الباب الحادى عشر

النظرية الكمية للإلكترون الحر :

Sommerfeld Quantum free electron theory

تعود فشل النظرية الكلاسيكية للغاز الإلكترونى الحر فى تفسير القيم المقاسة للسعة الحرارية heat capacity والقابلية المغناطيسية magnetic suceptibility للفلزات إلى الفرض الأساسى فى النظرية بأن الإلكترونات تشبه الغاز التام ، وتتبع إحصائيا إحصاء ماكسويل وبولتزمان ، حيث يمكن لأى عدد من الإلكترونات أن يكون على نفس مستوى الطاقة .

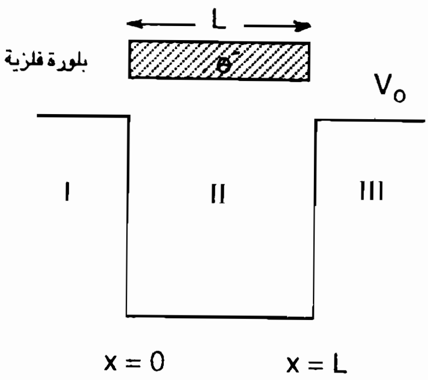
وهذا ما لا يسمح به مبدأ باولى Exclusion principle ، الذى ينص على أن كل مستوى من مستويات الطاقة يشغله إلكترونان فقط $S = \pm 1/2$.

لذلك أدخل سومر فيلد المبدأ الكمى على نظرية الإلكترون الحر الكلاسيكية ، وقد تمكن بذلك تفسير المزيد من الحقائق العلمية المعروفة عمليا ، وإن لم تستطع هذه النظرية تفسير تلك الفروق الكبيرة فى معاملات توصيل المواد المختلفة .

الغاز الإلكترونى الكمى The quantum electron gas :

اعتبر بلورة فلزية شكل (١١ - ١) . تكون طاقة الجهد للإلكترون فى كل مكان بداخلها واحدة وتساوى صفر . يمنع سطح البلورة خروج أي إلكترون حر من داخلها ، وذلك لوجود حاجز جهد مرتفع وليكن ارتفاعه V_0 .

معادلة شرودنجر للإلكترون بداخل البلورة أى الساقط فى بئر الجهد ذو الارتفاع V_0 هى :



شكل (١١ - ١)

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 mE}{h^2}\Psi = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة يعطى الدالة الموجيه Ψ للإلكترون داخل الفلز ، أى داخل بئر الجهد فى المنطقة II على الصورة :

$$\Psi = A \sin \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\; x + B \cos \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,.\, x$$

أما فى خارج البلورة ، وإذا لم يكن ارتفاع بئر الجهد V_0 كبيرا فيجوز حدوث ظاهرة الإنفاق Tunnel effect كما فى ميكروسكوب المجال الأيونى وتكون الدالة الموجية على الصورة :

$$\Psi_{III} = C\, e^{-\frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(V_0 - E)}\,.\,X}$$

$$\Psi I = D\, e^{\frac{2\pi}{h}\sqrt{2m(V_0 - E)}\,.\,X}$$

حيث L هو بعد البلورة crystal dimension . وبتطبيق شروط الحدود boundary condition :

$$\Psi = 0 \text{ at } x = 0 \;\; \& \;\; x = L$$

obeikandi.com

نحصل على :

$$\Psi_L = A \sin \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,.\,L$$
$$= 0$$

وتتحقق هذه المعادلة عندما يكون :

$$\frac{2\pi}{h}\sqrt{2mE}\,.\,L = n\pi$$

$n = 1,2,3,.....$

وبذلك يكون للإلكترون الحر داخل البلورة مستويات الطاقة تحددها :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}\,.\,n^2$$

عندما تكون L كبيرة فإن مستويات الطاقة تكون قريبة جدا من بعضها . فمثلا إذا كان $L = 1$ cm فإن الفرق بين مستويين متتاليين للطاقة الإلكترونية يكون 3.5×10^{-19} eV

إذا اعتبرنا بلورة مكعبة طول ضلعها L cm تكون الدالة الموجيه بداخلها هى :

$$\Psi = A \sin \frac{nx\pi}{L}\,.\,x \sin \frac{ny\pi}{L}\,.\,y \sin \frac{nz\pi}{L}\,.\,z$$

وتكون مستويات الطاقة الإلكترونية هى :

$$E(n_x\ n_y\ n_z) = \frac{h^2}{8mL^2}\left(n_z^2 + n_y^2 + n_x^2\right)$$

مما سبق يتضح أن طاقة الإلكترون الحرة داخل أى فلز لا تأخذ أى قيمة ، كما تنص عليها النظرية الكلاسيكية .

وبتطبيق مبدأ باولى وعدم إمكان وجود أى إلكترونين لهما نفس الأعداد الكمية الأربعة ، لذلك فإن كل مستوى للطاقة لا يشغله سوى إلكترونين مغزليهما متعاكسين opposite spin .

ولهذا السبب أصبح إحصاء ماكسويل وبولتزمان غير صالح للتطبيق على حالة إلكترونات الفلز ، ويجب تطبيق الاحصاء الكمى بدلا منه .

الإحصاء الكمى Quantum statistics :

إحصاء بوز واينشتين وفيرمى ديراك Fermi Driac and Bose - Einstein statistics

نستخدم هنا أيضا فراغ الطور ذا الأبعاد x, y, z, p_x, p_y, p_z
وقد استبدلنا بالسرعات ومركباتها كمية الحركة $p = m v$ يكون حجم الخلية الصغيرة elment of volume فى هذا الفراغ هو :

$$H = dx\ dy\ dz\ dp_x\ zdp_y\ dp_z$$

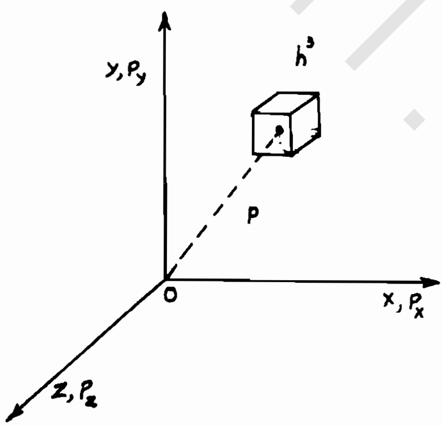
انظر شكل (١١ - ٢)

باستخدام الميكانيكا الكلاسيكية فإن مكان وكمية حركة أى جسيم يمكن تحديدهما بأى درجة من الدقة ، وذلك يمثله نقطة هندسية فى فراغ الطور .

أما إذا أدخلنا الميكانيكا الكمية quantum mechanics ، فإنه يوجد حد limit للدقة فى تحديد المكان وكمية الحركة معا ، وهو ما يمليه مبدأ عدم التحديد لهيزنبرج .

أصغر حجم فى فراغ الطور يمكن لنا أن نجزم بأن الجسيم موجود بداخله هو h^3 حيث h هو ثابت بلانك .

ويستنتج ذلك مباشرة باستخدام مبدأ هيزنبرج :



شكل (١١ - ٢)

obeikandl.com

$\Delta x \Delta p_x = h$

$\Delta y \Delta p_y = h$

$\Delta z \Delta p_z = h$

نطلق لفظ غرفة أو حجرة compartment على الحجم h^3 ، للتمييز بينه وبين الخلية Cell ذات الحجم H وهو حجم اختيارى ، ويشترط فيه فقط أن تكون أبعاده $dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z$ صغيرة بالنسبة لأبعاد المجموعة xyz وكمية حركة الجسيمات $p_x\, p_y\, p_z$

∴ عدد الغرف فى الخلية = $n = \frac{H}{h^3}$

عدد النقط فى فراغ الطور داخل الخلية i = Ni =

تحدد مثل الأعداد Ni فى الخلايا المختلفة الحالة الماكروئية للمجموعة ، وبالتالى خواصها المحسوسة .

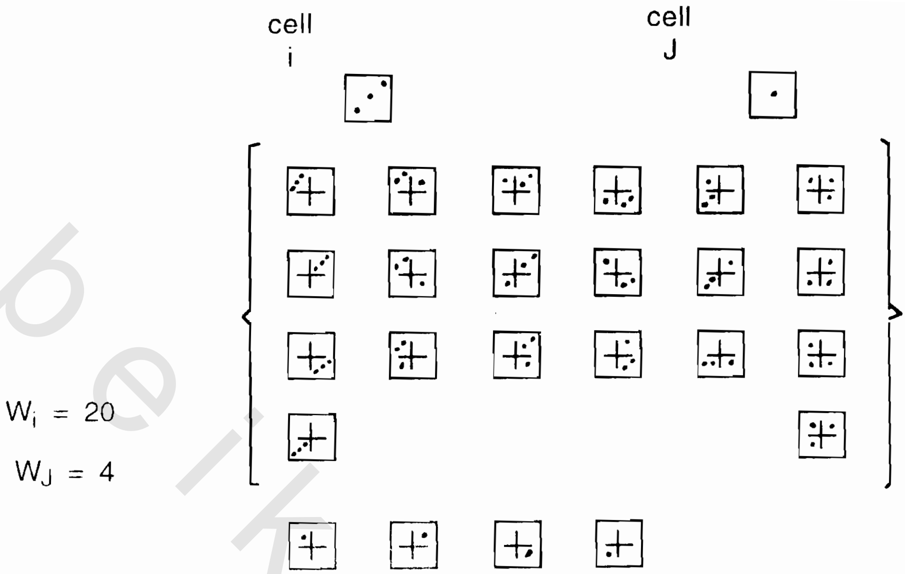
فى إحصاء ماكسويل وبولتزمان تتغير الحالة الميكرونية بتبادل عدد من النقط بنفس العدد بين خليتين ، ولكن ذلك لا يؤثر على الحالة الماكروئية ، شكل (١١ - ٣) وتغيير الحالة الميكرونية **يفرض أن يكون لكل نقطة شخصيتها الذاتية .**

« وهذا هو ما نلغى وجوده فى الإحصاء الكمى ».

إذ لا يوجد معنى من وراء التمييز بين جزىء وآخر فى غاز وفرض شخصية ذاتية لكل.

لذلك فإننا نعرف الجزيئات بنقط فى فراغ الطور وليس بحروف a b c كما سبق فى احصاء ماكسويل وبولتزمان ، **وهذا هو التعديل الأول فى الإحصاء الكمى** وتطبيقه يعطى إحصاء بوز واينشتين Bose - Einstein statistics ، **أما التعديل الثانى** فيأتى بسبب وجود قيد يضعه مبدأ باولى على عدد النقط التى يمكن أن تشغل كل حجره كما هو الحال بالنسبة للإلكترونات (اثنين $S = \pm 1/2$ فى كل غرفة) وتطبيق هذا الشرط أيضا يعطى إحصاء فيرمى وديراك :

Fermi - Dirac statisitcs



شكل (١١ - ٣)

إحصاء بوز - إينشتين :

ينطبق على الجسيمات التى لا تخضع لمبدأ باولى مثل الفوتونات والجسيمات التى لها دالة موجيه متماثلة Symmetric wave function ، ولذلك يمكن لأى عـدد من النقط أن تشغل أى حجرة فى الخلية .

اعتبر المثال التالى :

نفرض أن لدينا أربعة غرف فى كل خلية Cell وأن هناك خليتين فقط وأربعة نقط (كالمثال الذى أوردناه عند الكلام عن إحصاء ماكسويل وبولتزمان) .

بإهمال الشخصية الذاتية لكل نقطة (فى إحصاء ماكسويل عرفنا النقطة بالحروف a b c .. لإعطائها شخصيات ذاتية) نجد أن هناك عدد ٢٠ طريقة مختلفة لترتيب ٣ نقط

فى الخلية i وعدد ٤ أربعة طرق لترتيب نقطة واحدة فى الخلية j ، وهذا يعنى وجود احتمال ديناميكى حرارى لكل خلية يساوى عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب النقط فى الخلية .

إذا كان W_i & W_j هما الاحتمالين فى الخليتين i & j فى هذا المثال و

$$W_i = 20 \; ; \; W_j = 4$$

ويكون بذلك الإحتمال الديناميكى الحرارى للحالة الماكروئية التى يمثلها ٣ نقط فى الخلية j ونقطة واحدة فى الخلية i هى :

$$W = W_i \, . W_j = 20 \times 4 = 80$$

وواضح أن هذه القيمة تختلف تماما عن $W = 4$ التى حصلنا عليها للحالة الماكروئية ٣ : ١ فى إحصاء ماكسويل وبولتزمان .

وفى الحالة العامة عندما يكون هناك أى عدد من الخلايا يكون الاحتمال الديناميكى الحرارى هو :

$$W = \Pi \, W_i$$

حيث المضروب Π يشمل جميع الخلايا فى فراغ الطور .

العلاقة بين W_i ، N_i :

نفرض أننا نرقم الحجرات فى الخلية بالأرقام ١ ، ٢ ، ٤ ، . . . إلى n ونقط الطور phase point بالحروف a,b,c,... إلى N_i إذا أخذنا مثلا الخلية i يمكن أن تكون النقط فى حجراتها كما يأتى :

1 a b	2 c	3	4 d e f

شكل (١١ – ٤)

الخ . . . .

العدد المكتوب أولا يبين رقم الحجرة .

أولا : بما أن هناك عدد n حجرات ، لذلك فيوجد n طريقة لترتيب أرقام الحجرات

obeikandi.com

دون تغيير فى ترتيب الحروف cba .

ثانيا : عدد التباديل التى يمكن بها ترتيب n عدد و N_i نقطة ، بحيث يبدأ الترتيب دائماً برقم الحجرة هو : $(n + N_i - 1)\,!$

« وضع « – ١ » هنا لوجوب بدء الترتيب برقم دائما »

∴ عدد الطرق المختلفة التى يمكن ترتيب بها الاعداد والنقط هى

$$n\,(n + N_i - 1)\,!$$

ثالثا : يتكرر حدوث بعض هذه الترتيبات بين عدد n حجرات فمثلا كما فى شكل (١١-٥):

(أ)	4 d e f	3	2 c	1 a b
(ب)	1 a b	2 c	4 d e f	3

شكل (١١ - ٥)

الترتيب (أ) هو بعينه الترتيب (ب) ويعطى نفس الحالة الميكرونية .

لذلك نتفادى التكرار لنفس الحالة بالقسمة على $n\,!$

رابعا : بما أن الحروف $a\,;\,b\,;\,c$ كلها متماثلة ولا فرق بينها ، لذلك فإن N_i حرفا يمكن أن تترتب فى الخلية بعدد من الطرق يساوى $N_i\,!$ ، وتعطى جميعا نفس الحالة الميكرونية .

لذلك نتفادى التكرار لنفس الحالة بالقسمة على $N_i\,!$.

∴ عدد الحالات الميكرونية الغير متكررة =

$$\frac{n\,(n + N_i - 1)\,!}{n\,!\,N_i\,!}$$

أى أن الاحتمال الديناميكى الحرارى فى الخلية i هو :

obeikandl.com

$$W_i = \frac{(n + N_i - 1)\,!}{(n-1)\,!\,N_i\,!}$$

« وضعنا هنا $n\,! = n\,(n-1)\,!$ »

ويتطبيق ذلك فى المثال المعطى حيث : $n = 4$

$N_i = 3\,,\ N_j = 1$

نجد أن :

$$W_i = \frac{(4+3-1)\,!}{(4-1)\,!\,3\,!} = \frac{6\,!}{3\,!\,3\,!} = 20$$

$$W_j = \frac{(4+1-1)\,!}{(4-1)\,!\,1!} = \frac{4!}{3\,!\,1!} = 4$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها بالعد البسيط .

أخيرا وبما أن كل حالة ميكرونية للخلية i يمكن أن يقابلها أى حالة ميكرونية للخلية j . لذلك يكون عدد الحالات الميكرونية لجميع الخلايا وهو الاحتمال الديناميكى الحرارى للمجموعة هو :

$$W = \Pi\ W_i = \Pi\ \frac{(n + N_i - 1)\,!}{(n-1)\,!\,N_i\,!}$$

دالة التوزيع لبوز وإينشتين :

حالة الاستقرار أو الاتزان نحصل عليها عندما يكون الإنتروبيا S أكبر ما يمكن .

ولكن $S = k \ln W$ يكون إذاً شرط الاتزان هو :

$$\delta \ln W = 0$$

$$\therefore\ \ln W = \Sigma\left(\ln(n + N_i - 1)\,! - \ln(n-1)\,! - \ln N_i\,!\right)$$

وباستخدام تقريب سترلنج ($\ln N\,! = N\ln N - N$) وبإهمال العدد ١ فى المعادلة بالمقارنة بالأعداد الكبير N_i & n نحصل على :

$$\ln W = \Sigma \left(N_i + n \right) \ln \left(N_i + n \right) - n \ln n - N_i \ \ln \ N_i \ !)$$

وبمفاضلة المعادلة :

$$\therefore \ \delta \ \ln \ W = \Sigma \left[\ln \frac{n + N_i}{N_i} \right] \delta \ N_i \ = \ 0$$

وباعتبار أن الطاقة الكلية للمجموعة ثابتة ، وكذلك عدد الجسيمات يكون :

$$\delta \ N = \Sigma \ \delta \ N_i \ = \ 0$$

$$\delta \ U = \Sigma \ W_i \ \delta \ N_i \ = \ 0$$

وبضرب المعادلة الأولى فى $\ln \ B$ -

والمعادلة الثانية فى β-

وبالجمع مع معادلة $\delta \ \ln \ W \ = \ 0$ نحصل على :

$$\Sigma \left[\ln \frac{n + N_i}{N_i} - \ln \ B \ - \ \beta \ \omega_i \right] \delta \ N_i \ = \ 0$$

يلاحظ أن قيم : $\delta \ N_i$ لا تتوقف على أى شىء وكل حد فى المجموع يتلاشى على حدة .

$$\therefore \ \ln \frac{n + N_i}{N_i} = \ln \ B \ + \ \omega_i$$

$$\therefore \ N_i \ = \frac{n}{B \ \exp \ \beta \ \omega_i \ - 1} = n \, . \, f$$

وتوضع عادة قيمة الثابت $B = 1$ ، حيث إن الاتفاق النظرى مع التجربة يستلزم ذلك، وتكون بذلك دالة التوزيع لبوز وإينشتين هى :

$$f = \frac{1}{\left[e^{\omega_i / kT} - 1 \right]}$$

علما بأن :
$$\beta \ = \ \frac{1}{kT}$$

obeikandl.com

تطبيق : بتطبيق إحصاء بوز وإينشتين على غاز من الفوتونات يشكل إشعاعا حراريا درجة حرارته المطلقة T ، أثبت أن كثافة الطاقة لهذا الغاز فى المدى بين $\upsilon + d\upsilon$ هى :

$$E(\upsilon) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\upsilon^3 d\upsilon}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}$$

حيث c , k , h تأخذ معانيها المألوفة .

فإذا اعتبرنا حالة غاز من الفوتونات طاقة كل فوتون $h\upsilon$ تصبح دالة التوزيع :

$$f(\upsilon) = \frac{1}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}$$

كمية الحركة للفوتون

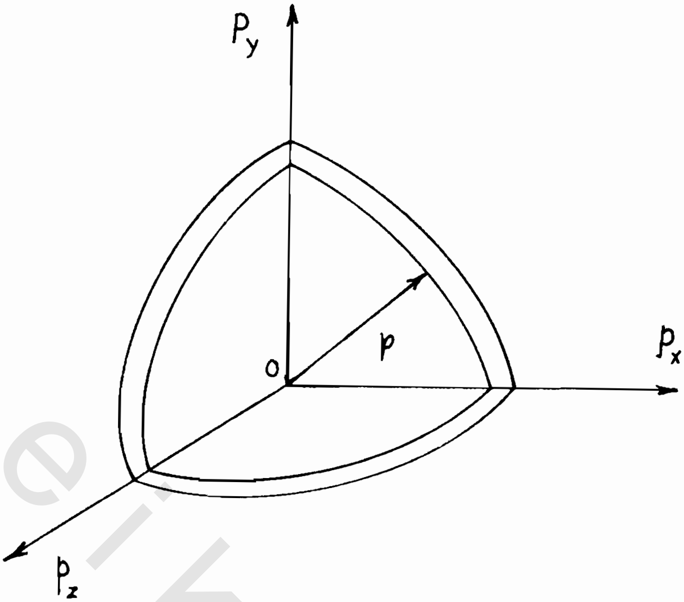
$$m\,c = p = \frac{h\upsilon}{e} = \frac{\omega}{c}$$

باستبدال n فى معادلة N_i بالمقدار $\frac{2}{h^3}\, dx\, dy\, dz\, dp_x\, dp_y\, dp_z$ وأيضا N_i بـ d^6N (المعامل التفاضلى السادس لـ N) وبإجراء التكامل فى الفراغ على x, y, z نحصل على توزيع كمية الحركة فى الفراغ . (المعامل 2 فى قيمة n باعتبار وجود نوعين من الفوتونات يمينى right handed ، ويسارى left نسبة إلى أن الضوء يمكن أن يكون ، استقطابه الدائرى يمينا أو يساريا : (right or left circularly polarized light

$$\therefore\ d^3N = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{1}{\left(e^{pc/kT} - 1\right)}\, dp_x\, dp_y\, dp_z$$

وباعتبار قشرة كريه رقيقة فى فراغ الطور نصف قطرها p وسمكها dp شكل (١١ - ٦) يكون :

$$dN_p = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{4\pi p^2}{\left(e^{pc/kT} - 1\right)}\, dp$$



شكل (١١ – ٦)

ويمكن تحويل المعادلة السابقة لتعطى توزيع الفوتونات بدلالة الترددات ، وذلك باستخدام العلاقات :

$$p = \frac{h\upsilon}{c} \quad ; \qquad dp = \frac{h}{c}\, d\upsilon$$

$$\therefore \quad dN_{\upsilon} = \frac{8\pi V}{c^3} \cdot \frac{\upsilon^3}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}\, d\upsilon$$

وبما أن عدد الفوتونات لوحدة الحجوم هو $\frac{dN_P}{V}$ وطاقة الفوتون $h\upsilon$ تكون كثافة الطاقة enegy density (الطاقة لوحدة الحجوم) فى المدى بين (υ & $\upsilon + d\upsilon$) هو :

$$E(\upsilon)\, d\upsilon = \frac{h\upsilon}{V}\, dN_{\upsilon} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\upsilon^3}{\left(e^{h\upsilon/kT} - 1\right)}\, d\upsilon$$

وتتفق هذه المعادلة مع معادلة بلانك لكثافة الطاقة الإشعاعية فى حيز درجة حرارته المطلقة T .

إحصاء فيرمى وديراك Fermi - Dirac Statistics :

لإيجاد نوع من الإحصاء يصلح للجسيمات التى لها دوال موجية غير متماثلة anti symmetric wave functions مثل الإلكترونات والبروتونات .. إلخ . ، يجب تطبيق مبدأ باولى لكى لا يشغل أى مستوى للطاقة أكثر من جسيمين ، وهذا يعنى أن الحجرة compartment فى فراغ الطور (ذات الحجم h^3) لا يمكن أن يوجد بها سوى جسيمين . ($S = \pm 1/2$)

وهذا يعنى أن إحداثيات هذه الحجرات فى فراغ الطور تناظر تماما الأعداد الكمية للجسيم .

$\therefore$ عدد الجسيمات التى يمكن أن تشغل كل خلية هو :

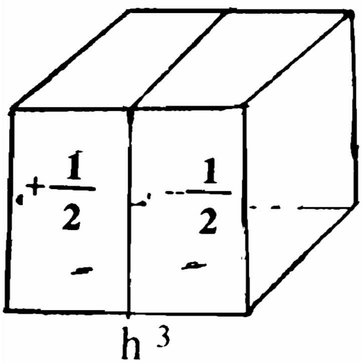
$$n = 2\,\frac{H}{h^3} = \frac{\text{حجم الخلية}}{\text{حجم الحجرة}} \times ٢$$

نفرض أن الجسيم الواحد يشغل غرفة واحدة أى نصف حجرة ، بفرض أن الحجرة (مستوى الطاقة الواحد) مقسم إلى غرفتين ، شكل (١١ – ٧) .

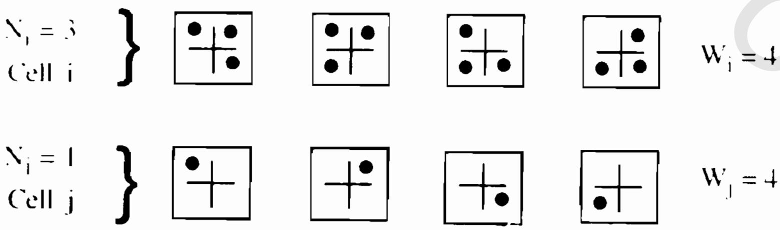
وبالعودة للمثال الخاص بتوزيع الأربع نقط فى الخليتين .

وباعتبار الحالة الماكروئية :

$N_j = 1 \;\&\; N_i = 3$



شكل (١١ – ٧)



شكل (١١ – ٨)

obeikandl.com

أى أنه يوجد أربعة طرق فقط لترتيب ثلاث نقط فى الخلية i شكل (١١ – ٨) وكذلك أربعة طرق لترتيب نقطة واحدة فى j أى أن عدد الطرق الكلية أو الاحتمال الديناميكى الحرارى لهذه الحالة الماكروئية $(N_i = 3 , N_j = 1)$ هو :

$$W = W_i \; W_j = 16$$

وهذا يختلف عن العدد 4 لنفس الحالة الماكروئية بإستخدام إحصاء ماكسويل ، وكذلك العدد $W_i = 80$ باستخدام إحصاء بوز وإينشتين .

∴ الاحتمال الديناميكى الحرارى لأى عدد من الخلايا هو :

$$W = \Pi \; W_i$$

العلاقة بين N_i & W_i :

نفرض أن هناك n غرفة فى خلية فيها عدد N_i مشغول والباقى $(n - N_i)$ خال (يلاحظ هنا أن الغرفة الواحدة يشغلها نقطة واحدة)

∴ عدد التباديل الغير متماثلة داخل الخلية i وهى الاحتمال الديناميكى الحرارى لها:

$$W_i = \frac{n\,!}{N_i\,!\,(n - N_i)\,!}$$

حيث تباديل الفراغات (الغرف) ! n وتباديل المشغول فقط منها ! N_i وتباديل الفارغ منها ! $(n - N_i)$ وتطبيق ذلك على المثال المعطى :

$N_j = 1$ & $N_i = 3$ & $n = 4$ نحصل على :

$$W_j = \frac{4\,!}{1\,!\,3\,!} = 4 \;\&\; W_i = \frac{4\,!}{3\,!\,1\,!} = 4$$

وهى النتيجة التى حصلنا عليها بالعد البسيط .

∴ الاحتمال الديناميكى الحرارى لحالة ماكروئية باستخدام إحصاء فيرمى وديراك هو:

$$W = \Pi \; \frac{n\,!}{N_i\,!\,(n - N_i)\,!}$$

وباستخدام المعادلة $S = k \ln W$ ، ثم باعتبار أن حالة الاستقرار تكون عندما تصبح S قمة نوجد شرط الاستقرار Maximum entropy من المعادلة :

$$\delta \ln W = 0$$

$$\therefore \ln W = \Sigma \left[(\ln n! - \ln N_i! - \ln (n - N_i)!\right]$$

وباستخدام تقريب سترلنج نحصل على :

$$\ln W = \Sigma \left(n \ln n - N_i \ln N_i - n \ln (n - N_i) + N_i \ln (n - N_i) \right)$$

وبالمفاضلة بالنسبة إلى N_i والمساواة بالصفر نحصل على :

$$\delta \ln W = \Sigma \ln \frac{n - N_i}{N_i} \delta N_i = 0$$

ولما كان العدد الكلى لنقط المجموعة ثابتاً وكذلك الطاقة الكلية لذلك :

$$\delta N = \Sigma \delta N_i = 0$$

$$\delta U = \Sigma \omega_i \delta N_i = 0$$

وبضرب المعادلة الأولى فى $-\ln B$ والثانية فى $-\beta$ ، وبالجمع مع معادلة $\delta \ln W = 0$ نحصل على :

$$\Sigma \left(\ln \frac{n - N_i}{N_i} - \ln B - \beta \omega_i \right) \delta N_i = 0$$

ولكن طالما أن δN_i فى الخلايا المختلفة لا يتوقف على بعضه البعض :

$$\therefore \ln \frac{n - N_i}{N_i} - \ln B + \beta \omega_i = 0$$

$$\therefore N_i = \frac{n}{\left(B e^{\beta \omega_i} + 1 \right)}$$

وباستخدام الديناميكا الحرارية كما سبق فى حالة إحصاء ماكسويل وبولتزمان نجد أن :

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

أما عن قيمة الثابت B فقد أوجد سومر فيلد Sommerfeld قيمته (الطريقة طويلة ومعقدة ولا مجال لذكرها هنا) كما يأتى :

$$B = e^{-\omega_F / KT}$$

حيث ω_F هى طاقة فيرمى ، وسيرمز لها بالرمز E_F فيما بعد .

وهذا يعطى دالة التوزيع لفيرمى وديراك على الصورة :

$$\frac{N_i}{n} = f = \frac{1}{\left(e^{(w_i - w_F)/kT} + 1\right)}$$

ولإيجاد دالة التوزيع فى فراغ الطور بدلالة كمية الحركة p نضع كما سبق :

$$n = \frac{2H}{h^3} = \frac{2}{h^3}\, dx\, dy\, dz\; dp_x\, dp_y\, dp_z$$

ونستبدل بدلا من N_i القيمة $N_i = d^6 N$ ، وكذلك بدلا من W_i القيمة W فنحصل على

$$d^6N = \frac{2}{h^3}\, \frac{1}{\left[e^{(w - w_F)kT} + 1\right]}\, dp_x\, dp_y\, dp_z\, dx\, dy\, dz$$

وباجراء التكامل على x.y.z

$$\therefore\; d^3N = \frac{2V}{h^3}\, \frac{1}{\left(e^{(w - w_F)kT} + 1\right)}\, dp_x\, dp_y\, dp_z$$

وباعتبار وحدة الحجوم من المجموعة نقسم على الحجم V

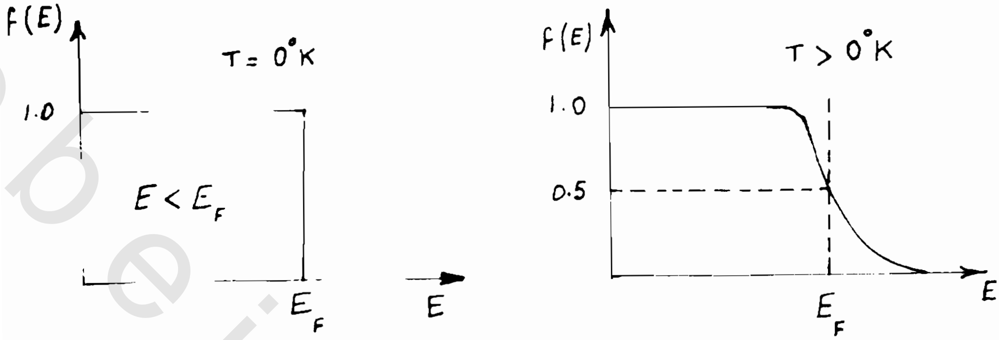
$$\therefore\; d^3N = \frac{2}{h^3}\; .\; f\; .\; dp_x\, dp_y\, dp_z$$

حيث : $f = \dfrac{1}{e^{(w - w_F)kT} + 1}$ وتسمى دالة التوزيع لفيرمى – وديراك

طاقة فيرمى E_F . Fermi Energy :

نطبق إحصاد فيرمى وديراك على الغاز الإلكترونى الكمى ، نفرض أن E هى طاقة احد المستويات الممكنة an allowed state ، وأن طاقة فيرمى هى E_F . احتمال أن يكون هذا المستوى من الطاقة E مشغولا بإلكترونين هو :

$$f(E) = \frac{1}{\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1\right)}$$



شكل (١١ – ٩)

ولتوضيح معنى طاقة فيرمى E_F نرسم بيانيا الدالة $f(E)$ بدلالة الطاقة E .

عند درجة الصفر المطلق تكون جميع مستويات الطاقة الأقل من مستوى طاقة فيرمى جميعها مشغول بإلكترونين لكل مستوى . وتكون قيمة دالة التوزيع 0.5 للإلكترون وواحد صحيح لمستوى الطاقة $(f(E) = 1)$.

جميع المستويات الأعلي من E_F تكون شاغرة إذا كانت درجة الحرارة هى صفر مطلق، شكل (١١ – ٩) .

إذا رفعنا درجة الحرارة من الصفر المطلق تستطيع الإلكترونات التي تشغل مستويات الطاقة القريبة من طاقة فيرمى أن تكتسب طاقة بفعل الحرارة ، فترتفع إلى المستويات الأعلى الشاغرة .

ارتفاع درجة الحرارة لا يؤثر على جميع إلكترونات الغاز ، ولكنها فقط تؤثر على الإلكترونات عند سطح فيرمى ، والتى يمكن لها أن تجد مكانا شاغرا فى مستويات الطاقة الأعلى منها ، كما يحدث فى حالة البخر من السوائل حيث لا يغادر السطح سوى الجزيئات العلوية عند السطح الحر .

لهذا السبب فإن احصاء فيرمى ديراك يتميز بعدم التأثر الكبير بدرجة الحرارة ،

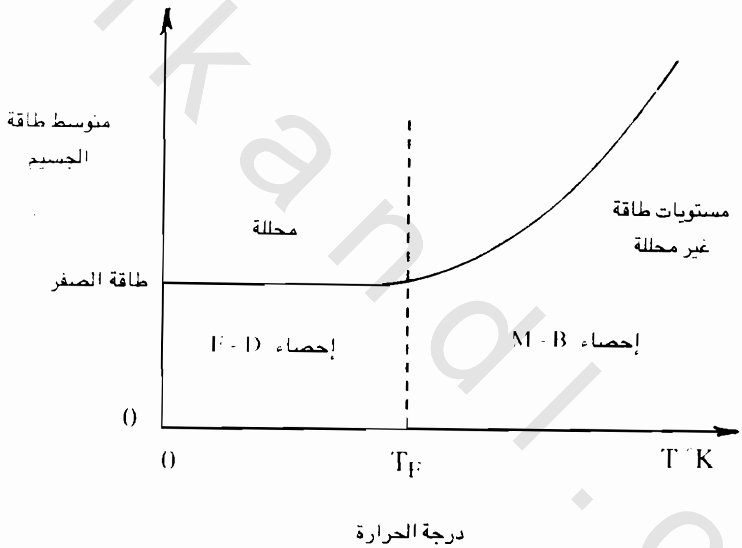
obeikandl.com

وأيضا عند الصفر المطلق يوجد بالمجموعة كمية من الطاقة تسمى طاقة نقطة الصفر Zero point energy وهذا اختلاف جوهرى عن إحصاء ماكسويل الذى تتلاشى فيه تماما طاقة المجموعة عند درجة الصفر المطلق .

درجة حرارة فيرمى : Fermi temperature

عند رفع درجة الحرارة بدرجة كبيرة نجد أن توزيع فيرمى يتحول إلى توزيع ماكسويل شكل (١١ – ١٠) . وتعرف درجة الحرارة التى يحدث عندها هذا التحول بدرجة حرارة فيرمى T_F °K وتعطى بالمعادلة :

$$E_F = k\,T_F$$



شكل (١١ – ١٠)

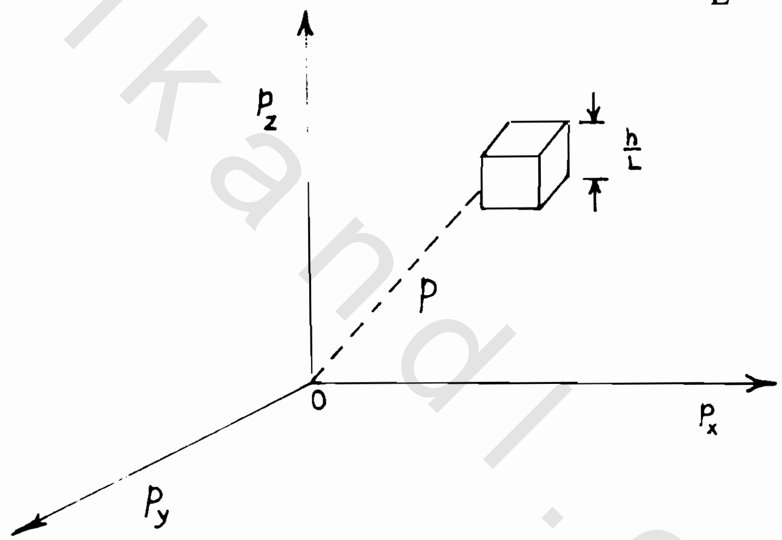
وتصل قيمة T_F للفلزات حيث تركيز الإلكترونات كبيرا إلى حوالى ٢٠٫٠٠٠ درجة مطلقة . بينما فى حالة أشباه الموصلات فقد تكون T_F أقل من درجة حرارة الغرفة . وهذا يعنى أنه فى حالة أشباه الموصلات يمكن اعتبارها غير محللة non degenerate عند درجة حرارة الغرفة ، حيث يجوز عندئذ تطبيق إحصاء ماكسويل .

تطبيق إحصاء فيرمى وديراك على الغاز الإلكترونى فى الموصلات

حساب طاقة فيرمى : E_F للغاز الإلكترونى فى الفلزات

يتحدد فى فراغ الطور ذى الأبعاد $x\ y\ z\ p_x\ p_y\ p_z$ حالة أى الإلكترون فى الغاز . لنعتبر فقط فراغ كمية الحركة $p_x\ p_y\ p_z$. نفرض أن الإلكترون موجود في بلورة مكعبة طول ضلعها L .

عدم التحديد في كمية الحركة Δp_x فى الاتجاه السينى يساوى حسب قاعدة هيزنبرج $\frac{h}{L}$ ، وبالمثل يكون عدم التحديد فى كمية حركة الإلكترون فى كل من الاتجاهين y,z هو $\frac{h}{L}$



شكل (١١ - ١١)

فإذا قسمنا فراغ كمية الحركة إلى خلايا شكل (١١ - ١١) طول الضلع فيها $\frac{h}{L}$ يكون حجمها $\frac{h^3}{L^3}$ أى $\frac{h^3}{V}$ حيث V حجم الجسم .

تمثل كل خلية حالة من حالات الطاقة الإلكترونية energy state ، والتى يشغلها

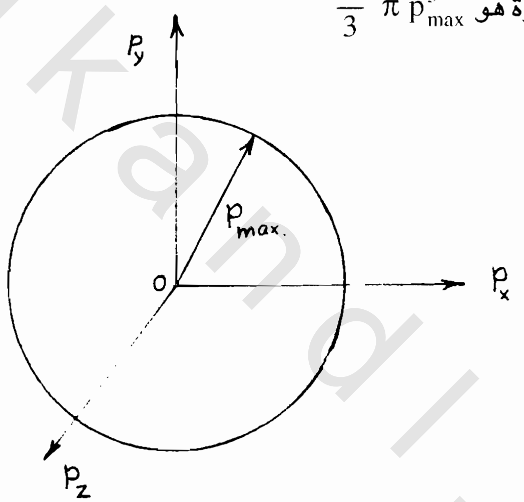
إلكترونان لفهما متعاكس تبعا لمبدأ باولى .

إذا بردنا الفلز إلى درجة الصفر المطلق فإن الإلكترونات تتجمع حول مركز الإحداثيات فى فراغ كمية الحركة .

« كلما اقتربت الخلية من مركز الإحداثيات كلما نقصت طاقة الإلكترونين بداخلها حيث إن بعد الخلية هو p كمية الحركة الكلية »

تمتلئ الخلايا القريبة من المركز O ويتجمع الغاز الإلكترونى داخل كرة متمركزة مع O نصف قطرها هو p_{max} ، ويسمى سطح هذه الكرة بسطح فيرمى Fermi surface ، شكل (١١ - ١٢) .

حجم هذه الكرة هو $\frac{4}{3}\pi p_{max}^3$



شكل (١١ - ١٢)

نفرض وجود n إلكترونات فى بلورة الفلز . يكون حجم فراغ كمية الحركة الذى يحتوى على جميع المستويات المشغولة عند درجة الصفر المطلق هو $\frac{n}{2} \cdot \frac{h^3}{V}$ ، وهذا هو نفس حجم كرة فيرمى . أى أن :

$$\frac{4}{3}\pi p_{max}^3 = \frac{n}{2} \cdot \frac{h^3}{V}$$

obeikandi.com

لكن طاقة حركة الإلكترون عند مستوى فيرمى للطاقة هو :

$$E_{max} = 1/2\ m\ u_{max}^2 = \frac{1}{2\,m}\ p_{max}^2$$

حيث E_{max} هو أكبر طاقة إلكترونية فى الغاز وهى طاقة فيرمى E_F ، ومن المعادلات السابقة تعطى طاقة فيرمى بالمعادلة :

$$E_F = \frac{h^2}{2\,m}\left(\frac{3\,n}{8\,\pi\,V}\right)^{2/3}$$

$$= \frac{h^2}{2\,m}\left(\frac{3\,N}{8\,\pi}\right)^{2/3}$$

حيث N هو تركيز الإلكترونات أو كثافتها فى الغاز ، وتساوى $N = \frac{n}{V}$ عدد الإلكترونات فى وحدة الحجوم من البلورة .

نستخلص مما سبق أن إلكترونات الفلز عند درجة الصفر المطلق تكون لها طاقات تتراوح بين الصفر وطاقة فيرمى E_F ، التى تعتمد على تركيز الإلكترونات وتصل قيمتها فى الفلزات المعتادة إلى بضعة إلكترون فولط .

ويلاحظ أن هذه القيمة كبيرة جدا بالنسبة لطاقة التهييج الحرارى k T thermal agitation ، والتى تبلغ حوالى ۰.۰۳ إلكترون فولط عند درجة حرارة الغرفة . وهذا يدل على أنه حتى عند درجات الحرارة المرتفعة المعتادة فى المعمل فإن عدد قليل جدا من هذه الإلكترونات هى التى تثار إلى مستويات أعلى للطاقة .

مثلا : عند درجة ۱۰۰۰ °م تكون تقريبا $kT = 0.1\ e\ V$ وبالنسبة لفلز $E_F = 5\ e\ V$ نجد أن مجموعة الإلكترونات تظل محللة حتى عند هذه الدرجة degenerate .

عند درجة حرارة فيرمى T_F حيث :

$$E_F = k\,T_F$$

يمكن للتهييج الحرارى $k\ T_F$ أن يصل إلى أصغر مستوى ممكن للطاقة ، ولذلك يمكن لكل المجموعة من الإلكترونات أن تثار . وعندئذ نستطيع تطبيق إحصاء ماكسويل وبولتزمان،

obeikandi.com

حيث إن المجموعة تصبح غير محللة non degenerate . تصل قيمة T_F للفلزات المعتاده إلى أكثر من $20000\ ^{\circ}K$.

طول موجة دى برولى المصاحبة لإلكترون عند مستوى فيرمى للطاقة :

إذا كانت سرعة الإلكترون عند مستوى فيرمى هى u_F تكون طاقته :

$$E_F = 1/2\, m\, u_F^2 = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi}\right)^{2/3}$$

منها :

$$\therefore\ U_F = \frac{h}{m}\left(\frac{3N}{8\pi}\right)^{1/3}$$

وبتطبيق قاعدة دى برولى يصاحب هذا الإلكترون طول موجة تعطى بالمعادلة :

$$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}} = \left(\frac{8\pi}{3N}\right)^{1/3}$$

$$= \frac{h}{(2\ m\ E_F)^{1/2}}$$

وتصل قيمة λ_{min} فى الأحوال المعتادة إلى حوالى ٦ أنجستروم ، وهى أكبر من البعد البينى بين ذرات البلورات المعتادة .

كثافة مستويات الطاقة Density of energy states :

تعرف كثافة مستويات الطاقة $N(E)$ بأنها عدد المستويات لكل وحدة طاقة فى وحدة الحجوم :

It is the number of energy states per unit energy range per unit volume

لإيجاد تغير الدالة $N(E)$ مع الطاقة E نفرض أن العدد الكلى لحالات الطاقة هو Ns لوحدة الحجوم :

obeikandi.com

$$\because \quad Ns = \int N(E)\, dE$$

ولكن من معادلة فيرمى :

عدد الإلكترونات N فى وحدة الحجوم هو :

$$N = \frac{\pi}{3}\left(\frac{8\,m}{h^2}\right)^{3/2} E^{3/2}$$

وبالتعويض

$$\therefore \quad 2\int N(E)\, dE = \frac{\pi}{3}\left(\frac{8\,m}{h^2}\right)^{3/2} E^{\frac{3}{2}} = N$$

وبالمفاضلة بالنسبة إلى E

$$\therefore \quad 2\, N(E) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8\,m}{h^2}\right)^{3/2} . E^{1/2}$$

$$\therefore \quad 2\, N(E) = 1/2\ C . E^{1/2}$$

حيث

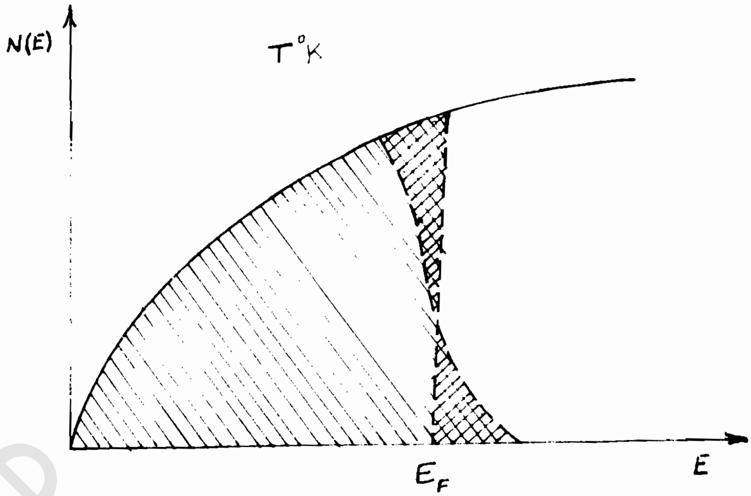
$$C = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8\,m}{h^2}\right)^{3/2}$$

أى أن العلاقة بين E & N(E) علاقة قطع مكافىء ، كما فى شكل ١١ – ٤ ، ويبين الجزء المظلل مستويات الطاقة المشغولة عند الصفر المطلق . ويبين الخط المتقطع المستويات المشغولة عند درجة T°K .

الحرارة النوعية الإلكترونية للفلزات Electronic specific heat :

الحرارة النوعية الناشئة عن الغاز الإلكترونى تنشأ بسبب الزيادة فى طاقة الإلكترونات القريبة من سطح فيرمى ، والتى يمكن إثارتها لمستويات أعلى .

obeikandi.com



شكل (١١ – ١٣)

عند درجة الحرارة $T°K$ تكون نسبة الإلكترونات المثارة إلى غير المثارة هى $\frac{kT}{kT_F}$

شكل (١١ – ١٣) ، فإذا كان عدد الإلكترونات فى وحدة الحجوم هو :

يكون عدد الإلكترونات المثارة $\frac{T}{T_F} \cdot N$ وذلك عند الدرجة $T°K$ ، وتكون بذلك طاقة الإلكترونات المثارة هى :

$$N \cdot \frac{T}{T_F} \cdot kT$$

= الطاقة الممتصة من التهييج الحرارى .

ومن تعريف . الحرارة النوعية الإلكترونية (تفاضل الطاقة بالنسبة لدرجة الحرارة)

نحصل على :

$$C_V = \frac{d}{dT}\left[\frac{Nk}{T_F} \cdot T^2\right]$$

$$= \frac{2NkT}{T_F} = \gamma\ T$$

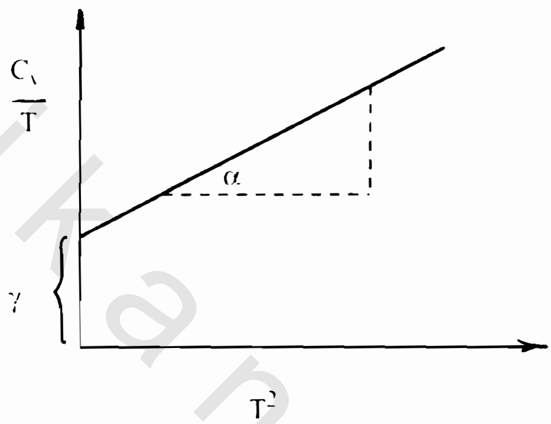
∴ تتناسب الحراره النوعيه الالكترونيه مع درجة الحراره المطلقه . ولكن الحرارة النوعية الكلية للفلز هى مجموع الحرارة النوعية الإلكترونية والحرارة النوعية الذرية ، وسنثبت فيما بعد نظرية ديباى للحرارة الذرية ، حيث C_V الذرية تتناسب مع T^3

أى أن :

$$(C_v)_{total} = \propto T^3 + \gamma T$$

وقيمة $(C_v)_{tot}$ هى التى تقاس عادة فى المعمل .

وبقياس الحرارة النوعية عند درجات الحرارة المختلفة ثم برسم العلاقة بين $\frac{C_V}{T}$ & T^2 كما فى شكل (١١ - ١٤)



شكل (١١ - ١٤)

ومن الرسم يمكن استنتاج قيمة ثابت التناسب γ ،

ومن المعادلة :

$$\gamma = \frac{2Nk}{T_F}$$

يمكن إيجاد درجة حرارة فيرمى T_F ، وكذلك طاقة فيرمى $E_F = kT_F$ عمليا .

إيجاد السرعة المتوسطة والطاقة المتوسطة للإلكترون عند درجة الصفر المطلقة

نفرض منطقة صغيرة من الطاقة dE تقع بين E & $E + dE$ عدد مستويات الطاقة

في هذه المنطقة = $N(E)\ dE$.

عدد الإلكترونات التي تشغلها :

$$2\ f\ N(E)\ dE = \delta n\,(E)$$

وقد ضربنا في أثنين لأن كل مستوى يشغله إلكترونان . وكذلك في الدالة occupation probability function f لنحصل على العدد الفعلي للإلكترونات الموجودة عند الدرجة $T^{\circ}K$.

$$f = \frac{1}{\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1\right)}$$

وتساوي الدالة f واحداً صحيحاً عندما تكون الدرجة $T = 0^{\circ}K$.

لأن جميع المستويات أقل من E_F تكون عندئذ مشغولة بإلكترونين .

.عدد الإلكترونات في المنطقة dE عند الدرجة $T^{\circ}K$

$$\delta\ n\,(E) = \frac{2x\ 1/2\ C\ E^{\frac{1}{2}}\ dE}{\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1\right)}$$

لكن :

$$E = 1/2\ m\ u^2$$

$$\therefore\ dE = m\ u\ d\ u$$

$$\therefore\ E^{1/2}\ dE = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} m\ u^2\ d\,u$$

$$\therefore\ \delta n\ (u) = \frac{8\,\pi\, m^3\, u^2\, du}{h^3\left(e^{(E-E_F)/kT} + 1\right)}$$

عند درجة الصفر المطلق $f = 1$

ومن القوانين الإحصائية : السرعة المتوسطة للإلكترون :

$$\overline{u} = \int_0^{uF} u\ \ \delta n \Big/ \int_0^{uF} \delta n$$

لكن $\int_0^{uF} \delta n = N$ حيث N هو عـدد مستويات الطاقة الكلية تحت E_F .

$$\therefore \bar{u} = \frac{1}{N} \int_0^{u_F} \frac{8\pi m^3}{h^3} u^3 \, du$$

$$= \frac{8\pi}{N} \frac{m^3}{h^3} \frac{u_F^4}{4}$$

لكن:

$$u_F = \frac{h}{m} \left(\frac{3N}{8\pi} \right)^{1/3}$$

$$\therefore \bar{u} = 3/4 \; u_F$$

وإذا كانت $\bar{E}$ هى الطاقة المتوسطة فى الغاز الإلكترونى

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{u_F} 1/2 \, m u^2 \, \delta n}{\int_0^{u_F} \delta n}$$

$$= \frac{1}{N} 1/2 \; m \int_0^{u_F} u^2 \, \delta n$$

$$= \frac{m}{2N} \cdot \frac{8\pi}{h^3} m^3 \int_0^{u_F} u^4 \, d\,u$$

$$= \frac{4\pi m^4}{N h^3} \cdot \frac{u^5 F}{5}$$

وباستخدام معادلتى u_F & E_F نحصل على :

$$\bar{E} = 3/5 \; E_F$$

مسـألة (١) أوجـد ضـغط الغـاز الإلكتـروني عند الصـفـر المطلق ، علمـا بأن $E_F = 5 \text{ ev}$ وكثافته الإلكترونية ١٠^٢٢ لكل سم^٣ .

الحل :

$$\therefore\ p = 1/3\, N\ m\ u^2$$
$$= 2/3\ N\ (1/2\ m\, u^2)$$
$$= 2/3\ N\ 3/5\ E_F$$

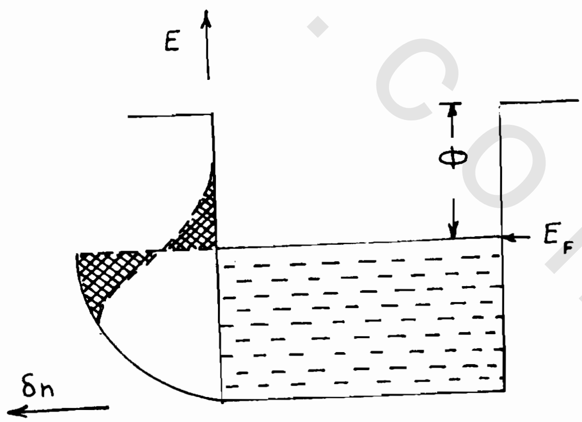
وقد عوضنا هنا بدلا من $1/2\ m\ u^2$ وهى الطاقة المتوسطة للإلكترون فى الغاز الإلكترونى بالقيمة $3/5\ E_F$

$$E_F = 5 \times 10^{-12}\ \text{ergs}$$
$$\therefore\ p = 2/3 \times 10^{22} \times 3/5 \times 5 \times 1.6 \times 10^{-12}$$
$$\therefore\ p = 3.2 \times 10^{10}\ \text{dynes / cm}^2$$

الانبعاث الثرميونى : Thermionic emission

الانبعاث الثرميونى هو هروب الإلكترونات من السطوح الساخنة للفلزات والمعادن وأشباه الموصلات ، وهو المصدر الرئيسى للإلكترونات فى الصناعة (الصمامات وأنابيب الفلورسنت ، إلخ) .

يوجد عند سطح أى جسم صلب حاجز طاقة enrgy barrier ϕ يقدر بعدة إلكترون فولط يمنع هروب الإلكترونات من الجسم انظر شكل (١١ – ١٥) . عند رفع درجة الحرارة تكتسب بعض الإلكترونات من الطاقة ما يسمح لها بأن تغادر الجسم وتصبح حرة .



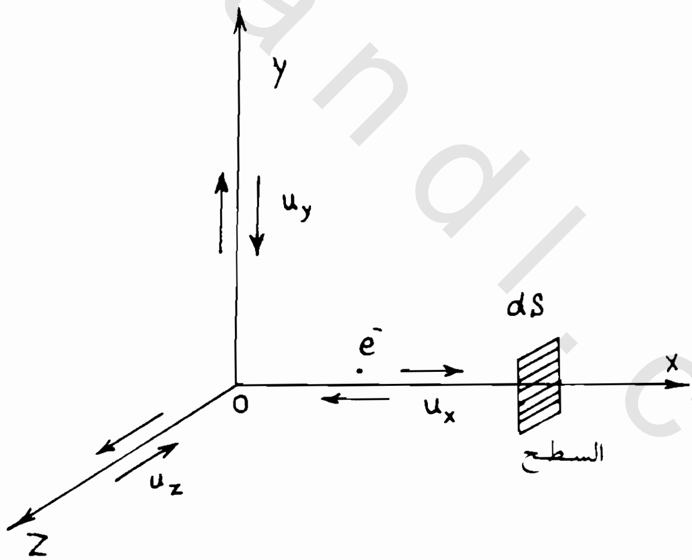
(شكل ١١ – ١٥)

يطلق على القانون الذى يربط عدد الألكترونات المنبعثة حراريا (التيار الثرميونى) ودرجة الحرارة بقانون رتشاردسون ودشمان .

قانون رتشاردسون ودشمان : Richardson - Dushman law

عندما يسخن جسم صلب طاقة فيرمى له E_F ودالة الشغل ϕ work function تتحرر فقط الإلكترونات التى تكون طاقاتها أكبر من $E > E_F + \phi$ وتعريف دالة الشغل هى الطاقة التى يجب إعطاؤها للإلكترون الذى يشغل مستوى فيرمى للطاقة لكى يغادر نهائيا الجسم . هذا الشرط ضرورى ولكنه غير كاف ، إذ أن الإلكترون قد يكون له الطاقة المطلوبة ، ولكنه يتحرك فى غير اتجاه السطح أى لداخل الجسم .

اعتبر محاور إحداثيات x,y,z داخل الجسم . واعتبر جزءا من السطح الذى ينبعث منه الإلكترونات عموديا على محور x ، شكل (١١ – ١٦)



(شكل ١١ – ١٦)

معدل انبعاث الإلكترونات التى لها كمية حركة فى المنطقة بين p , p + dp من وحدة المساحات من السطح الساخن هو :

$$u_x \quad n(p) \; d \; p$$

ولكن :

$$E = \frac{p^2}{2m} \qquad\qquad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

$$\therefore \; \frac{\delta E}{\delta p_x} = u_x$$

معدل الانبعاث من وحدة المساحات :

$$\frac{\delta E}{\delta p_x} \cdot n(p) \cdot d\,p = n(p) \quad dE \; dp_y \; dp_z$$

وقد عوضنا عن $dp = dp_x \, dp_y \, dp_z$

سبق أن ذكرنا أن مستوى الطاقة يمثله الحجم $\frac{h^3}{V}$ فى فراغ كمية الحركة ، ويشغله إلكترونان فقط . باعتبار وحدة الحجوم من الجسم يكون عدد الإلكترونات لوحدة الحجوم فى فراغ كمية الحركة هى :

$$N(p) = \frac{2}{h^3}$$

وذلك بفرض أن جميع مستويات الطاقة مشغولة ، أى عند الصفر المطلق ، وعموما عند أى درجة حرارة $T^\circ K$ يصبح هذا العدد :

$$n(p) = \frac{2}{h^3} \cdot f$$

حيث f هى دالة التوزيع لفيرمى وديراك وتساوى :

$$f = \frac{1}{\left(e^{(E - E_F)/kT} + 1 \right)}$$

وتكون بذلك الكثافة التيارية المنبعثة j . وهى حاصل ضرب الشحنة الإلكترونية e فى معدل الانبعاث للإلكترونات ذات الطاقة $E_x > E_F + \phi$ والتى تصدم وحدة مساحات السطح فى اتجاه x هى :

$$j = e\,\frac{2}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{E_i+\phi}^{\infty}\frac{dp_y\,dp_z\,dE}{\left(e^{(E-E_i)/kT}+1\right)}$$

ولإيجاد قيمة هذا التكامل نضع :

$$\theta = \frac{E - E_F}{k\,T}$$

$$\therefore\ d\,\theta = \frac{d\,E}{k\,T}$$

ونضع أيضا :

$$\begin{aligned} E &= E_x + E_y + E_z \\ &= E_x + \frac{1}{2\,m}\left(p_y^2 + p_z^2\right) \end{aligned}$$

$$\therefore\ \theta = \frac{1}{k\,T}\left[\left(E_x - E_F\right) + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2\,m}\right] =$$

$$= \frac{1}{k\,T}\left[\theta + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2\,m}\right]$$

وبالتعويض فى معادلة j وبمعرفة أن :

$$\int \frac{d\,\theta}{e^{\theta} + 1} = \log\left(1 + e^{-\theta}\right)$$

نحصل على :

$$j = \frac{2\,k\,T\,e}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\log\left(1 + e^{-\theta}\right)dp_y\ dp_z$$

فى الظروف التجريبية المعتادة تكون $\theta >> 1$ ، ولذلك بفك اللوغاريتم والاكتفاء بالحد الأول فقط $e^{-\theta}$ نحصل على :

$$j = \frac{2\,k\,T\,e}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\theta}\ dp_y\ dp_z$$

وبالتعويض θ ما يساويها

$$\therefore\ j = \frac{2\,k\,T\,e}{h^3}\ .\ e^{-\phi/kT}\ .\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(p_y^2 + p_z^2\right)/2\,mkT}\ dp_y\, dp_z$$

وبمعرفة أن :

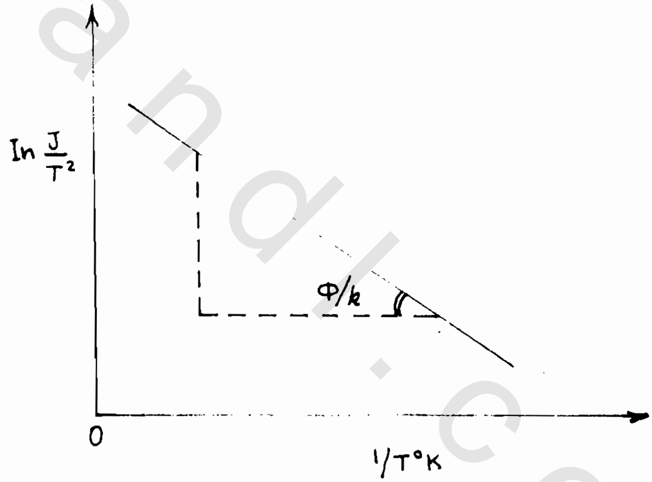
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

نحصل على :

$$j = \frac{2\,k\,Te}{h^3}\ .\ e^{-\phi/kT}\ .\ 2\ \ m\,k\,T\ .\ \pi$$

$$= \frac{4\,\pi\, m\, e\, k^2}{h^3}\ .\ T^2\ .\ e^{-\phi/kT}$$

$$\therefore\ j = A\ .\ T^2\ .\ e^{-\phi/kT}$$



شكل (١١ – ١٧)

وتعرف هذه المعادلة بقانون رتشاردسون دوشمان

وبرسم العلاقة بين $\log_e \dfrac{j}{T^2}$ و $\dfrac{1}{T}$ نحصل على علاقة خطيه شكل (١١ – ١٧)

يعطى ميل الخط مباشرة النسبة ϕ / k .

obeikandl.com

وتعتبر هذه هى الطريقة العملية لإيجاد قيمة دالة الشغل ϕ للانبعاث الثرميونى ، حيث من السهل قياس شدة التيار الثرميونى j . باستخدام صمام ثنائى بسيط يمكن تسخين فتيلة لدرجات حرارة مختلفة ، يسهل قياسها بواسطة بيرومتر ضوئى وقياس شدة التيار فى كل حالة ثم من الرسم البيانى نوجد قيمة ϕ :

ويلاحظ أن الثابت $A = \dfrac{4\pi m e k^2}{h^3}$ له قيمة تبلغ ١٢٠ أمبير / سم^{٢} – درجة

كما إن دالة الشغل للمواد المختلفة تتراوح بين واحد وخمسة إلكترون فولط .

opeikandl.com

مسائل وتمارين الباب الحادى عشر

١ – باستخدام الإحصاء الكمى لفيرمى وديراك ، أوجد أكبر احتمال ديناميكى حرارى للحالات الماكروئية المختلفة في مجموعة من ٤ نقط طور داخل خليتين بكل منهما ٤ حجرات .

الحل :

$$W_i = \frac{n\,!}{N_i\,!\,(n - N_i)}$$

الحالات الماكروئية هى :

(a) $N_i = 4 \quad N_j = 0$

(b) $N_i = 2 \quad N_j = 2$

(c) $N_i = 1 \quad N_j = 3$

(d) $N_i = 0 \quad N_j = 4$

أولا : الاحتمال الديناميكى الحرارى : الحالة الأولى :

(a) $W(i) = \dfrac{4\,!}{0\,!\,4\,!} = 1$

$W(j) = 1 \qquad W(a) = 1$

(b) $W(i) = \dfrac{4\,!}{2\,!\,2\,!} = 6$

$W(j) = \dfrac{4\,!}{2\,!\,2\,!} = 6$

$W(b) = 36$

(c) $W_i = \dfrac{4\,!}{1\,!\,3\,!} = 4$

$W_j = \dfrac{4\,!}{3\,!\,1\,!} = 4$

$W(c) = 16$

(d) $W_i = \dfrac{4\,!}{0\,!\,4\,!} = 1$

$W_j = 1$

obeikandl.com

$$W(d) = 1$$

أى أنه يحدث أكبر احتمال عندما يكون التوزيع متساويا فى الخليتين .

٢ - عرف فراغ الطور لغاز والاحتمال الديناميكى الحرارى له . إذا علم أن فراغ الطور مقسم إلى خليتين وأن به أربع نقط فقط . أوجد عدد الحالات الماكروئية والاحتمال الديناميكى الحرارى لكل حالة .

الحل :

الحالات الماكروئية خمس هى :

N_i	4	3	2	1	0
N_j	0	1	2	3	4

الاحتمال الديناميكى الحرارى هو :

$$W = \frac{N\,!}{\Pi\; N_i}$$

وتكون قيمته للحالات الماكروئية الخمس هى على الترتيب :

$$W(4,0) = 1$$
$$W(3,1) = 4$$
$$W(2,2) = 6$$
$$W(1,3) = 4$$
$$W(4,0) = 1$$

٣ - مجموعة من N جسيم ممثله فى فراغ طور مقسم إلى m خلية فإذا كانت طاقة الجسيم W واحدة لجميع الخلايا كما أن $N >> m$ ، فأوجد عدد النقط فى كل خلية وكذلك الطاقة الداخلية والانتروبيا للمجموعة .

الحل : عدد النقط فى كل خلية :

$$N_i = \frac{N}{m}$$

الطاقة الداخلية الكلية = عدد الجسيمات × طاقة الجسيم = $N\omega$

الإنتروبيا

$$S = k \ln W$$
$$= k\left[N \ln N - \Sigma N_i \ln N_i\right]$$
$$= k\left[N \ln N - \sum_m \frac{N}{m} \ln \frac{N}{m}\right]$$
$$= k\left[N \ln N - m \frac{N}{m} \ln \frac{N}{m}\right]$$
$$= k N \ln m$$

٤ – أوجد الاحتمال الديناميكى الحرارى لكل من

(أ) التوزيع الأكثر احتمالا

(ب) التوزيع الأقل احتمالا

لمجموعة مكونة من $١٠^{٦}$ جزيئات فى فراغ طور مقسم إلى ٥ × $١٠^{٥}$ خلية ، علما بأن طاقة الجزىء ω_1 واحدة لجميع الخلايا .

٥ – إذا فرضنا أن فراغ الطور مقسم إلى ثلاث خلايا ، وأن عدد النقط الكلى هو ٣٠ مقسمة بالتساوى فى هذه الخلايا ، وأن طاقة الجسيم فى الخلية الأولى ٢ جول وفى الثانية ٤ جول وفى الثالثة ٦ جول . احسب التغير فى عدد الجسيمات فى الخليتين الأولى والثانية ، علما بأن هذا التغير فى الثالثة يساوى –٢ عند الاستقرار الحرارى .

الحل :

$$\delta N_1 + \delta N_2 + \delta N_3 = 0$$
$$\delta N_3 = -2$$

أيضا بما أن الحالة مستقرة

$$\Sigma \ln N_i \quad \delta N_i = 0$$

$$\Sigma \; w_i \quad \delta N_i = 0$$

$$2 \delta N_1 + 4 \delta N_2 + 6 \delta N_3 = 0$$

$$\delta N_1 + \delta N_2 = 2$$

بحل المعادلتين :

$$\delta N_1 = -2$$

$$\delta N_2 = 4$$

٦ – فى تجربة شتيرن وجيرلاخ تترتب العزوم المغناطيسيه للذرات ، إما موازيه أو عكس موازية لاتجاه المجال . أوجد باستخدام الميكانيكا الإحصائية العزم المغناطيسى الكلى فى اتجاه المجال .

الحل : نفرض أن B هو العزم المغناطيسى للذرة فى اتجاه المجال و B- فى عكس اتجاه المجال .

بما أنه لا يوجد سوى مستويين للطاقة

إذن دالة التقسيم

$$Z = e^{-\omega_1 / kT} + e^{+\omega_2 / kT}$$

حيث الطاقة :

$\omega_1 = - BH$ فى اتجاه المجال

$\omega_2 = + BH$ فى عكس اتجاه المجال

$$Z = e^{-x} + e^{+x}$$
$$= 2 \cosh x$$

حيث :

$$x = \frac{BH}{kT}$$

عدد الذرات فى وحدة الحجوم فى مستويى الطاقة هما :

$$n_1 = \frac{n}{2} \frac{e^x}{\cosh x}$$

$$n_2 = \frac{n}{2} \frac{e^x}{\cosh x}$$

العزم المغناطيسى الكلى فى تجاه المجال :

$$M = B (n_1 - n_2)$$

$$= n B \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = n B \tanh x$$

وإذا كانت x كبيرة نحصل على العزم :

$$M = n B$$

وإذا كانت x صغيرة يكون العزم .

$$M = \frac{n B^2 H}{k T}$$

وتكون القابلية المغناطيسية

$$X = \frac{n B^2}{k T}$$

٧ – أوجد قيمة طاقة فيرمى للتنجستن بفرض وجود إلكترونين حرين لكل ذرة . ثم أثبت أنه عند رفع درجة الحرارة إلى ٣٠٠٠° كلفن تختلف قيمة الطاقة بأقل من ٠,٠١ ٪ .

٨ – احسب الحرارة النوعية الإلكترونية فى التنجستن بدلالة ثابت الغاز (اعتبر طاقة فيرمى له ٩ إلكترون فولط) .

٩ – أوجد عدد الإلكترونات التى تعبر وحدة المساحات فى وحدة الزمن داخل فلز فى درجة الصفر المطلق فى اتجاه ما .

obeikandl.com

ثم أوجد الكثافة التيارية المناظرة لهذه الحركة بالأمبير / سم^{٢} .

١٠ – أوجد الحركة الإزاحية drift mobility للإلكترونات (بالسم^{٢} / فولط ثانية) فى النحاس عند الصفر المطلق .

١١ – عدد الذرات فى وحدة الحجوم (سم^{٣}) للصوديوم هى ٢,٥ × ١٠^{٢٢} ومعامل التوصيل له عند الصفر المطلق ، ٢,٣ × ١٠^{٥} أوم$^{-١}$ سم$^{-١}$.

أوجد متوسط الزمن الحر وحركية الإلكترون فى الصوديوم عند الصفر المطلق .

١٢ – باستخدام إحصاء فيرمى أوجد طاقة فيرمى عند الصفر المطلق للإلكترونات فى الصوديوم . ثم أوجد قيمة ضغط الغاز الإلكترونى عند هذه الدرجة .

١٣ – احسب الحرارة الذرية للألومنيوم وللنحاس عند درجة ١ كلفن وقارن ذلك بالحرارة الإلكترونية .

للنحاس $E_F = 7.1 \ \ eV$

للألومنيوم $E_F = 11.7 \ \ eV$

درجة حرارة ديباى للألومنيوم $\theta = 398$

درجة حرارة ديباى للنحاس $\theta = 315$

١٤ – احسب ضغط الغاز الإلكترونى عند الصفر المطلق لمادة طاقة ، فيرمى لها خمسة إلكترون فولط .

الحل :

$$p = 1/3 \ N \ m \ v^2$$

obeikandl.com

$$= 2/3 \text{ (average energy)}$$

$$= 2/3 \ (3/5 \ E_F)$$

ومنها

$$p = 3.2 \times 10^{10} \text{ dynes / cm}^2$$

١٥ – الوزن الذرى للصوديوم ٢٣ وكثافته ١ جم / سم^{٣} احسب عدد الإلكترونات الحرة لكل سم^{٣} فى الصوديوم ثم أوجد طاقة فيرمى . ما هو طول المسار الحر للإلكترونات فى الصوديوم ؟

(عدد أفوجادرو = ٦ × ١٠^{٢٣} لكل جرام ذرة)

الحل :

عدد الذرات لكل سم^{٣} = عدد الإلكترونات الحرة

$$N = \frac{6 \times 10^{23}}{23}$$

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi}\right)^{2/3}$$

$$= 3 \text{ eV.}$$

١٦ – احسب حرارة فيرمى لشبه موصل ، علما بأن كثافة ناقلات الشحنة ١٠^{١٦} لكل سم^{٣} .

الحل :

$$E_F = 5 \times 10^{16} \text{ ergs}$$

$$= k \ T_F$$

$$\therefore T_F = 4 \ K.$$

openkandil.com

١٧ – أوجد طول الموجة المصاحبة لإلكترون حر فى شبه موصل عند درجة $27\ ^\circ C$.

١٨ – أثبت أن طاقة فيرمى $(E_F)_T$ عند درجة الحرارة T k تتغير مع طاقة فيرمى عند الصفر المطلق $(E_F)_0$ وفقا للمعادلة :

$$E_F(T) = E_F(0)\,(1 - 2 \propto T)$$

حيث $\propto$ معامل التمدد الطولى للمادة .

١٩ – أوجد تغير طاقة فيرمى للصوديوم بين الصفر المطلق ودرجة الغرفة $27\ ^\circ C$ علما بأن $\propto = 71 \times 10^{-6} / ^\circ K$ & $E_F(0) = 2.5$ eV .

٢٠ – أوجد حركية الإلكترونات فى الصوديوم والألومنيوم ، علما بأن موصليتهما على الترتيب هى $\sigma(N_a) = 22 \times 10^6$ ، $\sigma(A\ell) = 35 \times 10^6\ ohm^{-1} / m^{-1}$ وطاقة فيرمى لهما $E_F(N_a) = 3.2$ eV ، $E_F(A\ell) = 11.7$ eV ،
بماذا تفسر الفرق فى الحركية فى كل منهما ؟

٢١ – أثبت أن معامل الانضغاط K_e للغاز الإلكترونى تعطى بالمعادلة :

$$K_e = \frac{3}{2}\,\frac{V}{NE_F}$$

حيث V هو الحجم الذى يشغله عدد N إلكترونات ، E_F طاقة فيرمى .

٢٢ – يتجمد فلز على شكل طبقات أحادية كثيفة . فإذا علم أن لهذا الفلز إلكترونا واحداً فى مستوى الطاقة الأول S - state ، أثبت :

١ – أن $E_F = \dfrac{h^2 N}{4 \pi m}$ ، حيث N عدد الذرات للمتر المربع .

٢ – أوجد كثافة مستويات الطاقة $N(E)$ بدلالة الطاقة E .

٣ – عين شكل منطقة بريلوين الأولى ، وأوجد عدد الإلكترونات التى تملؤها .

٢٣ – باستخدام دالة فيرمى للتوزيع الإلكترونى أوجد درجة الحرارة التى يكون عندها احتمال وجود إلكترون بطاقة أعلى من طاقة فيرمى بمقدار $0.5\ eV$ هو ١ ٪ ، علماً بأن $E_F = 5.0\ eV$.

٢٤ – أوجد التيار الثرمويونى لفتيل من التنجستن طوله $0.05\ m$ وقطره $10^{-4}\ m$ ودرجة حرارته $2000\ k$ عندما لا يؤثر عليه أى مجال خارجى .

وإذا أثرنا بمجال كهربائى شدته $5 \times 10^5\ V/m$ عند سطح الفتيل ، فأوجد مقدار النقص فى دالة الشغل الثرميونى .

٢٥ – المقاومة النوعية للفضة عند درجة الغرفة هى 1.6×10^{-8} ohm.m . والعدد الفعال من إلكترونات التوصيل هو 0.9 لكل ذرة وطاقة فيرمى $E_F = 5.5\ eV$. أوجد متوسط طول المسار الحر للإلكترونات وسرعتها الإزاحية فى مجال $100\ V/m$. ثم أوجد معامل التوصيل الحرارى للفضة . (كثافة الفضة $1.055 \times 10^4\ Kg/m^3$) .