقة أخرى

المتجه العمودي على المستوى الأول هو $\overrightarrow{n_1} = (3,-2,1)$، والعمودي على المستوى الثاني هو $\overrightarrow{n_2} = (-2,1,3)$.وبما أن خط التقاطع يقع في كلٍ من المستويين، إذن فهو عمودي على كل من المتجهين $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ أي يوازي المتجه

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7\hat{i} - 11\hat{j} - 1\hat{k}$$

ولإيجاد إحداثيات نقطة ما على خط تقاطع المستويين نضع مثلاً $z = 0$ في المعادلتين المعطيتيْن فنحصل على المعادلتين

$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

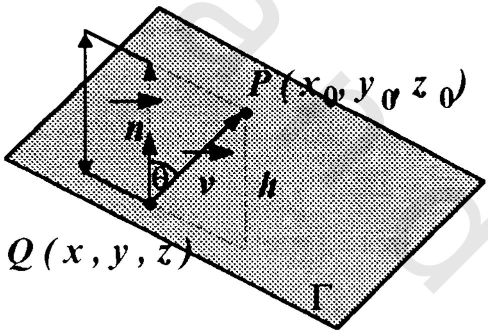
بحل هاتين المعادلتين معاً نحصل على $x = -5,\ y = -8$. إذن النقطة $(-5,-8,0)$ تقع على الخط المطلوب، وبما أن هذا الخط المطلوب يجب أن يوازي المتجه $-7\hat{i} - 11\hat{j} - \hat{k}$، إذن فإن معادلته المطلوبة هي $\frac{x+5}{7} = \frac{y+8}{11} = \frac{z}{1}$.

✍.

1.12 المسافة العمودية بين نقطة و مستوى

نفرض أن هنالك مستوى (نرمز له بالرمز Γ)؛ معادلته هي $a\,x+b\,y+c\,z=d$. نفرض - أيضاً - أن $Q(x,y,z)$ هي نقطة واقعة عليه، وأن $P(x_0\,,y_0\,,z_0)$ هي النقطة المطلوب حساب بعدها العمودي عن المستوى Γ. ولنفرض أن $\vec{n}=(a,b,c)$ هو المتجه العمودي *(Normal)* على المستوى عند نقطة $Q(x,y,z)$. انظر شكل (1.19).

شكل 1.19



المسافة العمودية من النقطة P إلى المستوى Γ

من تعريف الضرب القياسي نجد أن المسافة العمودية h بين النقطة $Q(x,y,z)$ والمستوى Γ هي طول مركبة المتجه $\vec{v}$ في اتجاه المتجه $\vec{n}$. أي أن

$$h = \left|\vec{v}\right| \cos(\theta)$$

حيث

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}$$

إذن فإن

$$h = \left|\vec{v}\right| \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}$$

وبما أن

$$\vec{v} = \vec{QP} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$$

إذن فإن

$$h = \frac{\left|(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \cdot (a, b, c)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{\left|(ax_0 + by_0 + cz_0) - (ax + by + cz)\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

وهكذا نجد أن

$$\boxed{h = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 - d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} \qquad (1.60)$$

1.13 مسائل

(1) إذا أعطيت المتجهات

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k},\ \vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

(a) أوجد مقدار المتجهين $\vec{a} + 3\vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$. (b) أوجد متجه الوحدة في اتجاه المتجه $3\vec{a} + \vec{b}$. (c) أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{a}, \vec{b}$. (d) هل الثلاث متجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ تقع في مستوى واحد؟ (e) وهل العلاقة $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c}$ صحيحة؟

(2) اثبت أن

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$$

(3) أوجد قيمة m الموجبة التي تجعل الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = m\hat{i} - \hat{k}$ تساوي $\frac{\pi}{3}$.

(4) أوجد $\cos(\gamma)$ للمتجه $\vec{a}$، إذا كانت كل مركباته موجبة، وكان $\cos(\beta) = \cos(\alpha) = \frac{1}{3}$.

(5) اثبت أن $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$ عندما يكون $a=b$، ثم استخدم هذه النتيجة في إثبات أن الزاوية المرسومة في نصف دائرة قائمة.

(6) مستوى يمر بالنقط الثلاث (4,5,13) ,(-1,2,3) ,(1,1,1)، أوجد المسافه العمودية من النقطة (3,1,-5) إلى المستوى.

(7) اثبت أن $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=a^2-b^2$، ثم استنتج أن المستقيم الواصل من رأس مثلث متساوي الساقين إلى منتصف القاعدة عمودي على هذه القاعدة.

(8) اثبت ـ باستخدام المتجهات ـ أن (6,1,3) ,(-5,1,7) , (2,-3,1) هي رؤوس مثلث قائم، ثم أوجد مساحته.

(9) إذا كان $\vec{a}=4\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k}$. فأوجد المتجه الذي له نفس اتجاه المتجه $\vec{a}$ ويساوي ضعفه في المقدار، ثم أوجد المتجه الذي له عكس اتجاه $\vec{a}$ ، ومقداره $\frac{1}{3}$ مقدار المتجه $\vec{a}$.

(10) أوجد قيمه p، التي تجعل المتجهين $\vec{a}\,,\ \vec{b}$ متعامدين حيث

$$\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + p\hat{k}, \quad \vec{b} = 2p\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

(11) أوجد المتجه الذي مركباته موجبة، ومقداره 2، وزوايا الاتجاه كلها متساوية.

(12) أوجد علاقة رياضية لأقرب مسافة بين أي خطين متخالفين $l_1,\ l_2$ *(Skew Lines)*.

(13) أوجد المعادلات المتجهة والبارامترية للخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $P(5,-6,2)$ ويوازي المتجه $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{4}{3}\right)$.

(14) أوجد المعادلة القياسية للمستوى، الذي يمر بالنقطة $(1,-2,5)$ وعمودي على المتجه $\vec{n} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$.

(15) أوجد المسافة بين النقطة $P(-5,3,7)$ والمستوى، الذي معادلته $6x - 5y + 8z - 9 = 0$.

(16) أوجد المعادلة البارامترية للخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(1,1,2)$ ويوازي الخط الذي معادلته القياسية هي $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{2z-3}{4}$.

(17) أوجد المعادلة المتجهة للخط، الذي يمر بالنقطة $(-1,3,4)$ ويوازي الخط $x=t,\ y=-1,\ z=3+t$.

(18) هل الخط الذي معادلته البارامترية هي

$$x=-1+s,\ \ y=2+2s,\ \ z=\frac{26}{9}+\frac{3}{2}s$$

عمودي على الخط الذي يمر بالنقطين $(-1,2,1),(2,-1,3)$؟

(19) ادرس تقاطع الخطين $l_1,\ l_2$، حيث

$$l_1:\ \frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-5}{-1};$$

$$l_2:\ x=-2+t\ ,\ y=-2-t\ ,\ z=2+t$$

(20) أوجد المعادلة البارامترية للمحل الهندسي للمستوى $3x-5y+2z=15$ في المستويات الثلاثة $xy,\ xz,\ yz$.

(21) هل الخط المستقيم الذي معادلته الاتجاهية $\vec{r}=t(-1,3,2)+(2,1,1)$ عمودي على المستوى الذي معادلته القياسية $x-3y-2z=11$؟ أوجد نقطة التقاطع إن وجدت.

****

قال أمير الشعراء أحمد شوقي:

وما نيل المطالب بالتمني

ولكن تؤخذ الدنيا غلابا