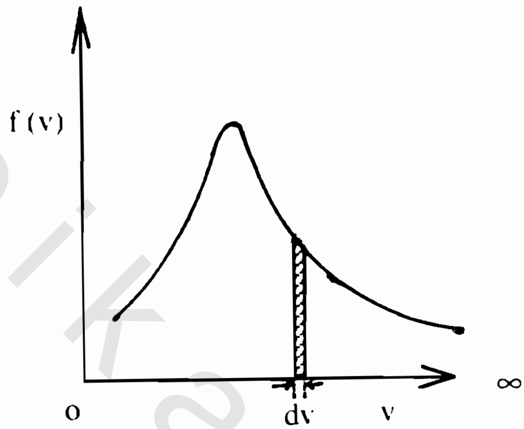
الباب الثانى
إحصاء ماكسويل - بولتزمان

٢ - ١ دالة التوزيع لماكسويل Maxwell's distribution function



شكل (٢-١)

اعتبر غازاً فى حالة اتزان ديناميكى حرارى ، أى أن درجة حرارته ثابتة . تتفاوت قيم سرعات الجزيئات بين صفر ومالانهاية ، ولكن معظمها يكون له سرعة متوسطة تعبر عن حالة الغاز .

قد تتغير سرعة أى جزئ نتيجة لتصادمه مع غيره أو مع الجدران ، ولكن يبقى ثابتا عدد الجزئيات التى لها سرع فى الحدود بين v & $v + dv$ ، ويظل هذا العدد لا يتغير مع الزمن ، انظرشكل (٢-١)

نفرض أن N_v هو عدد جزيئات الغاز الذى يكون لها سرعات قدرها v .

الدالة التى تربط عدد الجزيئات N_v بالسرعات v للغاز تسمى دالة توزيع السرعات لماكسويل $f(v)$.

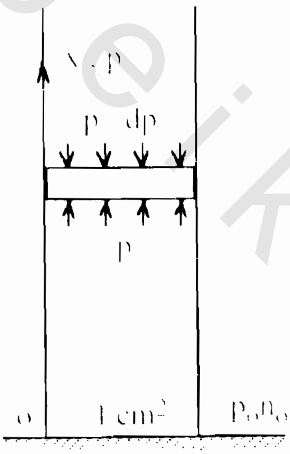
ولإيجاد هذه الدالة رياضيا سنستعين بـــــ :

٢ – ٢ قانون ضغط الهواء الجوي مع الارتفاع عن سطح الأرض :

اعتبر اسطوانة رأسية من الهواء الجوى على شكل عمود مساحة مقطعه ١سم٢ ، شكل (٢ – ٢) .

تقع جزيئات الهواء فى هذا العمود تحت تأثير الجاذبية الأرضية . نفرض أن الهواء فى حالة اتزان حرارى ، وأن درجة حرارته ثابتة فى كل أجزائه .

نعتبر نقطة على سطح الأرض أسفل العمود مركزا للإحداثيات ، ونعتبر شريحة أفقية من الهواء محصورة بين x , $x + dx$ ، إن ضغط الغاز على سطحيها هو P , $P - dP$ على الترتيب . ويلاحظ هنا أنه كلما ارتفعنا أى زادت x كلما نقص ضغط الهواء .



شكل (٢-٢)

وزن الغاز في الشريحة = $\rho\, g\, dx$

حيث ρ هى كثافة الغاز عند الارتفاع x

، g هى عجلة الجاذبية الأرضية .

يتزن وزن الشريحة مع الفرق فى الضغط على السطحين :

$$\therefore (P - dP) -- P = \rho\, \delta\, d x$$

ولكن من قانون الغازات :

$$PV = RT = NkT$$

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT$$

$$\therefore dP = kT\, dn$$

وأيضا

$$\rho = n \,.\, m$$

من المعادلات السابقة :

$$-dP = \rho \cdot g \ dx$$

$$-k\,d\,n = n\,m\,g\,d\,x$$

$$\int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT}\int_0^x d\,x$$

وبالتكامل :

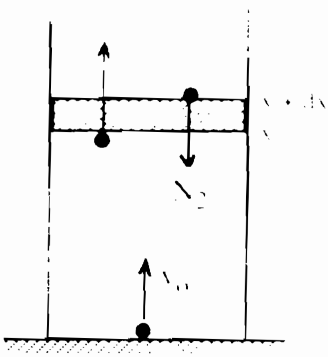
$$\therefore \quad n = n_0 \exp - \frac{mgx}{kT}$$

ومنها :

$$P = P_0 \exp - \frac{mgx}{kT}$$

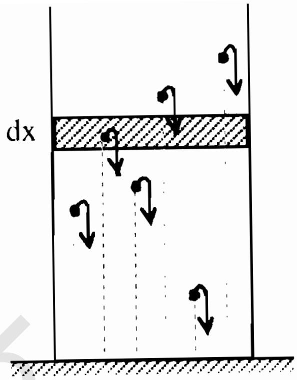
يعرف هذا بقانون تغير الضغط بالارتفاع داخل عمود غاز ثابت الدرجة .

اعتبر الآن جزئ سرعتــه v_0 عند سطح الأرض $x = 0$ ويتحرك إلى أعلى ضد الجاذبية الأرضية . يصل هذا الجزئ إلى ارتفاع $x = v_0{}^2 / 2g$ عندما تتحول جميع طاقة الحركة للجزئ $\frac{1}{2} m v_0^2$ إلى طاقة موضع $m g x$

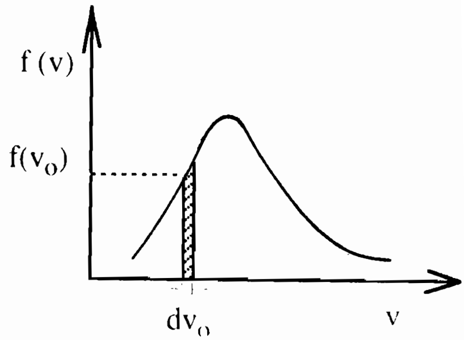


شكل(٢ ٣)

تتفاوت سرعات الجزيئات الصاعدة من السطح بين صفر وما لا نهاية حيث إن ارتفاع عمود الهواء لا يحده حدا أعلى، نفرض أن عدد الجزيئات لوحدة الحجوم التى لها سرعات تقع بين $v_0 \cdot v_0 + dv_0$ عند سطح الأرض هى : $n_0 f(v_0)\, d v_0$



شكل (٢ – ٥)



شكل (٢ – ٤)

عدد الجزيئات المتجهة إلى أعلى شكل (٢ – ٥) والتى تستطيع بسرعتها أن تصل إلى الشريحة dx لتعبرها فى الثانية هى :

$$N_1 = \int_{v_0=\sqrt{2gx}}^{\infty} \quad = n_0 \, v_0 \, f(v_0) \, dv_0$$

الحد الأدنى للتكامل $\sqrt{2gx}$ يمثل الجزيئات التى تكاد تكفى سرعاتها للوصول للشريحة على ارتفاع x . جميع الجزيئات التى لها سرعات أقل من ذلك ترتد إلى أسفل بفعل الجاذبية الأرضية ولا تصل إلى الارتفاع x .

عدد الجزيئات المتجهة إلى أسفل والتى تعبر الشريحة dx فى نفس الزمن هى

$$N_2 = \int_0^{\infty} n \, v \, f(v) \, dv$$

وبما أن الغاز داخل العمود فى حالة اتزان ديناميكى حرارى فإن عدد الجزيئات الصاعدة ، والتى تعبر dx يجب أن تساوى عدد الجزيئات الهابطة أى أن $N_1 = N_2$

وبالتعويض بدلا من n فى قانون تغير الضغوط بالارتفاع

$$n = n_0 \, \exp - (mgx / kT)$$

نحصل على :

$$\int_{\sqrt{2gx}}^{\infty} v_0 \, f(v_0) \, d\,v_0 = \exp - \frac{mgx}{kT} \int_0^{\infty} v \, f(v) \, d\,v \qquad (1)$$

لنجعل الآن المتغير واحدا فى هذه المـ ـلة باستخدام معادلة الحركة :

$$v_0^2 = v^2 + 2\,g\,x$$

وبالتفاضل :

$$v_0\,d\,v_0 = v\,d\,v$$

وبالتعويض فى المعادلة (1) مع حذف v_0 نحصل على :

$$\int_0^{\infty} f\,(\,v^2 + 2\,g\,x\,)^{1/2}\,v\,dv = \exp - \left(\frac{mgx}{kT}\right) \int_0^{\infty} f\,(v)\,v\,dv \qquad \ldots (2)$$

وبالتفاضل لطرفى المعادلة بالنسبة إلى v :

$$f\,(v^2 + 2gx)^{1/2} = \exp - \left(\frac{mg}{kT}\right) f\,(v) \qquad \ldots\ldots (3)$$

هذه معادلة دوالية functional equation وتحقق فقط إذا كانت الدالة f (v) على الصورة :

$$f\,(v) = A \exp - m\,v^2 / 2\,kT$$

$$f\,(v) = A \exp - E / kT \qquad \ldots\ldots (4)$$

حيث E يمثل متوسط طاقة الحركة $1/2\;m\,v^2$ للجزئ وتساوى

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_x^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_y^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_y^2$$

A مقدار ثابت يمكن تحديد قيمته على أساس أن العدد الكلى للجزيئات فى وحدة الحجوم n يساوى العدد الكلى للنقط فى فراغ السرعات velocity space وهذا يعطى بالتكامل :

$$n = \int_0^{\infty} n\,(v)\,dv$$

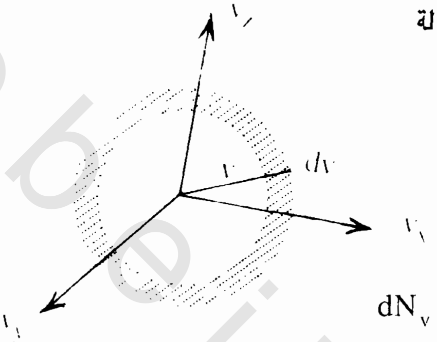
وقد وجد أن قيمة الثابت A هى :

$$A = n \left(\frac{m}{2\,\pi\,k\,T}\right)^{3/2}$$

تعرف المعادلة (٤) بدالة التوزيع لوحدة الحجوم لماكسويل ، وتعطى عدد جزيئات الغاز التي لها سرعة v فى وحدة الحجوم .

لإيجاد عدد الجزيئات التي لها سرعات تقع بين v & v + d v نعتبر قشرة كرية نصف قطرها v فى فراغ السرعات ، ويكون سمكها dv تحتوي علي الجزيئات المطلوبة شكل (٢ – ٦) .

حجم القشرة = $4 \pi v^2 dv$. باستخدام دالة التوزيع يكون العدد هو :



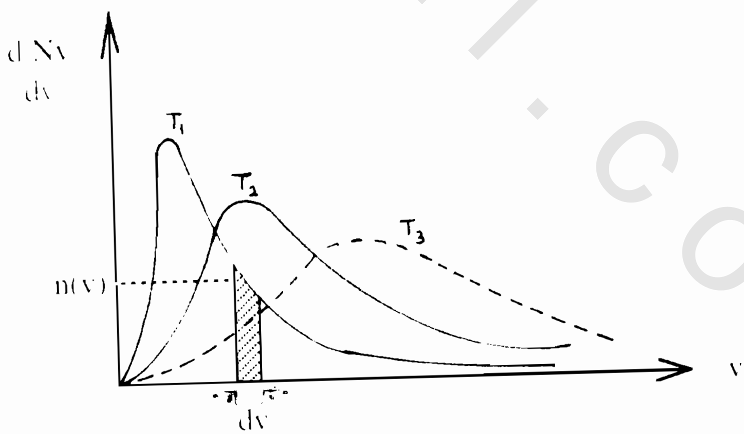
$$dN_v = 4 \pi v^2 dv\, A \exp \frac{-mv^2}{2kT}$$

$$dN_v = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp - \frac{mv^2}{2kT} dv$$

شكل(٢–٦)

$$\frac{dN_v}{dv} = n(v) = \frac{4n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp - \frac{mv^2}{2kT} \quad .. (5)$$

يتوقف عدد الجزيئات التى لها هذه السرعة v على درجة الحرارة . ويبين العلاقة بين dN_v / dv مع السرعة عند درجات حرارة مختلفة ، ومن المحتم أن تكون المساحات تحت هذه المنحنيات واحدة ، حيث إنها تمثل العدد الكلى لجزيئات الغاز .



شكل(٢–٧)

مسألة : أوجد السرعة المتوسطة وجذر متوسط مربع السرعات . r. m . s وكذلك السرعة الأكثر احتمالا لجزيئات غاز .

أولا : نحصل علي السرعة المتوسطة $\bar{v}$ بضرب عدد الجزيئات **لكل سرعة فى** هذه السرعة ، ثم نجرى التكامل على جميع الجزيئات ونقسم على العدد الكلى **للجزيئات** .

$$\bar{v} = \frac{\int v \, d N_v}{N}$$

وباستعمال المعادلة (٥)

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \frac{4 n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2 kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-m v^2 /2 kT}$$

وبوضع

$$\lambda = \frac{m}{2 KT}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \lambda^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\lambda h^2} dv$$

وهذا التكامل معروف القيمة من جداول التكاملات القياسية :

$$\int_0^\infty v^3 e^{-\lambda v^2} d v = \frac{1}{2 \lambda^2}$$

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \lambda^{3/2} \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

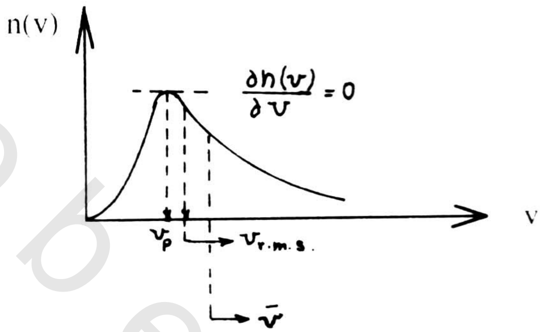
$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2 kT}{m}} = \sqrt{\frac{8 kT}{\pi m}}$$

ثانيا : $\bar{r}$. m . s

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

مما سبق :

$$r.m.s\ v = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



شكل (٢–٨)

ثالثا : السرعة الأكثر احتمالا :

هي السرعة عند قمة منحنى التوزيع :

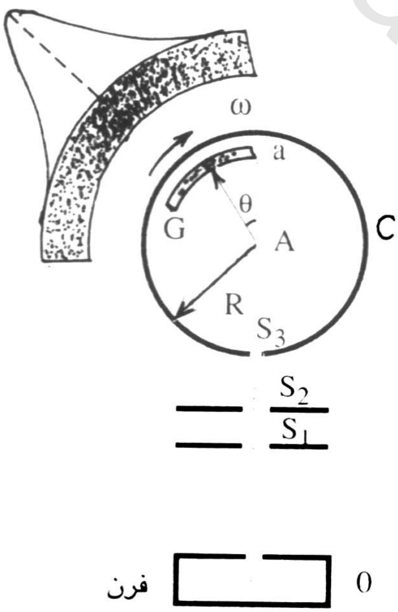
حيث $\frac{\partial nv}{\partial v} = 0$ وهذا الشرط يعطى

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

الحل : بمفاضلة المعادلة (٥) بالنسبة إلى v ثم مساواة الناتج بصفر

يتضح أن r. m. s. V تساوى $\sqrt{\frac{3\pi}{8}} = 1.086$ مرة السرعة المتوسطة $\bar{v}$.

تحقيق قانون ماكسويل عمليا :



شكل (٢–٩)

يتركب الجهاز شكل (٢ – ٩) من فرن o تخرج منه الجزيئات على شكل شعاع يحدده فتحتين مستطيلتين فى حائلين S_2 & S_1 C اسطوانة بها فتحة مستطيلة S_3 توازى محورها ويمكن إدارة هذه الاسطوانة حول المحور A بسرعة حوالى ٦٠٠٠ دوره فى الدقيقة .

عندما تكون الاسطوانة فى حالة سكون فإن شعاع الجزيئات يدخل الاسطوانة من خلال الفتحة S_3 ويسقط على لوح منحنى من الزجاج G .

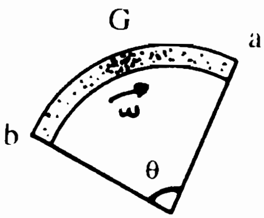
يمكننا تعيين عدد الجزيئات التى تسقط على هذا اللوح الزجاجى فى أى جزء من أجزائه وذلك بقياس مقدار الاعتام الحادث على هذا الجزء باستخدام ميكروفوتومتر . وكلما ازداد عدد الجزيئات الساقطة علي الجزء كلما ازداد اعتمامه .

نفرض الآن أن الأسطوانة C تدور حول محورها . تدخل دفعة من الجزيئات داخل الاسطونة فقط خلال الفترة الزمنية القصيرة التى تعبر فيها الفتحه S_3 الشعاع الجزيئى أى عندما تكون موازية للفتحتين S_2 & S_1

إذا كان الدوران فى اتجاه عقرب الساعة يتحرك لوح الزجاج إلى اليمين أثناء عبور الجزيئات قطر الاسطوانة . وبذلك تصدم الجزيئات لوح الزجاج فى نقط على يسار نقطة تصادمها عندما تكون الاسطوانة ساكنة .

كلما كانت سرعة الجزيئات صغيرة كلما ازداد انحرافها إلى اليسار ، حيث إنها تحتاج لزمن أطول لعبور قطر الاسطوانة ، والتى تكون حينئذ قد دارت مسافة أكبر .

ويكون إعتام هذا اللوح مقياسا لطيف السرعات فى الشعاع الجزيئى . ولإيجاد سرع الجزيئات التى تصدم النقط المختلفة على اللوح G



شكل(٢-١٠)

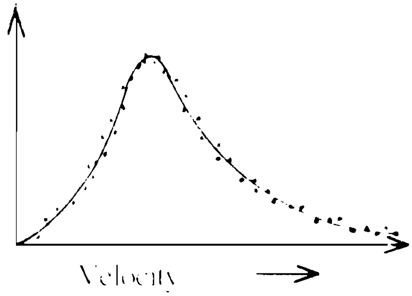
نفرض ab هو مقدار الانحراف للجزئ ذى السرعة v، شكل (٢ - ١٠) .

يعمل القوس ab زاوية θ عند مركز الاسطوانة إذا كانت السرعة الزاوية ω . يكون زمن دوران الاسطوانة زاوية θ هو :

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot T$$

يقطع الجزئ مسافة طولها القطر 2 R فى هذا الزمن فتكون سرعته هى :

$$v = \frac{2R}{t} = \frac{2R\omega}{\theta}$$



شكل (٢ – ١١)

وبدراسة تغير عدد الجزيئات كما يستدل عليه من درجة الإعتام مع سرعة الجزيئات في هذه الأماكن أمكن تحقيق قانون ماكسويل حيث تطابقت النقط التجريبية فى المنحنى مع النقط النظرية ، شكل (٢ – ١١) .

الحرارة النوعية للغازات والسوائل على أساس إحصائى :

من قوانين الديناميكا الحرارية تكون الطاقة الداخلية V لمجموعة ما هى

$$U_2 - U_1 = Q - W$$

وتقاس التغيرات فى الطاقة الداخلية عن طريق قياسات الحرارة والشغل . اعتبر مجموعة جزئيية .

طاقة المجموعة الداخلية تساوى مجموع طاقات جزيئاتها .

إذا كانت N هى عدد الجزيئات يصاحبها عدد f درجات حرية لكل جزئ تكون الطاقة الداخلية .

$$U^{\prime} = N \, . \, f \times \frac{1}{2} kT = \frac{f}{2} \; n\,RT$$

حيث n هنا هو عدد الأوزان الجزيئية فى الغاز ، R هو ثابت الغاز للكيلو جرام الجزيئى $R = N.k$ الطاقة الداخلية للوزن الجزيئى من الغاز

$$U = \quad = \frac{1}{2} f\,RT$$

الحرارة النوعية الجزيئية عند ثبوت الحجم هى :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

$$C_V = 1/2\ f\,R$$

ومن قوانين الديناميكا الحرارية : العلاقة بين C_V , C_P هى :

$$C_P = C_V + R$$

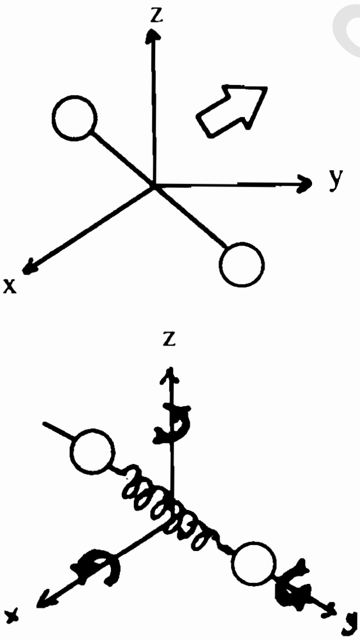
$$C_P = \frac{f}{2}R + R = \frac{f+2}{2}\ R$$

$$8 = \frac{C_P}{C_V} = \frac{1/2\ (f+2)}{1/2\ f} = \frac{f+2}{f}$$

إذا اعتبرنا غاز طاقة حركة جزيئات كلها انتقالية فإننا نحصل على $f = 3$ وتكون :

$$C_V = \frac{f}{2}R = \frac{3}{2}R$$

$$\gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3}$$



شكل (٢-١٢)

وهذه القيم صحيحة عمليا للغازات أحادية الذرة

اعتبر بعد ذلك غاز جزيئاته ثنائية الذرة ، شكل (٢ - ١٢) .

عزم القصور الذاتى للمجموعة حول المحورين (z, x) يكون كبيرا جدا بالنسبة للعزم حول محور (y , y) ولذلك يمكن اعتبار أن للجزئ درجتين فقط من درجات الحرية الدورانية حول المحورين (z,x) .

أيضا بما أن الرابطة بين الذرتين فى الجزىء ليست متماسكة ، لذلك يمكن للذرتين أن تتحركا حركة تذبذبية فى اتجاه الخط الواصل بينهما . وهذا يضيف عدد ٢ درجة من درجات الحرية .

∴ يكون العدد الكلى لدرجات حرية الجزىء :

٣ انتقالية + ٢ دورانية + ٢ تذبذبية = ٧

وتكون الحرارة النوعية :

$$C_V = \frac{7}{2} R \quad ; \qquad \gamma = \frac{9}{7} = 1.29$$

وهذه القيم أيضا تتفق مع القيم المقاسة للغازات ثنائية الذرة .

وكلما ازداد عدد الذرات فى جزىء الغاز تزداد عدد درجات الحرية ، ويؤدى ذلك إلى أن γ النسبة بين C_V , C_P تقل باستمرار كلما زادت f ، وهذا أيضا يتفق مع واقع التجربة .

الحرارة النوعية للجوامد :

تختلف الجوامد عن الغازات والسوائل، حيث إن لكل ذرة موضع اتزان معين وترتبط الذرات ببعضها بقوى كبيرة . لذلك تكون حركة الذرات تذبذبية حول مواضع الاتزان ، وتعتبر كل ذرة نقطة كتلة point mass ، ولذلك يكون لها ثلاث درجات حرية للحركة التذبذبية.

ولكن يوجد أيضا نتيجة لقوى الترابط طاقة موضع ويكون طاقة الذرة لكل درجة حرية $2 \times \frac{1}{2} kT$ أى kT

الطاقة الكلية لـ N جزىء فى ١ كيلو جرام جزىء هى :

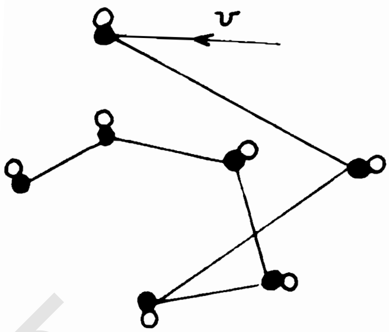
$$U = 3\ N \times kT = 3\ R\ T$$

وتكون الحرارة النوعية الذرية molar sp.ht. or atomic heat

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3\ R$$

ويعرف هذا بقانون ديولنج وبتى الذى ينص على أن الحرارة الذرية لجميع المواد الصلبة في الدرجات المرتفعة واحدة ، وتساوى 3 R

متوسط طول المسار الحر للجزيئات :

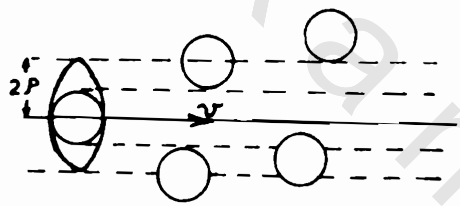


شكل (٢-١٣)

طول المسار الحر للجزىء هو المسافة التى يقطعها الجزىء بين تصادمين متتالين . ومن الواضح أن طول المسار الحر يختلف شكل (٢ - ١٣) ولكن يوجد للغاز متوسط لطول المسار الحر يرمز له بـ λ

لإيجاد λ نفرض أن جزيئات الغاز جميعا فى حالة سكون وأن جزيئا واحد فقط هو الذى يتحرك ويتصادم مع الجزيئات الأخرى .

نفرض أن سرعة هذا الجزىء هى v وأن نصف قطره ρ شكل (٢ - ١٤) . تكون 2ρ هى المسافة بين مركزى جزيئين عند تصادمهما .



شكل (٢-١٤)

جميع الجزيئات التى توجد مراكزها فى داخل أسطوانة مساحة مقطعها $\pi\,(2\rho)^2$ ويمر محورها بمركز الجزىء المتحرك لابد أن تتصادم معه .

تسمى المساحة $\sigma = 4\,\pi\,\rho^2$ بمقطع التصادم collision cross- section

فى الزمن t يقطع الجزىء المتحرك مسافة v t ويكتسح حجم الاسطوانة ذات الطول v t والمقطع σ

جميع الجزيئات فى الأسطوانة تتصادم مع الجزىء .

فإذا كان n هو عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم يكون عدد الجزيئات فى حجم الأسطوانة هو $\sigma\, v\, t\, .\, n$ ويمثل هذا عدد التصادمات z التى تحدث فى الزمن t ويطلق على ذلك تردد التصادم collision frequency عندما يكون الزمن t يساوى ثانية واحدة

$$z = \sigma\, n\, v$$

مثال : أوجد تردد التصادم للأكسجين ، علمنا بأن عدد الجزيئات فى المتر المكعب

$= 3 \times 10^{25}$

سرعة الجزىء عند درجة الغرفة = 450

نصف قطر جزىء الأكسجين = 1.8×10^{-10} متر

الحل : collision cross section

$$\sigma = 4\,\pi\, p^2 = 4\,\pi \times (1.8 \times 10^{-10})^2$$
$$= 4 \times 10^{-19}\ m^2$$
$$\text{collision freq.}\quad z = 4 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{25} \times 450$$
$$= 5.5 \times 19^9 \quad \text{collision / sec.}$$

لإيجاد متوسط طول المسار الحر λ نقسم المسافة الكلية المقطوعة فى الزمن

t على عدد التصادمات فى هذا الزمن :

$$\therefore \lambda = \frac{v\,t}{\sigma.\ n.\ v.t} = \frac{1}{\sigma\, n}$$

ولما كان عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم يتناسب طرديا مع ضغط الغاز فإن متوسط طول المسار الحر يتناسب عكسيا مع الضغط

$$n \propto P \qquad\qquad \lambda \propto 1/P$$

من المثال السابق λ للأكسجين

$$\lambda = \frac{1}{\sigma\, n} = \frac{1}{4 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{25}} = 8 \times 10^{-8}\ m$$

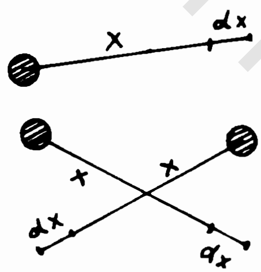
الاستنتاج السابق يفترض سكون الجزيئات فى الغاز وهذا غير صحيح وعند تصحيح المعادلة باعتبار الجزيئات متحركة حسب توزيع ماكسويلى للسرعات ، فإنه يمكن إثبات أن متوسط طول المسار الحر هو :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sigma n} = \frac{0.707}{\sigma n}$$

فى الظروف المعتادة يكون λ حوالى ١٠ أمثال المسافة البينية بين الجزيئات ، كما إن المسافة البينية تكون أيضا حوالى ١٠ أمثال قطر الجزىء

دالة توزيع المسارات الحرة :

اعتبر مجموعة مكونة من عدد N_0 جزىء فى لحظة ما ، يتصادم بعض منها فيخرج من المجموعة . ويتبقى عدد N جزىء بعد أن تكون قد قطعت مسافات x فى اتجاه مساراتها الحرة. أثناء المسافة الصغيرة التالية dx يتصادم بعض هذه الجزيئات N ويخرج من المجموعة ، شكل (٢ – ١٥) .



شكل (٢–١٥)

نفرض أن عدد هذه الجزيئات المتصادمة يتناسب مع العدد N وكذلك مع المسافة dx

التغير فى العدد dN الذى يخرج من المجموعة بالتصادم فى المسافة dx يكون سالبا ويساوى

$$dN = - P_c \, N \, dx \quad \ldots\ldots\ldots \; (2)$$

حيث P_c هو ثابت تناسب يسمى باحتمال التصادم Collision probability ويتوقف على حالة الغاز وليس على N أو x

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = - P_c \int_0^x dx$$

$$\therefore \quad N = N_0 \; \exp - P_c \, x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

أى أن عدد الجزيئات المتبقى دون أن يتصادم يقل حسب دالة أسية للمتغير x

وبالتعويض فى المعادلة (١) نحصل على

$$\therefore \quad dN = - P_c \, N_0 . \exp(- P_c . x) \;\; dx \qquad (3)$$

وتمثل القيمة dN ، مأخوذة بإشارة موجبة طبعا ، عدد الجزيئات التى يكون لها

مسارات حرة يقع طولها بين x + dx & x

وباستخدام الطرق الإحصائية لإيجاد متوسط طول المسار λ

نجد أن :

$$\lambda = \frac{\int x\, dN}{N_0} = \frac{\int_0^{\infty} P_c N_0\, x\, e^{-P_c x}\, dx}{N_0} = \frac{1}{P_c}$$

حيث أن :

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx = \int_{\infty}^{-\infty} -x\, de^{-x} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, de^{y} = 1$$

وهذا يدل على أن احتمال التصادم P_c يساوى مقلوب متوسط المسار الحر λ

ولما كانت $\frac{1}{\sigma n} = \lambda$

فإن : $\therefore\ P_c = \sigma n$

أى أن احتمال التصادم يتناسب طرديا مع مقطع التصادم σ وعدد الجزيئات فى وحدة الحجوم .

وتكتب المعادلة (٢) بالشكل الآتى :

$$\therefore\ N = N_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \qquad (4)$$

والمعادلة (٣) :

$$\therefore\ dN = -\frac{N_0}{\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \cdot dx \qquad (5)$$

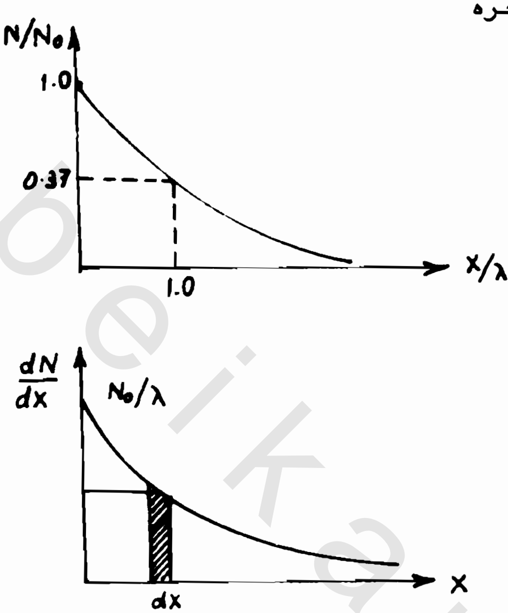
$$N = N_0\, e^{-x/\lambda}$$

عدد الجزيئات التى لها مسارات حره

أطول من λ

تساوى : e^{1} أو 37 %

$$dN = \frac{No}{\lambda}\, e^{-x/\lambda}\, dx$$



شكل (٢-١٦)

المعادلة (٤) تبين عدد الجزيئات التى لها مسارات حرة أطول من x

والمعادلة (٥) تبين عدد الجزيئات التى طول مسارتها الحرة تقع بين x & x + dx

ويراعى هنا إهمال الإشارة السالبة فى المعادلة إذ ليس لها معنى طبيعى .

مسائل وتمارين علي الباب الثاني

١– مدفع إلكترونى يزج إلكترونات إلى حيز به غاز ضغطه ١٠٠ نيوتن / م٢ ، وتجمع الإلكترونات المتبقية بعد التصادم مع جزيئات الغاز بواسطة لوح معدنى على بعد ١٠ سم من المدفع حيث يقاس التيار .

إذا كان التيار الالكترونى المنبعث من المدفع ١٠٠ ميكرو أمبير ، وتيار لوح التجميع ٣٧ ميكرو أمبير ، فأوجد متوسط المسار الحر للإلكترونات ، وماذا يكون تيار اللوح المعدنى إذا أنقص الضغط إلى ٥٠ نيوتن / م٢ .

الحل :

$$N = N_0 e^{-x/\lambda} \qquad \frac{N}{N_0} = \frac{37}{100} = e^{-x/\lambda}$$

$$e^{-1} = 0.37 \quad \because \frac{x}{\lambda} = 1 \qquad \therefore \quad x = = 10 \text{ cm}$$

$P = 1/3\, mn\, v^2$ درجة حرارة الغاز الإلكترونى ثابتة

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{100}{60} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{n_2}{n_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \therefore \lambda_2 = 2 \text{ ، } \lambda_1 = 20 \text{ cm}$$

$$N = N_0 e^{-x/\lambda} \qquad \therefore \quad I = I_0 e^{-x/\lambda}$$

$$1 = 100 e^{-10/20} = 100 e^{-0.5}$$
$$= 60 \text{ micro amp .}$$

٢ – أوجد متوسط طول المسار الحر وتردد النظام لجزيئات النتروجين عند درجة ٢٠°م وضغط ١ جو . اعتبر قطر الجزىء 2×10^{-10} m

٣ – الطاقة الداخلية لغاز يحتيوى n مول من CO_2 عند درجة 300 K تعطى بالمعادلة

$U = a\,n\,RT + b$ حيث a,b ثوابت

أ – أوجد السعة الحرارية الجزيئية تحت حجم ثابت C_v .

ب – ماذا تكون C_p لهذا الغاز ؟

جـ – كم عدد درجات الحرية لهذا الجزىء عند هذه الدرجة ؟

٤ – إناء يحتوى ١ مول من غاز الهليوم عند درجة 300 k .أوجد عدد الجزيئات التى لها سرعات فى المنطقة بين 400 & 410 m / s .

٥ – أثبت أن متوسط طول المسار الحر لجزىء من غاز تام يعطى بالمعادلة :

$$\bar{l} = kT / \sqrt{2}\ \pi d^2 P$$

حيث d هو قطر الجزىء ، P ضغط الغاز ، T درجة حرارته .

٦ – يحتوى إناء على 10^4 جزىء من الأكسجين عند درجة 500 K

ارسم منحنى توزيع ماكسويل للسرعات مع اعتبار مناطق السرعات 100 m / s . ثم أوجد من المنحنى السرعة الأكبر احتمالا وكذلك متوسط السرعة وجذر متوسط مربع السرعات ، وبين ذلك على المنحنى . ثم أوجد عدد الجزيئات التى تقع سرعتها بين 300 & 600 m / s

٧ – أوجد النسبة بين عدد ذرات الأيدروجين فى الحالة المستقرة ground state وعدد الذرات المثارة للغاز عندما تكون درجة حرارته 3000 K .

فكرة الحل :

أوجد أولا طاقة الحالة المستقرة لذرة الأيدروجين ، ثم أوجد طاقة الذره المثارة بحساب طاقم التهيج الحرارى kT عند درجة ٣٠٠٠ كلفن، ثم استخدم دالة ماكسويل للتوزيع .

٨ – يبدأ أيون أكسجين مفرد حركة جرة في اتجاه عمودى على مجال كهربائى شدته 10^4 volt / m في غاز ضغطه جوى ودرجة حرارته 300 K .

أ – أوجد المسافة المقطوعة فى اتجاه المجال فى زمن متوسط مسار حر .

ب – مانسبة متوسط المسار الحر إلى هذه المسافة ؟

جـ – ما السرعة المتوسطة فى اتجاه المجال ؟

د – ما نسبة السرعة الحرارية thermal velocity إلى هذه السرعة ؟

هـ – ما نسبة طاقة التهيج الحرارى إلى الطاقة المكتسبة من المجال أثناء متوسط مسارحر؟

٩ – فى التجربة الخاصة بتحقيق قانون ماكسويل لتوزيع السرعات كان قطر الاسطوانة 0.27 m وعدد دوراتها فى الدقيقة 12000 / min ، وكان المصدر عبارة عن فرن يحتوى ماده الزنك فى درجة 300 °C .

أوجد بعد النقطة التى تسقط عليها الجزيئات عندما تكون الاسطوانة ساكنة عن النقطة التى تسقط عندها الجزيئات ذات الطاقة $\frac{1}{2} m v_x^2 = 2 KT$. (الوزن الذرى للزنك = 65.37) .

١٠ – أثبت أن احتمال التصادم بين جزيئات غاز يساوى مقلوب متوسط طول المسارالحر . وإن احتمال التصادم يتناسب طرديا مع مساحة مقطع التصادم ، ومع عدد جزيئات الغاز فى وحدة الحجوم .

١١ – أثبت أن عدد الجزيئات فى غاز والتى لها مسارات حرة أطول من L cm تعطى بالمعادلة $N = N_o e^{-L/\lambda}$

حيث λ متوسط طول المسار الحر للجزىء ، N_O العدد الكلى للجزيئات .

١٢ - أثبت أن العدد الكلى للجزيئات التى تعبر وحدة المساحات فى وحدة الزمن داخل غاز تساوى $\frac{1}{4}\, n\, \overline{v}$ حيث n هو عدد الجزيئات فى وحدة الحجوم ، $\overline{v}$ متوسط سرعة الجزىء.