الباب السابع

النهايات العظمى والصغرى للدوال فى متغير واحد ، نقط الإنقلاب

Maxima and minima values of univariate functions , points of inflexion

٧-١ : عام :-

درسنا فيما سبق كيفية إيجاد المشتقة الأولى والثانية وكذلك المشتقات العليا لأى دالة ، وسنرى فى هذا الباب أهمية المشتقة الأولى وكيفية الاستفادة منها فى فهم أكثر للدوال ذات المتغير الواحد المستقل أى التى على الصورة :- $y = f(x)$ حيث تُؤثر قيم x المختلفة فى قيمة الدالة ككل (y) .

وسنرى أن أى دالة من هذا النوع تكون إما :-

أ) متزايدة increasing ب) متناقصة decreasing جـ) ثابتة الحد stationary

وذلك خلال فترة أو مدى محدد لقيم المتغير المستقل x .

أو قد تكون الدالة بحيث يجتمع فيها كل ما سبق أى متزايدة فى جزء ومتناقصة فى آخر وثابت فى جزء ثالث وفى خلال المدى المحدود x .

كما يهدف هذا الباب إلى كيفية تحديد القيم (الحرجة) - critical values لـ x والتى تكون عندها الدالة y قيمة عظمى أو صغرى أو ثابتة وذلك حيث أنه فى جميع فروع العلم المختلفة وتطبيقاتها العملية ، تُترجم المشاكل العملية إلى معادلات رياضية ونحتاج عادة إلى تحديد أقصى قيمة أو أقل قيمة لمتغير ما فى عمليات الإنتاج أو التصنيع أو التسويق .

فإذا كانت لدينا العلاقة (العملية) على شكل دالة $y = f(x)$ فى متغير واحد x ، حيث y تمثل حجم الإنتاج الأمثل الذى يحقق أقل تكلفة إنتاج ، x تمثل تكلفة ، فإن الأمر يتطلب معرفة أقصى حجم إنتاج (نهاية عظمى - قيمة عظمى) ممكن بأقل تكلفة إنتاج (نهاية صغرى - قيمة صغرى) .

أو تحديد أقصى سعر للمنتج أو أقصى كمية مبيعات عند أقل تكلفة أجـور أو أقـل زمـن تشغيل وهكذا ، والأمثلة فى هذا الصدد ، لا حصر لها .

والآن سنبدأ فى دراسة متعمقة وبشئ مـن التفصيـل للدالـة $y = f(x)$ ومشـتقاتها الأولى والثانيــة .

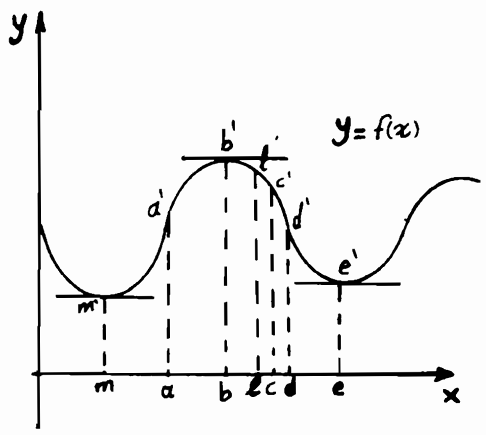
٧-٢ :- تزايد وتناقص الدالة

(١) إذا أخذنا قيمة لـ x أكبر بقليل من a وكانت $f(x)$ أكبر من $f(a)$ وفـى نفـس الوقت إذا أخذنا قيمة لـ x أقل بقليل من a وكانت $f(x)$ أقل من $f(a)$ فإنـه يقـال أن الدالة $f(x)$ ، فى هذه الحالة ، دالة متزايدة عند $x = a$

(٢) أما إذا أخذنا قيمة لـ x أكبر بقليل من a وكـانت $f(x)$ أقـل مـن $f(a)$ وفـى نفس الوقت إذا أخذنا قيمة لـ x أقل بقليل من a وكانت $f(x)$ أكبر من $f(a)$ فإنه يقال أن الدالة $f(x)$ ، فى هذه الحالة ، دالة متناقصة عند $x = a$

مثـــــال :-

الدالة المبينة فى شكل (٧-١) متزايدة عند $x = a$ وذلك واضـح مـن أن المنحنـى علـى يمين النقطة a' يقع فوقها بينما المنحنى على يسار a' يقع تحتها



شكل (٧-١)

وهذا واضح فى نقط المنحنى التى إحداثيها الصادى aa' أو قريباً منه أى فى نطاق جزء المنحنى الذى إحداثيه الصادى يعادل تقريباً إرتفاع $k'l'$

أما إذا أخذنا نقط أخرى خارج جزء المنحنى $k'l'$ مثل نقطة c' فإن الأمر يختلف حيث أن c' تقع على يمين النقطة a' ولكن تحتها ، فى حين تقع النقطة h' على يسار a' ولكن فوقها .

وبدراسة الدالة المبينة ، سنجد أنها تتناقص عند $x = d$ حيث أنه بجوار النقطة d' تكون نقط المنحنى التى على يمينها تحتها مثل (e') بينما النقط التى على يسارها مثل c' تكون فوقها كما وأن الدالة متناقصة كذلك عند $x = c$

فى حين أن الدالة عند النقط $(x = m\ ,\ x = b\ ,\ x = e)$ ، تكون لا متزايدة ولا متناقصة (ساكنة stationary)

حيث تكون للدالة عند $(x = m\ ,\ x = e)$ نهاية صغرى بينما عند $(x = b)$ تكون نهاية عظمى

(٣) ويُطلق على الدالة بأنها متزايدة فى الفترة $(a\ ,\ b)$ ، إذا كانت تتزايد عند كل نقطة من النقط الداخلية للفترة فيما بين $a\ ,\ b$ ويمكن للدالة تحت هذا التعريف أن لا تتزايد عند حدى الفترة أو عند أحد حديها .

(٤) ويُطلق على الدالة بأنها متناقصة فى الفترة $(a\ ,\ b)$ ، إذا كانت تتناقص عند كل نقطة من النقط الداخلية للفترة فيما بين $a\ ,\ b$ ويمكن للدالة تحت هذا التعريف أن لا تتناقص عند مدى الفترة أو عند أحد حديها .

(٥) تتناقص الدالة الموضحة بالشكل فى الفترة $(l\ ,\ d)$ حيث أنها تتناقص عند كل نقطة داخل الفترة ، وكذلك عند حديها $(l\ ,\ d)$

(٦) تتناقص الدالة الموضحة بالشكل فى الفترة $(b\ ,\ e)$ حيث أنها تتناقص عند كل نقطة داخل الفترة إلا أنها لا تتناقص عند حدى الفترة $(b\ ,\ e)$

(٧) تتزايد الدالة فى الفترة $(m\ ,\ b)$

(٨) غير أن الدالة لا تتزايد ولا تتناقص في الفترة (a , d) لأنها في الفترة (a , b) وهي جزء من الفترة الكلية (a , d) تكون متزايدة ، بينما في الفترة (b , d) تكون متناقصة .

(٩) إذا كانت الدالة تتزايد في الفترة (a , b) فإنه كلما ازدادت قيمة المتغير المستقل (x) ، كلما ازدادت قيم الدالة المناظرة له (y) وبالعكس فإنه إذا ازدادت قيم الدالة (y) كلما ازدادت قيم المتغير المستقل (x) في الفترة (a , b) فإن الدالة تكون متزايدة في الفترة (a , b) .

(١٠) وإذا كانت الدالة تتناقص في الفترة (a , b) فإنه كلما ازدادت قيمة المتغير المستقل (x) ؛ قلت قيمة الدالة المناظرة له (y) ؛ وبالعكس .

وهندسياً :-

يرتفع منحنى الدالة في الفترة أو الفترات التي تتزايد فيها الدالة كلما تحركنا إلى اليمين ، وينخفض في تلك الفترة أو الفترات التي تتناقص فيها الدالة .

٧-٣ :- إشارات المشتقة الأولى ودلائل تزايد وتناقص وثبوت الدالة عند نقطة

Sign of the differential coefficient

إذا كانت (y) دالة متصلة في (x) وزادت (x) بمقدار ضئيل للغاية مقداره (Δx) فإن الدالة (y) إما أن تتزايد أو تتناقص بمقدار (Δy) .

أ) فإذا ازدادت (y) : فإن (Δy) تكون موجبة ، (Δx) موجبة دائماً (فرضاً) وبذلك فإن معدل التغير والذي يمكن التعبير عنه بنهاية المقدار $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ أو $\frac{dy}{dx}$ وتكون موجبة.

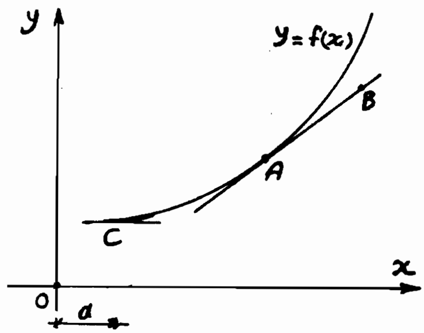
ب) وإذا تناقصت (y) : فإن (Δy) تكون سالبة وبذلك فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون سالبة .

أي أن :-

١- لو ازدادت (y) بزيادة (x) فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون موجبة .

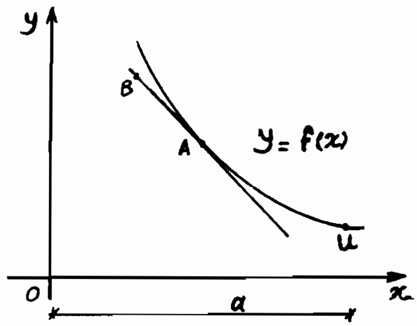
٢- لو نقصت (y) بزيادة (x) فإن $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تكون سالبة .

وهندسيـــاً :- فإنـه إذا كـان ميـل المماس AB موجبـاً، أنظـر الشـكل (٧-٢) فإنـه



شكل (٧-٢)

بالقرب من النقطة A ، يقع المنحنـى إلى يمـين النقطـة A وفوقهـا ؛ وإلى يسـارها تحتهـا أما إذا كان ميل المماس AB سالباً ، أنظر شكل (٧-٣) فإنه بالقرب من النقطة A يقـع



شكل (٧-٣)

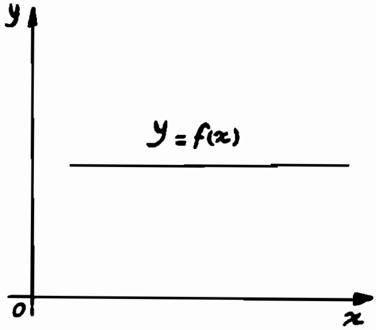
المنحنى إلى يمين النقطة A تحتها وإلى يسارها ، فوقها .

وإذا كانت الدالة عند نقطة $x=a$ ، لها مشتقة أولى تساوى الصفر ؛ $f`(a)=0$ فـإن الدالة عند النقطة $x=a$ يمكن أن تكون إما :-

متزايدة كما فى الشكل الأول (٧-٢) ، النقطة c

متناقصة كما فى الشكل الثانى (٧-٣) ، النقطة u

وكقاعدة فإن الدالة عند النقطة $x = a$ ، لاهـى متزايدة ولا متناقصة كما فى شكل (٧-٤) .

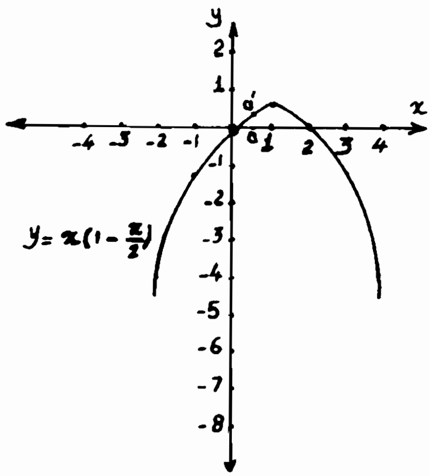


شكل (٧-٤)

ويُطلق على الدالة فى هذه الحالة ، بدالة ساكنة **Stationary**

مثـــال (١) :-

الدالة $y = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ ، كما هو موضح فى شكل (٧-٥)



شكل (٧-٥)

تتزايد عند النقطة $x = 0$ وذلك لأنه :

$$y = x - \frac{x^2}{2} \qquad \therefore y` = 1 - x$$

وبوضع $x = 0$ فى $y`$:-

$$\therefore y` = 1 - x = 1 - 0 = 1$$

أى أن $y` > 0$

كما أن هذه الدالة تتناقص عندما $x = 2$ لأن :-

$$y` = 1 - 2 = -1$$

أى أن $y` < 0$.

فى حين أنه فى النقطة $x = 1$ ، نجد أن :

$$y` = 1 - 1 = 0$$

وبذلك فإن الدالة ساكنة أى لا متزايدة ولا متناقصة .

وعليه فإن :-

(١) إذا كانت الدالة $y = f(x)$ تتزايد عند النقطة $x = a$ فإن مشتقتها (بفرض أنها قابلة للتفاضل فى هذه النقطة) ، عند هذه النقطة $(x = a)$ تكون موجبة كما فى شكل (٧-٢) النقطة A أو تكون المشتقة مساوية للصفر كما فى نقطة (c) بنفس الشكل

$$\therefore f`(a) \geq 0$$

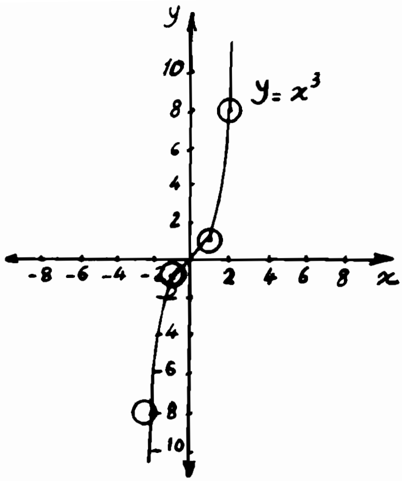
(٢) وبالمثل فإنه بالنسبة للدالة المتناقصة ، فإن مشتقتها تكون سالبة أو مساوية للصفر فى هذه النقطة $(x = a)$

$$\therefore f`(a) \leq 0 \text{ ،}$$

مثـــال (٢) :-

الدالة $y = (x^3)$ ، متزايدة عند أى نقطة ومشتقتها : $y` = 3x^2$ تكون موجبة عند جميع النقط ما عدا النقطة $(x = 0)$ حيث تكون $(y`)$ عندها مساوياً للصفر $y` = 0$

أنظر الرسم شكل (٧-٦) .

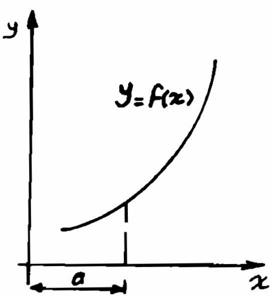


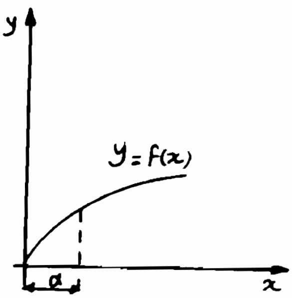
شكل (٧ – ٦)

وحيث أن الدوال الجبرية يمكن تمثيلها بيانياً ، لذلك فإن شكل المنحنى كما سنرى ورأينا سابقاً ، يبين لنا ما إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة وبالتالى ما إذا كانت المشتقة الأولى موجبة أم سالبة .

٧–٤ :– الدوال المتزايدة Functions which are increasing

وهى تظهر لنا فى الأشكال (٧–٧) ، (٧–٨) ، حيث A نقطة على المنحنى وإحداثيها السينى $x = a$ ، B نقطة أُخرى قريبة منها ، إحداثيها السينى $x = a + \Delta x$ ويُلاحظ ما يلى :–





شكل (٧–٧) ، **شكل (٧–٨)**

(١) إمـا أن تكـون المنحنيـات الممثلـة للدالـة أو أجــزاء منهــا مقعـرة لأعلــى وترتفــع Concave upwards and rising كما فى شكل (٧-٧) .

وأمثلة لهذا النوع :- أ) $y = x^2$ لقيم x الموجبة

ب) $y = 10^x$

جـ) $y = \tan x$ فيما بين $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$

(٢) أو قد تكون المنحنيات الممثلة للدالة أو أجزاء منهــا مقعـرة لأسـفل وترتفـع كذلـك Concave downwards and rising ، كما فى شكل (٧-٨)

وأمثلة لهذا النوع :- أ) $y = \sqrt{x}$

ب) $y = Log\ \ x$

جـ) $y = \sin x$ فيما بين $\left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$

وفى كلتا الحالتين فإن المنحنى يرتفع **لأعلى** وإلى **اليمين** كلما زادت x

وكما هو واضح من الأشـكال فإنه عندما تــزداد x بمقدار ضئيل Δx ، فإن y تزداد بمقدار مناظر مقداره Δy .

وبذلك فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وكذلك نهايتها تكون **موجبة** .

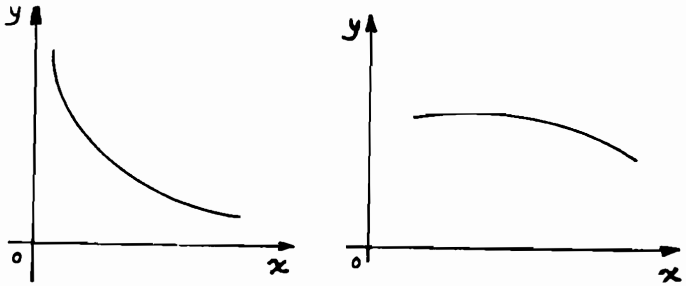
وهندســـياً :- فإنه يتضح أن المماس للمنحنى عند النقطة A يصنع زاوية حادة acute angle مع المحور OX

وبذلك فإن الميل والذى يمثله ظل الزاوية θ ($\tan \theta$) يكون **موجباً** ويتضح كذلك أنه فى شكل (٧-٧) فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون **موجبة**

خـــلاصـــة :- يُقال أن الدالة $f(x)$ ، دالة متزايدة فى فترة معينة لقيم المتغير المسـتقل (x) ، إذا كـانت $f(x_2) > f(x_1)$ لأى نقطتـين متجـاورتين فـى نفـس الفـترة وبحيـث $x_2 > x_1$ أى أنه إذا حدثت أى زيادة فى x فى خلال هذه الفترة فإنه يصاحبهـا زيـادة مناظرة فى y

٧-٥ :- الدوال المتناقصة Functions which are decreasing

وبنفس الطريقة كما فى حالة الدوال المتزايدة فإنه يمكن تمثيلها بالمنحنيات كما فى شكل (٧-٩) ، (٧-١٠) .



شكل (٧-٩) ، **شكل (٧-١٠)**

ويتضح فى كلتا الحالتين أنه إذا زادت قيمة x عند A بمقدار ضئيل مقداره Δx فإن قيمة الدالة تقل .

وبذلك فإن Δy تكون سالبة عندما Δx موجبة وعليه فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وكذلك نهايتها $\frac{dy}{dx}$ تكون **سالبة** .

وكما سبق فهنالك وضعان :-

(١) المنحنى مقعر لأعلى وهابطاً concave upwards falling كما فى شكل (٧-٩).

وأمثلة لهذا النوع :-

أ)- $y=\frac{1}{x}$

ب)- $y=x^2$ (لقيم x السالبة)

جـ)- $y=\cot(x)$ بين $\left(o\,,\frac{\pi}{2}\right)$

(٢) المنحنى مقعر لأسفل وهابطاً concave downwards falling كما فى شكل (٧-١٠)

وأمثلة لهذا النوع :-

أ)- $y=-x^2$ (لقيم x الموجبة)

ب)- $y=\sin x$ فيما بين $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

وتكون المماسات المرسومة لكل من هذين المنحنيين ، بحيث تصنع زاوية منفرجة Obtus angle مع محور السينات وبالتالى فإن $(\tan\theta)$ وميل هذا المماس يكون **سالباً**

خـــلاصـــة :-

يُقال أن الدالة $f(x)$ دالة متناقصة فى فترة معينة لقيم المتغير المستقل x إذا كانت $f(x_2)<f(x_1)$ لأى نقطتين متجاورتين x_1 , x_2 فى الفترة المعينة وبحيث $x_2>x_1$ أى أنه كلما حدثت زيادة لـ x فى خلال هذه الفترة فإنه يُصاحبها نقص فى قيمة y .

مثـــال (١) :-

إذا كانت $y=4x^2-20x+2$

فالمطلوب تحديد الفترة التى تكون فيها الدالة y :-

أ)- متزايدة .

ب)- متناقصة .

جـ)- لا متزايدة ولا متناقصة .

الحـــــل :-

يجب أولاً إيجاد قيمة y' أى المشتقة الأولى للدالة :

$\because\ y=4x^2-20x+2$

$\therefore\ y'=8x-20$

أ)- وتكون الدالة متزايدة عندما $y'>0$

أى عندما

$(8x-20)>0$

$i.e\ \ x>2.5$

ب)- وتكون الدالة متناقصة عندما $y'<0$

أى عندما

$0>(8x-20)$

$i.e\ \ x<2.5$

جـ)- وتكون الدالة لا متزايدة ولا متناقصة عندما $y' = 0$

$\therefore 8x - 20 = 0$

$\therefore \quad x = 2.5$

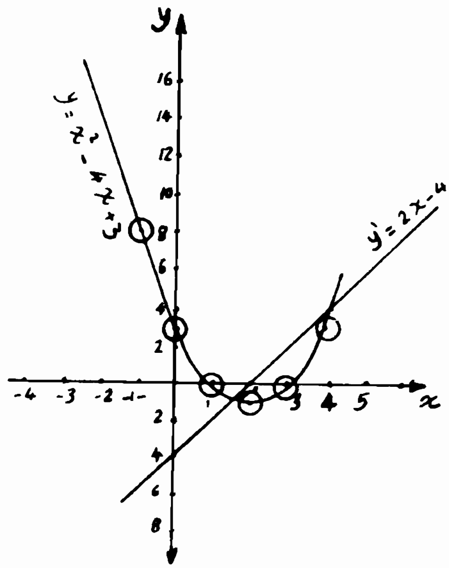
وبذلك فإن الدالة $4x^2 - 20x + 2$ $\leftarrow$

- متزايدة عندما $x > 2.5$
- لا متزايدة ولا متناقصة عندما $x = 2.5$
- متناقصة عندما $x < 2.5$

ملـــحوظة :- يقال أن الدالة $y = f(x)$ دالة ساكنة Stationary أى غير مـتزايدة ولا متناقصة عند النقطة $x = k$ ، إذا كانت قيمة $y' = 0$ عند هذه النقطة كمـا يتضـح فـى الفقرة التالية بالتفصيل .

٧-٦ :- القيـــم الثـــابتـــة Stationary values

ويظهر لنا فى شكل (٧-١١) الحالتان اللتان تم إيضاحهما فى شكلى (٧-٧) ، (٧-٩) .



شكل (٧-١١)

ويوضح شكل (٧-١١) الدالة :- $y = x^2 - 4x + 3$

وقد سبق دراستها فى شكل (٦-١) .

وسوف نتعرض لها بمزيد من الإيضاح فيما يلى :-

وحيث أن $\quad y = x^2 - 4x + 3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

والدالة الأخيرة $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تُمثل خطاً مستقيماً AB فى شكل (٧-١١) ويمكن ملاحظة التغيرات التالية فى كل من المنحنى والدالة وكما يتضح من الرسم :-

(١) عندما تزداد x من $(-\infty \; to \; +2)$ فإن y تتناقص

وقيم $\frac{dy}{dx}$ الممثلة بالخط المستقيم AB تكون سالبة [انظر شكل (٧-٩)]

(٢) عندما تزداد x من $(+2 \, to + \infty)$ فإن y تتزايد

ومن ثم فإن قيم $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة [انظر شكل (٧-٧)]

(٣) عند نقطة C يتوقف المنحنى عن التناقص ثم يبدأ فى الزيادة

وبذلك فإنه عندما $x = 2$ فإن قيمة y لا تتغير لحظياً بل تكون ثابتة

وبذلك فإنه لا يكون هنالك معدل للتغير وتكون $\frac{dy}{dx}$ = صفر

ويقطع الخط المستقيم AB المحور OX عند هذه النقطة $(x = 2)$ ومن ثم فإنه عند $x = 2$ فإنه يقال أن : -

الدالة لها قيمة ثابتة ويُطلق على C بأنها نقطة ثابتة على المنحنى

ويمكن تلخيص الاستنتاجات الهامة السابقة فيما يلى : -

(١) لو أن $x < 2$ فإن y تتناقص ، $\frac{dy}{dx}$ سالبة .

(٢) لو أن $x > 2$ فإن y تتزايد ، $\frac{dy}{dx}$ موجبة

(٣) عندما $x = 2$ عند نقطة C فإن y ولفترة لحظية ، لا هى متزايدة ولا متناقصة ، أى أن الدالة لها قيمة ثابتة عندما $\frac{dy}{dx} = 0$

وسوف نعتبر الآن الدالة : -

$$y = 3+2x-x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2-2x$$

ويوضح شكل (٧-١٢) هذه المنحنيات $\left[y = 3+2x-x^2 \ , \ y` = 2-2x\right]$

حيث يمثل الخط المستقيم AB الدالة المشتقة : - $2-2x$

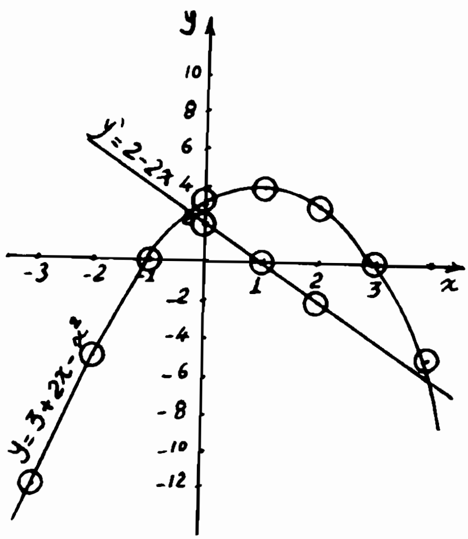
وبدراسة المنحنيات فى الشكل (٧-١٢) وكما سبق فسوف نلاحظ ما يلى : -

١) عندما $x < +1$ ، y متزايدة ، $\frac{dy}{dx}$ موجبة

٢) عندما $x > +1$ ، y متناقصة ، $\frac{dy}{dx}$ سالبة

٣) عندما $x = 1$ (عند نقطة c) فإن y تتوقف عن الزيادة وتبدأ فى التناقص

وبذلك فإن قيمة الدالة عند c تكون ثابتة



شكل (٧ - ١٢)

٧-٧ : - نقط التحول " الانعطاف " Turning Points

إذا ما قمنا بمقارنة النقط ذات القيم الثابتة فى شكل (٧-١١) ، (٧-١٢) [نقطة c فى كل من الشكلين] للمنحنيين : -

$y = x^2 - 4x + 3$

$y = 3 + 2x - x^2$ ،

فسوف نلاحظ الاختلافات الهامة التالية : -

فى الدالة : - $y = x^2 - 4x + 3$ عند النقطة c (الثابتة) أو الساكنة : -

(١) يتغير شكل المنحنى من مقعر للأعلى وهابطاً إلى مقعر للأعلى (كذلك) وصاعداً كما فى شكل (٧-٧) ، شكل (٧-٩) كما وأن الزاوية θ تتغير من **زاوية منفرجة إلى زاوية حادة مارة بالصفر .**

(٢) قيم الدالة تتناقص قبل وتتزايد بعد (النقطة الساكنة)

(٣) وبالتبعية فإن : - $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة قبل وموجبة بعد (النقطة الساكنة)

وفى الدالة . $y = 3 + 2x - x^2$ **عند النقطة الساكنة** c : -

(١) يتغير شكل المنحنى من مقعر للأسفل وصاعداً إلى مقعر للأسفل (كذلك) وهابطاً

إلا أن زاوية θ تتغير من زاوية حادة قبل النقطة الساكنة إلى زاوية منفرجة بعد النقطة كما فى شكلى (٧-٨) ، (٧-١٠)

(٢) قيم الدالة تتزايد قبل وتتناقص بعد .

(٣) وبالتبعية فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة قبل وسالبة بعد .

وبذلك فإنه عند كل من النقطتين : -

(١) تتناقص الدالة قبل وتتزايد بعد أو العكس بالعكس

(٢) $\frac{dy}{dx} = 0$ وتُغير إشارتها

ويُطلق على مثل هذه النقط على منحنىبنقط التحول أو الانعطاف

وسوف نرى فيما يلى بأن كل النقط الساكنة ليست نقط تحول أو انعطاف إلا أنه عند كل من النقط الساكنة ونقط الانعطاف فإن : -

$\frac{dy}{dx}=0$ دائماً ، وهى تُعبر عن سلوك الدالة قبل وبعد هذه النقطة

مثال (١) : - حدد قيم x التى يوجد عندها نقط تحول على المنحنى : -

$$y=2x^2-6x+9$$

الحـــــل :-

$$y^{`}=4x-6$$

وعند نقطة التحول فإن $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore 4x-6=0 \qquad \therefore x=1.5$

ولقيم x الأقل من 1.5 سنجد أن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة ((وذلك بوضع قيم لـ x أقل من 1.5 فى المعادلة $4x-6=0$))

وبالتالى فإن الدالة متناقصة

وعند قيم x الأكبر من 1.5 $(x>1.5)$ سنجد أن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة وبالتالى فإن الدالة متزايدة .

وحيث أن الدالة تتناقص قبل النقطة الساكنة وتتزايد بعدها

$\therefore$ هنالك نقطة تحول عند $x=1.5$

مثال (٢) : - حدد نقط التحول (الانعطاف) للدالة : -

$$y=1-2x-x^2$$

الحـــــل :-

$$\because y=1-2x-x^2$$

$$\therefore y^{`}=-2-2x$$

وللقيم الثابتة أو عند النقط الساكنة تكون $y^{`}=0$

$$\therefore -2-2x=0$$

$$\therefore x=-1$$

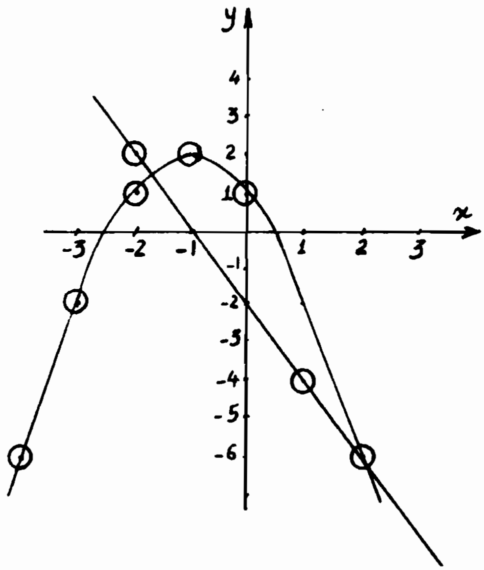
أى أنه توجد نقطة ساكنة عند $x=-1$.

فإذا كانت $x < -1$ فإننا نجد $\frac{dy}{dx} = y'$ تكون موجبة وتتناقص قيمة y .

وإذا كانت $x > -1$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة وتتناقص قيمة y

$\therefore$ y **تتزايد قبل وتتناقص بعد النقطة الساكنة**

$\therefore$ فالنقطة الساكنة هى نقطة تحول (نهاية عظمى أو صغرى) كذلك عندما $x = -1$ ،
أنظر شكل (٧ - ١٣) .



شكل (٧ - ١٣)

٧ - ٨ : - القيم العظمى والصغرى Maximum and minimum values

هنالك فرق غاية فى الأهمية بين نقط التحول للدالتين السابق شرحهما ألا وهما :-

$y = x^2 - 4x + 3$

$y = 3 + 2x - x^2$ ،

وهذه الفروق كالتالى : -

(١) فى الدالة : $y = x^2 - 4x + 3$ المبينة فى شكل (٧-١١)

نجد أن نقطة التحول c هى أسفل نقطة فى المنحنى أى أن عندها تكون أقل قيمة لـ y

فإذا أخذنا مجموعة من النقط قرب c فى أيٍ من الاتجاهين يميناً أو يساراً ، فسـوف نجـد أن قيم الدالة عند هذه النقط أكبر من قيمتها عند c

ويُطلق على مثل هذه النقطة بنقطة نهاية صغرى Minimum Point

ويقال أن للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة .

وقد اتضح مما سبق أن قيم الدالـة تتنـاقص قبـل الوصـول لنقطـة التحـول هـذه (النهايـة الصغرى) وتتزايد بعدها .

(٢) فى الدالة : $y=3+2x-x^2$ المبينة فى شكل (٧-١٢)

نجد أن نقطة التحول c هى أعلى نقطة فى المنحنى أى أن عندها تكون أكبر قيمة لـ y

فإذا أخذنا مجموعة من النقط قرب c فى أيٍ من الاتجـاهين (يمينـاً أو يسـاراً) فسـوف نجد أن قيم الدالة عند هذه النقط أقل من قيمتها عند c

ويُطلق على مثل هذه النقطة ، بنقطة نهاية عظمى Maximum Point

ويقال أن للدالة قيمة عظمى عند هذه النقطة .

وقد وضح مما سـبق أن قيـم الدالـة تـتزايد قبـل الوصـول لنقطـة التحـول هـذه (النهايـة العظمى) وتتناقص بعدها .

وباختصار [**الدالة $f(x)$ يكون لها نهاية عظمى (أو صغـرى) عنـد النقطـة $x=a$ إذا كانت قيمة $f(a)$ أكبر من (أو أصغر) من جميع القيم المجاورة**]

ملاحظة : – يمكن ألا تكون النهاية العظمى للدالة هى أكـبر قيمهـا وكذلـك ألا تكـون النهاية الصغرى للدالة هى أقل قيمها

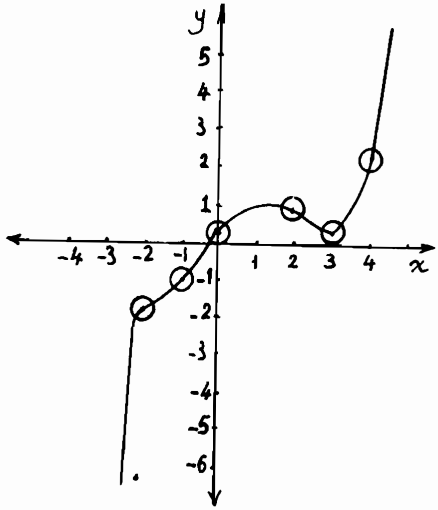
ويظهر ذلك من الدالة : –

$$3y=x^3-3x^2+1$$

أو

$$y=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}$$

أنظر شكل (٧-١٤) .



شكل (٧ – ١٤)

فهذه الدالة لها نهاية عظمى $x=0$ [النقطة $A\left(0,\frac{1}{3}\right)$ ، أعلى فى المستوى من جميع النقط المجاورة لها] .

كما وأن لها نهاية صغرى عند $x=2$ [النقطة $B(2,-1)$ ، أدنى فى المستوى من جميع النقط المجاورة لها] .

وعلى ذلك فإن الدالة فى الفترة المحدودة $x[0,3]$ لها نهاية واحدة عظمى ونهاية واحدة صغرى .

إلا أننا لو نظرنا للدالة فى الفترة $x[-1,4]$ ، سنرى أن النهاية العظمى عند $x=0$ ، $y=f(0)=\frac{1}{3}$ ، ليست هى أكبر قيمة للدالة فى الفترة $(-1,4)$ لأنه عندما تكون $x>3$ فإن : –

$$f(x)>\frac{1}{3}$$

حيث أنه إلى يمين النقطة c يقع المنحنى فوق نقطة A

مثال : ادرس الدالة $y=(x-1)(x-2)(x-3)$

الحـــــــل :-

هذه الدالة تساوى الصفر عندما :

$$(x-1)=0 \ , \ (x-2)=0 \ , \ (x-3)=0$$

أى عندما $x=1\ ,\ 2\ ,\ 3$

وبالتالى فإن المنحنى يقطع محور السينات عند هذه القيم لـ(x)فإذا كانت الدالة متصلة ، أى أن التغيرات الصغيرة فى x ينشأ عنها تغيرات صغيرة مناظرة فى y فإنه :-

[لابد وأن يكون بين أى نقطتين متتاليتين من نقــط تقـاطع المنحنـى مـع محـور OX ، نقطة تحول سواء عظمى أو صغرى]

وعلى هذا فللدالة السابقة يوجد ثلاثة نقط لتقـاطع الدالـة مـع محـور OX وبالتـالى فإنـه يكون هنالك نقطتا تحول : -

(١) فيما بين $x=1$ ، $x=2$

(٢) فيما بين $x=2$ ، $x=3$

ويتضح ذلك من التحليل الآتى : -

(١) لو $x<1$ فإن y دائماً سالبة

(٢) لو $2>x>1$ فإن y موجبة

(٣) لو $3>x>2$ فإن y سالبة

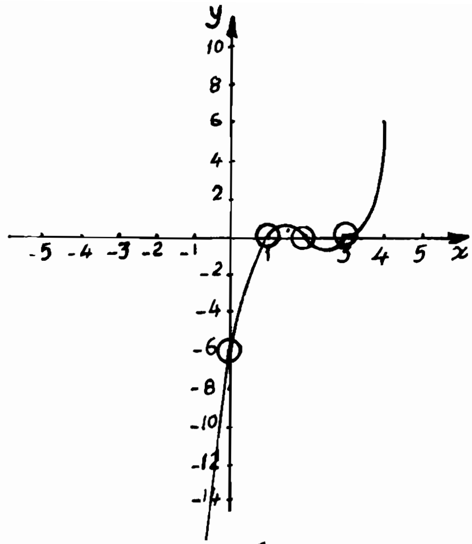
(٤) لو $x>3$ فإن y دائماً موجبة .

والنقطتان (٣) ، (٤) فى التحليل السابق تدعونا إلى إستنتاج ما يلى : -

(١) توجد نهاية عظمى بين $x=1$ ، $x=2$

(٢) توجد نهاية صغرى بين $x=2$ ، $x=3$

ويمكن رسم الدالة بعد عمل جدول مناسب بين قيم x ، y المناظرة لها



شكل (٧-١٥)

ويقتضى رسم هذه الدالة مزيد من الحسابات المطولة لتحديد نقط النهاية العظمى والصغرى

إلا انه باستخدام التفاضل ، يمكن تسهيل العملية إلى حد كبير فالدالة : -

$$y=(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$=x^3-6x^2+11x-6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-12x+11.$$

ومن المعلوم أنه عند نقط التحول فإن $\frac{dy}{dx}=0$ (المماس أفقياً)

$$\therefore 3x^2-12x+11=0$$

ومنها يمكن الحصول على قيمتى (جذرى) x وهما : -

$x_1=1.42$ تقريباً

، $x_2=2.58$ تقريباً

وهى النقط $B^{`}$ , $A^{`}$ على المنحنى

وبالتعويض عن قيم x هذه فى المعادلة الأصلية نحصل على قيم y المناظرة

$$\therefore y_1=0.385 \qquad at \qquad x_1=1.42$$

$at\ (A^{`})$ نهاية عظمى

$x_2 = 2.58 \quad at \quad y_2 = -0.385$ ،

$at\ (B^{`})$ نهاية صغرى

٧-٩ : - طرق التمييز بين النهايات العظمى والصغرى : -

وتوجد ثلاث طرق ، نابعة من الاستنتاجات السابق التعرض لها فى هذا الباب ، إلا إنه بعد معرفة هذه الطرق سنكتفى بطريقتين منها فقط كما سيرد فيما بعد : -

أولاً : - تغيرات الدالة قرب نقط التحول

Changes in the function near the turning points

(١) نقطة النهاية العظمى هى النقطة التى تكون عندها قيمة الدالة أكبر من قيمتها عند قيم x الأكبر قليلاً أو الأقل قليلاً من قيمة x لنقطة التحول

(٢) نقطة النهاية الصغرى تُعرف وبالمثل بأنها النقطة التى تكون عندها قيمة الدالة أصغر من قيمتها عند قيم x الأكبر قليلاً أو الأقل قليلاً من قيمة x لنقطة التحول

وبناءً على هذه التعريفات فإنه يتم التعويض بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليلاً من قيمة x عند نقطة التحول ، فى الدالة الأصلية وبمقارنة هذه النتائج بالحالة (١) نهاية عظمى أو بالحالة (٢) نهاية صغرى ، يمكن تحديد نوع النقطة " نقطة التحول "

ويمكن التعبير عن هذا بصورة عامة كالتالى : -

نفترض أن $f(x)$ دالة فى (x)

، نفترض أن a هى قيمة x عند نقطة التحول والمطلوب معرفة نوعيتها هل هى عظمى أم صغرى

$\therefore$ $f(a)$ هى قيمة الدالة عند نقطة التحول هذه

ونفترض أن $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ هى قيمتى الدالة بالقرب من النقطة (يمينها ويسارها) وعليه فإن : -

النهاية العظمى تكون عندما $f(a)$ أكبر من كل من $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ أى أكبر من قيمها بالقرب من $x = a$

وبالمثل فإن النهاية الصغرى تكون عندما $f(a)$ أصغر من كل من $f(a+h)$ ، $f(a-h)$ أى أصغر من قيمها بالقرب من $x=a$

ثانياً :-التغيرات فى قيمة المشتقة الأولى (المعامل التفاضلى) قبل وبعد نقطة التحول

Changes in the value , sign of the differential Coefficient before and after the turning point

(١) النهاية العظمى : - رأينا فيما سبق أن الدالة تزيد قبلها وتقل بعدها

[$\therefore$ $\frac{dy}{dx}$ **يجب أن تكون موجبة قبلها وسالبة بعدها**]

ولمعرفة هذا نعوض فى المشتقة الأولى بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليلاً عن قيمة x عند هذه النقطة : -

[فإذا كانت المشتقة الأولى تُغير إشارتها من موجب قبلها إلى سالب بعدها مارة بالصفر فإن النقطة تكون نهاية عظمى]

فى حين أن $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة = صفر

(٢) النهاية الصغرى : - وبالمثل نجد هنا أن [$\frac{dy}{dx}$ **تكون سالبة قبلها وموجبة بعدها**]

فإذا ما عوضنا فى المشتقة الأولى بقيم x الأكبر قليلاً والأقل قليلاً من قيمة x عند هذه النقطة : -

[فإذا كانت $\frac{dy}{dx}$ تغير إشارتها من سالب إلى موجب مارة بالصفر فإن النقطة تكون نهاية صغرى]

فى حين أن $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة = صفر

ثالثاً : - إشارة المشتقة الثانية Sign of the second differential coefficient

وحيث أن $\frac{d^2y}{dx^2}$ هى مشتقة المقدار " $\frac{dy}{dx}$ " وبالتالى فهى تُحدد التغيرات فى الدالة $\frac{dy}{dx}$ أى التغيرات فى المشتقة الأولى كالتالى : -

(١) النهاية العظمى : -

أ - الدالة تزيد قبلها وتقل بعدها

ب - $\therefore \frac{dy}{dx}$ تكون موجبة قبلها وسالبة بعدها

جـ - $\therefore \frac{dy}{dx}$ تتناقص عند النهاية العظمى

ء - $\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$ يجب أن تكون سالبة

(٢) النهاية الصغرى : -

أ - الدالة تقل قبلها وتزيد بعدها

ب - $\therefore \frac{dy}{dx}$ تكون سالبة قبلها وموجبة بعدها

جـ - $\therefore \frac{dy}{dx}$ تتزايد عند النهاية الصغرى

ء - $\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$ يجب أن تكون موجبة

٧-١٠ : - الإيضاح البيانى Graphical illustrations

ولإيضاح ما سبق بيانياً فإننا نبدأ فى دراسة الدالة السابق التعرض لها عند إيضاح نقط النهاية العظمى والصغرى وهى : -

$$f(x)=(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$

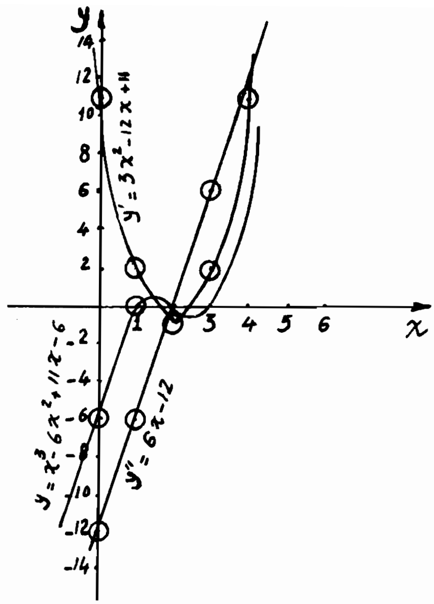
، إرجع لشكل ← (٧ - ١٥)

$$\therefore f(x)=x^3-6x^2+11x-6 \qquad \text{..........} \ (1)$$

$$،f'(x)=3x^2-12x+11 \qquad \text{..........} \ (2)$$

$$،f''(x)=6x-12 \qquad \text{..........} \ (3)$$

وشكل (٧ - ١٦) يوضح هذه المنحنيات الثلاث .



شكل (٧ - ١٦)

وللبحث عن نقط النهاية العظمى والصغرى ، نضع $f`(x)=0$ لأن المشـتقة الأولى لأى دالة عندها = صفر

$\therefore 3x^2-12x+11=0$

$\therefore x_1=1.42 \quad , \quad x_2=2.58$

وتُمثل هذه القيم النقط A , B على المحور السينى ويقابلها النقط $A` , B`$ كنقط تحول على المنحنى وكما سبق فإن قيمة الدالة عند :

$A`=0.385 \quad , \quad B`=-0.385$

وباستخدام طريقة المشتقة الثانية (الطريقة ثالثاً السابقة) فى تحديد ماهية نقـط التحـول وهل هى عظمى أم صغرى ، يمكننا تحديد نوع النهاية تماماً

فإذا عوضنا فى $f``(x)$ بقيمتى x ،

$$\because \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

(١) عندما $x = 1.42$

$$\therefore 6x - 12 = 6 \times 1.42 - 12 = -3.48$$

أى أن $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة

$\therefore$ $A^{`}$ لابد وأن تكون نقطة نهاية عظمى

(٢) عندما $x = 2.58$

$$\therefore 6x - 12 = 6 \times 2.58 - 12 = +3.48$$

$\therefore$ $B^{`}$ لابد وأن تكون نقطة نهاية صغرى .

وبالرجوع إلى المنحنيات الممثله للدوال الثلاث : $f^{``}(x)$ ، $f^{`}(x)$ ، $f(x)$ نجد الآتى

أ – عند نقطة النهاية العظمى $A^{`}$: –

(١) $f^{`}(x) = 0$ وهى شرط ضرورى عند نقطة التحول

(٢) $f(x)$ تزيد قيمتها قبل نقطة $A^{`}$ وتقل بعدها

(٣) $f^{`}(x)$ تكون موجبة قبل $A^{`}$ وسالبة بعدها

(٤) $\therefore$ $f^{`}(x)$ متناقصة

(٥) $\therefore$ $f^{``}(x)$ ، أى $\frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة

ب – عند نقطة النهاية الصغرى $B^{`}$: –

(١) $f^{`}(x) = 0$ وهى شرط ضرورى عند نقطة التحول

(٢) $f(x)$ تقل قيمتها قبل نقطة $B^{`}$ وتزيد بعدها

(٣) $f^{`}(x)$ تكون سالبة قبل $B^{`}$ وموجبة بعدها

(٤) $\therefore$ $f^{`}(x)$ متزايدة

(٥) $\therefore$ $f^{``}(x)$ ، أى $\frac{d^2y}{dx^2}$ موجبة

ويوضح شكل (٧ – ١٦) كل هذه الاستنتاجات

ومن كل ما سبق يتضح أن الطريقة المتبعة فى (أولاً) لتحديد نقط النهاية العظمى والصغرى يمكنها أن تدلنا بالرغم من أنها مطولة كما أن الطريقة (ثانياً) مجهدة كذلك أما الطريقة المتبعة فى (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية فهى الأسهل

٧ - ١١ : - أمثلة محلولة : -

(١) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = 2x^2 - 6x + 3$$

الحـــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6$$

وعند نقط التحول أو نقط النهاية العظمى والصغرى فإن : - $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore 4x - 6 = 0 \qquad \therefore x = 1.5$

∴ توجد نقطة تحول (نهاية عظمى أو نهاية صغرى) على المنحنى عندما $x = 1.5$

ولتحديد ما إذا كانت نهاية عظمى أو صغرى : -

، حيث أن $\frac{dy}{dx} = 0$ أى $4x - 6 = 0$: -

(١) إذا كانت $x < 1.5$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة

(٢) إذا كانت $x > 1.5$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة

∴ $\frac{dy}{dx}$ تزيد بزيادة x

وبإستخدام الطريقة الثالثة فإن y يكون لها قيمة صغرى عندما $x = 1.5$

(٢) ادرس نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة :-

$$y = 6 - x - x^2$$

ثم حدد كل منها

الحـــــل :-

$$\because \quad y = 6 - x - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -1 - 2x$$

وعند نقط النهاية العظمى والصغرى فإن : $\frac{dy}{dx}$ تساوى الصفر

$\therefore\ -1-2x=0 \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{2}$

a) فإذا كانت $x<-\frac{1}{2}$ فإن $(-1-2x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ تكون موجبة

b) وإذا كانت $x>-\frac{1}{2}$ فإن $(-1-2x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ تكون سالبة

أى أن $\frac{dy}{dx}$ تتناقص بتزايد x

وباستخدام الطريقة (ثانياً) وهى طريقة $y^{`}$ فإن y تكون لها قيمة عظمى عندما $x=-\frac{1}{2}$

c) $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$ وهى سالبة دائماً

وبواسطة الطريقة (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية $y^{``}$ ، تكون النقطة عبارة عن نهاية عظمى .

(٣) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى على المنحنى :-

$y=x^3-6x^2+9x-3$

ثم حدد كل منها وقيم الدالة حينئذ ؟

الحـــــل :-

$\because\ y=x^3-6x^2+9x-3$

$\therefore y^{`}=3x^2-12x+9$

$y^{``}=6x-12$

ثم نضع $y^{`}=0$ ونحل المعادلة فى x :-

$\therefore 3x^2-12x+9=0$

$\therefore\ x^2-4x+3=0$

$\therefore (x-1)\ (x-3)=0$

$\therefore\ x_1=1 \qquad , \qquad x_2=3$

أى أنه توجد نقطتا نقطتا تحول أو نقطتا نهاية عندما : $x=3$ ، $x=1$ وسوف نستخدم الطريقة المتبعة فى (ثالثاً) وهى طريقة المشتقة الثانية فى تحديد نوعية هذه النهاية ، عظمى أم صغرى .

$\because y'' = 6x-12$ ،

$\therefore$ عندما $x=1$ فإن :-

$y'' = 6\times1-12=-6=(-)ve$

وعندها تكون نقطة نهاية عظمى لأنها سالبة $ve(-)$

، عندما $x=3$ فإن :-

$y'' = 6\times3-12=6=(+)ve$

وعندها تكون نقطة نهاية صغرى لأنها موجبة $ve(+)$

$\therefore$ فلهذه الدالة أو لهذا المنحنى ، نهاية عظمى عند $x=1$ ، ونهاية صغرى عند $x=3$ وقيم الدالة حينئذ كالتالى :

$y=f(x)=f(1)=1-6+9-3=+1$

، $f(3)=27-54+27-3=-3$

(٤) قذف جسم رأسياً إلى أعلى بسرعة إبتدائية قدرها $8m/\sec$ فإذا كانت المسافة s التى قطعها الجسم بعد t ثانية تُعطى بالعلاقة : $s=8t-4.9t^2$

فأوجد أقصى ارتفاع يمكن للجسم أن يصل له والزمن اللازم لذلك .

الحـــــل :-

$\because \quad s=8t-4.9t^2$

$\therefore \dfrac{ds}{dt}=8-9.8t$

وعند أقصى مسافة فإن $\dfrac{ds}{dt}$ تساوى الصفر

[عند أقصى مسافة يتوقف الجسم عن الصعود ويسكن لحظياً أى تُصبح سرعته صفراً ، أى $\dfrac{ds}{dt}=0$ ثم يبدأفى الهبوط]

$\therefore\ 8-9.8t=0 \qquad \therefore\ t=\dfrac{8}{9.8}=0.816\,\text{sec.}$

$\dfrac{d^2s}{dt^2}=-9.8$ ،

وواضح أنها سالبة دائماً

∴ فمقدار المسافة s يكون نهاية عظمى بعد زمن مقداره $0.816\,\text{sec.}$

وبالتعويض فى المعادلة :-

$$\therefore S=8\times 0.816-4.9\times 0.666$$
$$=6.528-3.263 \quad \cong 3.265\ meter$$

(٥) إذا كانت تكلفة التصنيع بالجنيه لكابل كهربائى طولـه كيلـو متر واحـد تُعطى بالعلاقة : $c=\dfrac{140}{x}+500\,x$

حيث :

x **مساحة مقطع الكابل بالسنتيمتر المربع ، c التكلفة بالجنيه**

فأوجد :

مساحة المقطع التى تكون عندها التكلفة أقل ما يمكن

وما هى أقل تكلفة للكيلو متر الطولى الواحد .

الحـــــل :-

$$\because\quad c=\frac{140}{x}+500\,x$$
$$\therefore \frac{dc}{dx}=-\frac{140}{x^2}+500$$

وعندما تكون c أقل ما يمكن (أو أكبر ما يمكن) فإن :-

$$\frac{dc}{dx}=0$$
$$\therefore -\frac{140}{x^2}+500=0$$
$$\therefore\quad x^2=\frac{140}{500}=\frac{28}{100}$$

$$\therefore x=\sqrt{0.28}=\pm 0.529\quad cm^2$$ تقريباً

وفى موضوعنا هذا فإن الجذر السالب (0.529−) عديم المعنى ولمعرفة ما إذا كانت قيمة x المساوية لـ 0.529+ ، تعطـــى أكـــبر أو أقل قيـــم ، تســتخدم الطريقـة (الثالثـة) أى طريقة $y``$

$$c`` = \frac{d^2c}{dx^2} = \frac{280}{x^3} ،$$

فإذا عوضنا بقيمة $x = 0.529$ فإن $\frac{d^2c}{dx^2}$ تكون موجبة .

$\therefore$ فالتكلفة تكون أقل ما يمكن (نهاية صغرى) عندما :

$$x = 0.529 \quad cm^2$$

وبالتعويض بقيمة x فى المعادلة

$$\therefore c = \frac{140}{(0.529)} + 500 \times 0.529$$
$$= 264.65 + 264.50 = 529.15 \quad L.E$$

(٦) إذا كانت $6y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 900$

تمثل الدالة $y = f(x)$ فى المتغير x ، فحدد نقط النهايات العظمـى والصغـرى لهـذه الدالة باستخدام المشتقة الأولى فقط .

الحـــــل :-

$$\because \quad y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 150$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6$$

وعند نقط النهاية بنوعيها تكون $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore x^2 - x - 6 = 0$$
$$\therefore (x+2)(x-3) = 0$$
$$\therefore x_1 = -2 \qquad , \qquad x_2 = 3$$

$\therefore$ توجد نقطتا نهاية عظمى وصغرى عند $x = -2 \quad , \quad x = 3$

أولاً عند :- $[x = -2]$:-

نعتبر نقطتين على يمين ويسار $x = -2$ وقريباً منها وهما $x = -2.1$, $x = -1.9$

وعندما $x = -2.1$:

$$\therefore y` = (-2.1)^2 - (-2.1) - 6$$
$$= 4.41 + 2.1 - 6 = +0.51(+)ve$$

وعندما $x = -1.9$:

$$\therefore y` = (-1.9)^2 - (-1.9) - 6$$
$$= 3.61 + 1.9 - 6 = -0.49(-)ve$$

$\therefore$ $y`$ فى الحالتين تغير إشارتها من $(+ve)$ إلى $(-ve)$

$\therefore$ عند $x = -2$ توجد نهاية عظمى .

ثانيـاً : عند $[x = 3]$:-

نعتبر نقطتين على يمين ويسار $x = 3$ وهما : $x = 2.9$, $x = 3.1$

فعندما $x = 2.9$:-

$$\therefore y` = (2.9)^2 - (2.9) - 6$$
$$= 8.41 - 8.9 = -0.49 \ (-ve)$$

وعند $x = 3.1$:-

$$y` = (3.1)^2 - (3.1) - 6$$
$$= 9.61 - 9.1 = 0.51 \ (+ve)$$

اى أن $y`$ تُغير إشارتها من $(-)$ إلى $(+)$

$\therefore$ عند $x = 3$ توجد نهاية صغرى .

(٧) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}$$

الحـــــل :-

حيث أنه لم يذكر الطريقة الواجب اتباعها لتحديد نقط النهايات لذلك فسنستخدم طريقة المشتقة الثانية لأنها الأسهل والأسرع فى تحديد المطلوب .

$$\because\ y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}$$

$$\therefore y' = x^2-5x$$

$$، y'' = 2x-5$$

والشرط اللازم توفره (ولكنه ليس بالشرط الأكيد) عند نقط النهايات هو $y' = 0$

$$\therefore\ y' = x^2-5x=0$$

$$\therefore\ x\ (x-5)=0 \qquad \therefore\ x_1=0\ \ ,\ \ x_2=5$$

أما الشرط الكافى لتحديد نوع النهاية فهو إيجاد قيمة y'' ومعرفة إشارتها

١) عندما $x=0$:

(سالبة) $y'' = 2x-5=2\times 0-5=-5$

$\therefore$ عندما $x=0$ توجد نهاية عظمى

٢) عندما $x=5$

(موجبة) $\therefore\ y'' = 2x-5=2\times 5-5=5$

$\therefore$ عندما $x=5$ توجد نهاية صغرى

(٨) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة :

$$y=\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3$$

الحـــــل :-

$$y' = 3x^3-3x$$

$$، y'' = 9x^2-3$$

والشرط اللازم هو :- $y' = 0$

$$\therefore\ 3\left(x^3-x\right)=0 \qquad \therefore \qquad 3x\left(x^2-1\right)=0$$

$$\therefore 3x(x-1)(x+1)=0$$

$\therefore$ نقط التحول أو نقط النهايات العظمى والصغرى تكون عندما :-

$$x_1=0\ \ ,\ \ x_2=1\ \ ,\ \ x_3=-1$$

والشرط الكافى هو إيجاد قيمة y'' ومعرفة إشارتها :

$$y'' == 9x^2-3$$

عندما $x=0$:

سالبة $y'' = 9\times 0 - 3 = -3$

$\therefore$ عندما $x=0$ توجد نقطة نهاية عظمى .

وعند $x=+1$:

موجبة $y'' = 9\times(1)^2 - 3 = 6$

$\therefore$ عندما $x=+1$: تكون نهاية صغرى

وعندما $x=-1$:

موجبة $y'' = 9\times(-1)^2 - 3 = 6$

$\therefore$ عندما $x=-1$: تكون نهاية صغرى كذلك

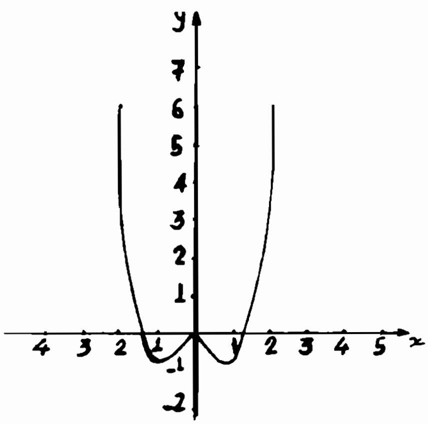
أى أنه لهذه الدالة توجد نهاية واحدة عظمى عند $x=0$ ونهايتان صغريتان عندما :

$$x=-1 \quad , \quad x=+1$$

وحيث أننا قد عرفنا نقط النهايات لهذه الدالة فإنه يمكننا الآن رسمها بعمل جدول بين قيم x (فرضاً) وقيم y المناظرة لها على أن يكون ضمن هذه القيم :-

$x=0, x=-1, x=+1$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$47\frac{1}{4}$	6	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{21}{64}$	0	$-\frac{21}{64}$	$-\frac{3}{4}$	6	$47\frac{1}{4}$



شكل (٧-١٧)

ومن هذا المثال يتضح أنه يجوز أن يكون للدالة أكثر من نقطة نهاية صغرى أو كبرى إلا أن المشكلة تظهر إذا أردنا معرفة أيا من هذه النقط ، يمثل النهاية الصغرى الحقيقية (المُطلقة) أو النهاية الكبرى الحقيقية باعتبار جميع قيم x وليس فى خلال فترة محددة.

ونود أن نذكر هنا بأنه يوجد نوعان من النهايات العظمى والصغرى :-

١- نهايات عظمى وصغرى مطلقة Global

٢- نهايات عظمى وصغرى محلية محدودة Local

والنهايات المحدودة يقصد بها النهايات عند نقطة قريبة جداً يميناً أو يساراً من نقطة معينة أو فى خلال فترة محدودة .

أما النهايات المطلقة فهى فى غاية الأهمية وتظهر هذه الأهمية إذا كان لدينا أكثر من نقطة نهاية صغرى أو عظمى محلية ويراد معرفة النهاية الصغرى أو العظمى المطلقة ، والتى بناء عليها يتم تحديد إجراء معين مطلوب .

ففى الحياة تُترجم المشاكل إلى مسائل رياضية ، ويتطلب الأمر أحياناً الحصول على أكبر مساحة أو أصغر حجم أو أقصى تكلفة أو أطول مدى أو أقل ارتفاع ، ... وهكذا .

ولتحديد النهاية المطلقة نتبع التالى :-

إذا كانت $y = f(x)$ ، نوجد y' ثم نوجد قيم x التى تجعل $y' = 0$ ولتكن هذه النقط $(x_1 , x_2 , x_3 , ...)$.

ثم نوجد قيمة الدالة عند كل منها ، ثم نوجد قيمة y عند أقل وأكبر قيمة لـ x عند طرفى الفترة أو المدى

، نعين النقط التى تكون عندها $f'(x)$ غير معرفة ، وتقع خارج المدى .

ونحسب قيم الدالة عند النقط الحرجة وعند طرفى الفترة وأكبر قيمة فى مجموعة القيم السابقة تعتبر بمثابة القيمة العظمى المطلقة بينما أصغر قيمة تكون القيمة الصغرى المطلقة.

(٩) اوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة :-

$$y = x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

الحـــــل :-

$$\because \quad y = x - \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore y' = 1 - x$$

وعند نقاط النهاية العظمى والصغرى فإن $y' = 0$:

$$\therefore 1 - x = 0 \qquad \therefore x = 1$$

فعندما $x < 1$ فإن $y' = +ve$

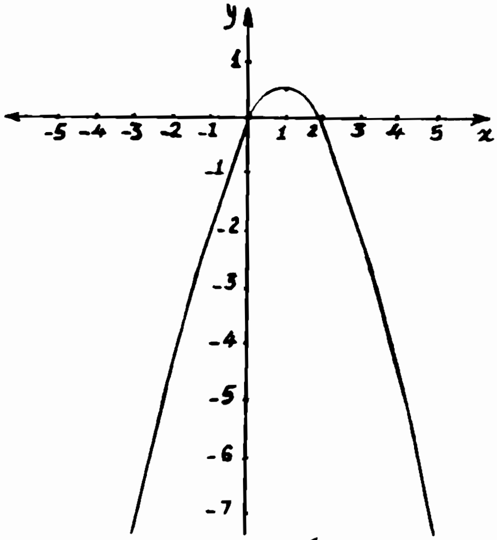
وعندما $x > 1$ فإن $y' = -ve$

أى أن المشتقة الأولى تُغير إشارتها من موجب إلى سـالب وهـو شـرط لازم عنـد نقـط النهاية العظمى والصغرى إلا أنه غير كافٍ لوجود أياً من النهايتين والشرط الكـافى هـو $y'' = 0$ ، حيث أن $y' = 1 - x$

$$\therefore y'' = -1$$

وهى سالبة وعليه فإنه توجد عند $x = 1$ ، نهاية عظمى

أنظر شكل (٧-١٨)



شكل (٧-١٨)

(١٠) أوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة :

$$y = (x-1)^2\,(x+1)^3$$

الحـــــــل :-

$$y` = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2$$
$$= (x-1)(x+1)^2(5x-1)$$

وعند النهايات العظمى والصغرى فإن $y` = 0$

$$\therefore (x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0$$

ومنها :-

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -1 \ , \ x_3 = \frac{1}{5}$$

إلا أنه يلزم ترتيب قيم x تصاعدياً

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = \frac{1}{5} \ , \ x_3 = 1$$

وكذلك $f`(x)$:-

$$f`(x) = 5(x+1)^2\left(x-\frac{1}{5}\right)(x-1)$$

فعندما $x_1 < -1$:-

$$f`(x) = 5(-)^2(-)(-) = +ve \qquad \text{..........} \ (1)$$

وفى الفترة فيما بين $x = \frac{1}{5}$, $x = -1$:-

$$f`(x) = 5(+)^2(-)(-) = +ve \qquad \text{..........} \ (2)$$

وبمقارنة (1) ، (2) نجد عدم وجود تغيير فى إشـارة المشـتقة الأولى وتظـل موجبـة عنـد عبور النقطة $x = -1$

وعليه فإنه للدالة المذكورة لا توجد نهاية عظمـى ولا صغـرى عنـد $x = -1$ بـل تـتزايد الدالة

وعندما $x_2 < \frac{1}{5}$:-

كما فى (2) $\qquad y` \ or \ f`(x) = +ve$

وعندما $x_2 > \frac{1}{5}$:-

$$y` = f`(x) = 5(+)^2(+)(-) = -ve \qquad \text{..........} \ (3)$$

ولما كانت $y^{`}$ تغير إشارتها من موجب $(+ve)$ إلى سالب $(-ve)$ عند عبور المتغير x للنقطة $x_2 = \frac{1}{5}$ ؛ فإن الدالة تتحول من التزايد للتناقص ،

أى أنه عند $x = \frac{1}{5}$ توجد نهاية عظمى وقيمتها :-

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5} - 1\right)^2 \left(\frac{1}{5} + 1\right)^3 \approx 1.1$$ تقريباً

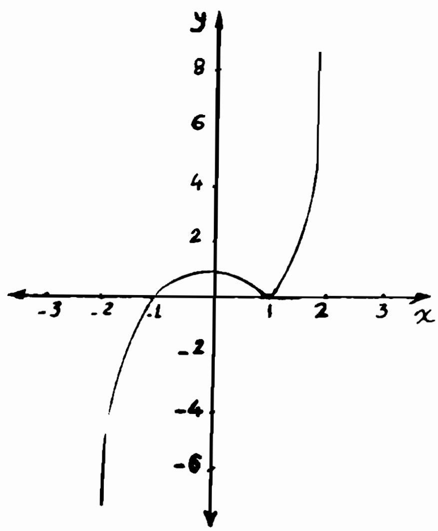
وعندما $x_3 < 1$:- $\therefore y^{`} = 5(+)^2(+)(-) = -ve$

وعندما $x^3 > 1$:- $\therefore y^{`} = 5(+)^2(+)(+) = +ve$

أى أن المشتقة تُغير إشارتها من سالب $(-ve)$ إلى موجب $(+ve)$ عند عبور النقطة $x = 1$ وعليه فإن الدالة تنتقل من التناقص للتزايد

$\therefore$ عندما $x = 1$ ، هنالك نهاية صغرى مقدارها $y = (1-1)^2(1+1)^3 = 0$.

أنظر الرسم شكل (٧-١٩) .



شكل (٧-١٩)

(١١) أوجد جميع النهايات الصغرى والعظمى للدالة : -

$$y = (x-1).x^{\frac{2}{3}}$$

الحـــــــل :-

$$y' = x^{\frac{2}{3}} + \frac{(2x-1)}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{5}{3}\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x^{\frac{1}{3}}}$$

ويلاحظ أن الدالة عند $x = 0$ غير قابلة للتفاضل $(y' = \infty)$

وعليه فإنه يكون لدينا نقطتان عندما $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{5}$

$x < 0$: −

$$y' = \frac{5}{3}\frac{(-)}{(-)} = +ve$$

، $\frac{2}{5} > x > 0$: −

$$y' = \frac{5}{3}\frac{(-)}{(+)} = -ve$$

، $x > \frac{2}{5}$:

$$y' = \frac{5}{3}\frac{(+)}{(+)} = +ve$$

وعليه ، حيث أن y' تغير إشارتها حول الصفر من موجب $+ve$ لسالب $-ve$ ، يكون للدالة نهاية عُظمى عند $x = 0$ وقيمتها :

$$y = f(0) = 0$$

وعندما $x < \frac{2}{5}$ فإن y' سالبة كما سبق

وعندما $x > \frac{2}{5}$ فإن y' موجبة كما سبق

وعليه فإن y' تُغير إشارتها حول الصفر من سالب إلى موجب

∴ فيكون لها نهاية صغرى عند $x = \frac{2}{5}$ وقيمتها $y = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{-3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}} \cong -0.33$

(١٢) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة : −

$$y=\frac{x^4}{2}-x^2+3$$

الحـــــل :-

$$y^{`}=2x^3-2x$$

ثم نضع $y^{`}=0$ للحصول على نقط النهايات العظمى والصغرى : -

$$\therefore 2x^3-2x \quad =0$$

$$\therefore x(x^2-1) \quad =0$$

$$\therefore x(x-1)(x+1)=0$$

$$x_1=0, x_2=1, x_3=-1 \therefore$$

هى النقط التى عندها نهايات عظمى أو صغرى

$$،y^{``} \quad =6x^2-2$$

وبالتعويض بقيم x السابقة فى $y^{``}$ لمعرفة إشارتها : -

$$\therefore f^{``}(-1)=4>0 \quad i.e.(+ve)$$

$$، \; f^{``}(0) \quad =-2>0 \; i.e.(-ve)$$

$$، \; f^{``}(1) \quad =4>0 \quad i.e.(+ve)$$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى واحدة عند $x=0$ ($y^{``}$ سالبة)

ونهايتان صغريتان عند $x=1,-1$ ($y^{``}$ موجبة) .

٧ - ١٢ : نقط الإنقلاب Points of inflexion

كما علمنا فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون إشارتها سالبة عند نقط النهاية العظمى وموجبة عند نقط النهاية الصغرى ؛

والآن دعنا نعرف كيف يكون الأمر عندما تكون $\frac{d^2y}{dx^2}$ مساوية للصفر بالرغم من عدم وجود نهاية صغرى أو عظمى .

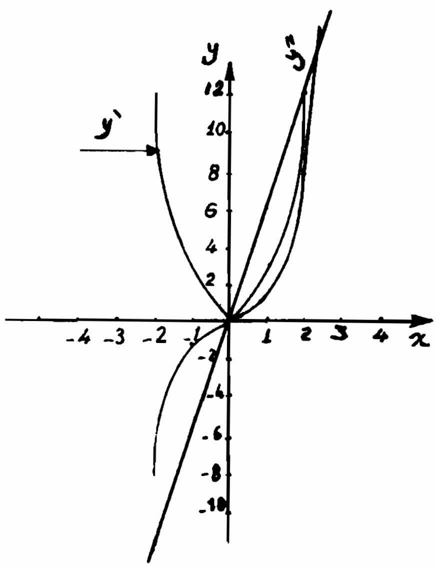
لنعتبر الدالة :

$$y = x^3$$

$$\therefore y' = 3x^2$$

$$، \ y'' = 6x$$

ويوضح الشكل (٧-٢٠) هذا المنحنى والمنحنيات والمستقيمات المناظرة لدوال المشتقة الأولى والثانية .



شكل (٧ - ٢٠)

ويلاحظ أن المنحنى $y = x^3$ يمر بنقطة الأصل والتى عندها يُغير المنحنى تقوسه (شكله) من مقعر للأسفل صاعداً إلى مقعر للأعلى وصاعداً كذلك .

أى أنه يكون صاعداً فى كلتا الحالتين أى أن الدالـة ذات قيمة متزايدة فيما عدا عند نقطة الأصل حيث يبدو منحنى الدالة ساكناً لحظياً أى انه عند هذه النقطة توجد قيمة ثابتة ، والميل يساوى الصفر ويكون محور السينات هو المماس للمنحنى .

وهى بذلك لا ينطبق عليها كل مواصفات نقطة التحول (أى زيادة قبل نقطة التحول ونقص بعدها أو العكس بالعكس) .

ويظهر المنحنى الممثل للمشتقة الأولى $y' = 3x^2$ فى صورة قطع مكافئ (متقطع) وهذا المنحنى (موجب) دائماً إلا أن قيمته تساوى الصفر عند نقطة الأصل .

وهذا يبين أن الميل للمنحنى $y = x^3$ ، يساوى الصفر عند هذه النقطة والتى هى أسفل نقطة فى المنحنى . $y = 3x^2$.

ويُطلق على مثل هذه النقط على المنحنى بنقط الإنقلاب .

ويعنى الإسم : إنحناء فى سير المنحنى ، حيث يتغير تقوس المنحنى عندها من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى أو بالعكس كما فى حالة المنحنى $\left(y = -x^3\right)$.

إلا أنه ليست بالضرورة أن تكون $\frac{dy}{dx}$ مساوية للصفر عند هذه النقطة أى أنه ليس بالضرورة أن يكون المماس موازياً للمحور OX إلا أن الميل بالنسبة لنقطة الإنقلاب يكون أقل ما يمكن . وفى مثالنا هذا فإن القيمة الصغرى لهذا الميل = صفر .

ومصداقاً لأن المماس للدالة عند نقطة الإنقلاب لا يوازى محـــــور OX دائما ، سوف نعتبر نقطة C على المنحنى المبين فى الشكل (٧ - ١٥) وهو المنحنى الممثل للدالة : $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ وبالرجوع لهذا المنحنى نجد أن : -

(١) عند النقطة C ، يتغير تقوس المنحنى من مقعر للأسفل إلى مقعر للأعلى

(٢) عندما يكون المنحنى مقعر للأسفل فإن $\frac{dy}{dx}$ تتناقص : -

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$ سالبة

وعندما يكون المنحنى مقعراً للأعلى فإن $\frac{dy}{dx}$ تتزايد

موجبة $\therefore \frac{d^2y}{dx^2}$

(٣) عند نقطة الإنقلاب $y^{\cdot\cdot} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

(٤) وبالتبعية فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تغير إشارتها عند نقطة الانقلاب

(٥) عند نقطة الانقلاب "C" فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون أقل ما يمكن لقيم x المناظرة

(٦) وقيمة $\frac{dy}{dx}$ ، هذه ومن على الرسم : $\frac{dy}{dx} = -1$

تعطى ميل المنحنى عند نقطة الانقلاب أى أنها تمثل ميل المماس للمنحنى الأصلى للدالـة عند نقطة C

فإذا كانت θ = زاوية ميل المماس :

$$\therefore \tan\theta = -1 \qquad \therefore \hat{\theta} = 135^\circ$$

وبناءً على ما تقدم فإنه عند نقطة الانقلاب على منحنى : -

(١) يتغير تقوس المنحنى من مقعر للأعلى إلى مقعر للأسفل أو العكس بالعكس

(٢) وبالتالى فإن $\frac{dy}{dx}$ تكون متزايدة قبل ومتناقصة بعد أو العكس بالعكس

(٣) ولهذا فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تكون موجبة قبل وسالبة بعد أو العكس بالعكس

(٤) $\frac{dy}{dx}$ تكون أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

وبذلك فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ تغير إشارتها خلال نقطة الانقلاب .

ويمكن تلخيص طرق تحديد نقط النهايات العظمـى والصغرى والانقـلاب فـى الجـدول (٧-١) التالى : -

	نهاية عظمى	نهاية صغرى	نقطة انقلاب
$y=f(x)$	(١) تزيد قبلها (٢) تقل بعدها	(١) تقل قبلها (٢) تزيد بعدها	تتغير من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل أو العكس بالعكس
$y^{`}=\frac{dy}{dx}$	(١) موجبة قبلها (٢) سالبة بعدها (٣) تساوى الصفر عند النقطة ∴ متناقصة	(١) سالبة قبلها (٢) موجبة بعدها (٣) تساوى الصفر عند النقطة ∴ متزايدة	لها قيمة عظمى أو صغرى
$\frac{d^2y}{dx^2}$	سالبة	موجبة	صفر وتغير إشارتها

٧ - ١٣ خلاصة : -

هنالك عدة نقاط تكون عندها مشتقة المنحنى " الدالة " مساوية للصفر أى أن $\frac{dy}{dx}=0$ ، تعنى أن عند هذه النقط يكون المماس للمنحنى أفقياً

وعندما يكون المماس أفقياً فإن المنحنى يكون آخذاً فى تغيير شكله من صعود إلى هبوط أو من هبوط إلى صعود ، أو سكون لحظى

ورياضياً يمكننا إيجاد هذه النقط بإيجاد المشتقة الأولى للدالة ونساويها بالصفر ومن ثم نوجد قيمة أو قيم x والتى يُطلق عليها حينئذ بالقيم الحرجة critical values ، وهذه النقط الحرجة إما أن تكون نقط نهاية عظمى أو صغرى أو انقلاب .

وبمجرد الحصول على هذه النقط ، يمكن معرفة وتحديد كل منها باستخدام طريقتين فالنهاية العظمى تكون قيمة المشتقة الثانية " التغير فى الميل- changes in slope " ، عندها سالبة .

والنهاية الصغرى تكون قيمة المشتقة الأولى عندها موجبة .

وعند نقطة الإنقلاب يكون كل من $f^{`}, f^{``}$ مساوياً للصفر وعلى ذلك ، فبحساب كل من $f^{`}, f^{``}$ يُمكن أن يُحدد نوع النقطة .

أما إذا لم نرغب فى إيجاد قيمة $f^{``}$ ، لصعوبة ذلك مثلاً ، فإنه بعد إيجاد القيم الحرجة ، نُعوض فى معادلة الدالة الأصلية بقيم أقل منها قليلاً أو أكبر منها قليلاً (من القيم الحرجة) .

وسنلاحظ حينئذ قيمة الدالة عند هذه القيم ونقارنها بقيمتها عند النقطة الحرجة .

وسوف نجد أنه عند النهاية العظمى ، تزيد قيمة y قبلها وتقل بعدها والعكس عند نقط النهاية الصغرى .

٧ – ١٤ : – مسائل محلولة على القيم العظمى والصغرى ونقط الإنقلاب :

(١) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى للدالة : $y = f(x) = x^4$ ثم إرسمها.

الحـــــــل :–

$f^{`}(x) = 4x^3$

وبوضع $f^{`}(x) = 0$ ، للحصول على النقط الحرجة

$\therefore 4x^3 = 0$

$\therefore x \quad = 0$

وهى القيمة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

والآن يلزم أن نحدد ماهية النقطة $x = 0$ ، هل هى عظمى أم صغرى

وفى هذه المسألة فإنه ليس من المفيد إيجاد قيمة $f^{``}$ ، حيث أن : –

$f^{``} = 12x^2$

فعند التعويض بقيمة $x = 0$ فى $f^{``}$ فإن $f^{``}(0) = 0$

وعليه يلزم الإعتماد على طريقة المشتقة الأولى : –

حيث نوجد قيمها قبل وبعد النقطة $x = 0$

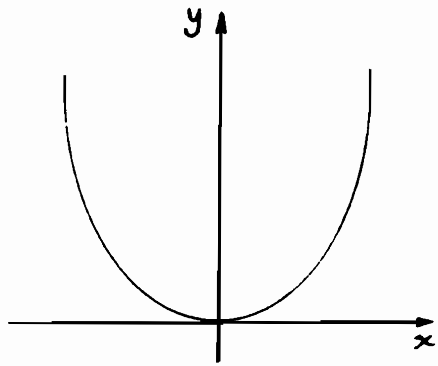
فعندما $x < 0$ فإن $f^{`}(x) = -ve$ (سالبة)

وعندما $x > 0$ فإن $f^{`}(x) = +ve$ (موجبة)

أى أن $y^{`}$ تُغير إشارتها من سالبة إلى موجبة

∴ عندما $x = 0$ ، هنالك نهاية صغرى

∴ عند النقطة (0,0) وهى نقطة الأصل هنالك نهاية صغرى ، انظر الرسم شكل (٧-٢١) .



شكل (٧-٢١)

(٢) أوجد النقط الحرجة للدالة : - $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ ثم إرسمها ؟

الحـــــــل :-

$$f`(x) = 12x^3 - 12x^2$$
$$= 12x^2(x-1)$$

وبوضع $f`(x) = 0$

$$\therefore 12x^2(x-1) = 0$$

∴ إما $x = 0$ وإما $x = 1$ وهى النقط الحرجة لهذه الدالة

وبالنسبة للنقطة $x = 0$ ، إذا ما أوجدنا المشتقة الثانية : -

$$f`` = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$$

فإذا ما عوضنا بقيمة $x = 0$ سنجد أن $f``(0) = 0$ وبالتالى فإن طريقـة المشـتقة الثانيـة هنا لا تفيد فى تحديد قيم النهاية .

وعليه سنعتمد على طريقة $f`(x)$ ونوجد قيمها عند $x < 0$ ، $1 > x > 0$ ، $x > 1$

فعندما $x < 0$ فإن $f`(x) = -ve$

وعندما $1 > x > 0$ فإن $f`(x) = -ve$

وعندما $x > 1$ فإن $f`(x) = +ve$

وحيث أن $f`(x)$ تغير إشارتها من سالب إلى موجب

عند الواحد $(x = 1)$ فإن هذا يعنى أنه عند $x = 1$ توجد نهاية صغرى

وعندما $x = 0$ فإن $f`(x)$ لا تغير إشارتها

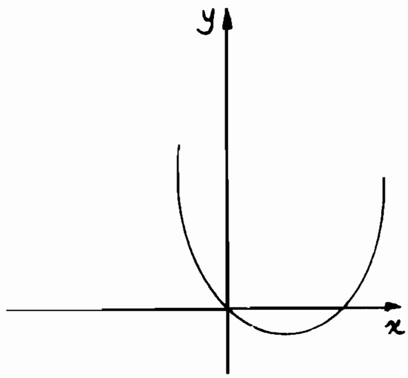
فهى سالبة عندما $x < 0$ وعندما $0 < x < 1$ ؛ كذلك .

وعليه فإنه لا توجد نهاية صغرى ولا عظمى عند $x = 0$

وحيث أن $f`(0) = 0$ فإن الدالة يكون لها مماس أفقى عند $x = 0$ ويُطلق على مثل هذه النقطة بنقطة انقلاب .

كما وأن $f``(0) = 0$ مما يؤكد وجود نقطة انقلاب عندما $x = 0$

انظر الرسم شكل (٧-٢٢) .



شكل (٧-٢٢)

(٣) حدد النهايات العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = 3x^2 - 2x$$

الحـــــل :-

نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر فنحصل على النقط الحرجة ثم نستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد ماهية هذه النهاية ، عظمى أم صغرى : -

$$f`(x) = 6x - 2$$

$$،\quad 6x - 2 = 0 \qquad \therefore x = \frac{1}{3}$$

$$، f``(x) = 6 \qquad i.e. + ve$$

∴ عند $x = \frac{1}{3}$ توجد نقطة حرجة وهى نهاية صغرى $\left[f``(x) = +ve\right]$

وبالتعويض بقيمة $x = \frac{1}{3}$ فى الدالة $f(x)$

$$\therefore f(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$$

∴ نقطة النهاية الصغرى هى النقطة التى إحداثياتها

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

(٤) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة : -

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

الحـــــــل :-

$$f`(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2\left(x^2 - 1\right)$$

$$= 15x^2(x - 1)(x + 1)$$

∴ القيم الحرجة هى :

$$x = 0 \;,\; x = -1 \;,\; x = +1$$

وبترتيبها تصاعدياً :

$$\therefore x = -1 \;,\; x = 0 \;,\; x = +1$$

ولتحديد نوع النهاية عند كل نقطة ، نوجد المشتقة الثانية : -

$$\therefore f''(x) = 60x^3 - 30x$$
$$= 30x(2x^2 - 1)$$
$$\therefore f''(-1) = -30 < 0 \ (-ve)$$

∴ عند $x = -1$ توجد نهاية عظمى

$$، \quad f''(1) = 30 > 0 \ (+ve)$$

∴ عند $x = 1$ توجد نهاية صغرى

$$، \quad f''(0) = 0$$

مما يعنى أنه عند النقطة $x = 0$ توجد نقطة لا هى نهاية عظمى ولا هى نهاية صغرى فهى بالتالى نقطة انقلاب

وللتأكد ، لنرى سوياً ، سلوك الدالة $f(x)$ عند نقطة $x = 0$ باستخدام المشتقة الأولى

فعند $-1 < x < 1$: -

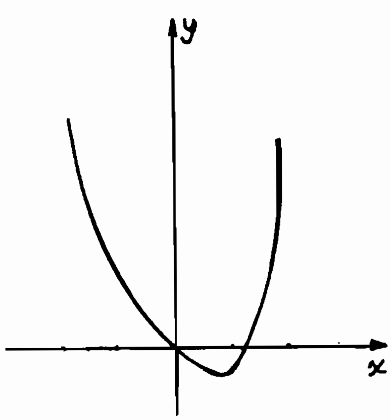
$\therefore f'(x) = -ve$ (سالبة)

وعند $1 > x > 0$ فإن

$\therefore f'(x) = -ve$ (سالبة)

أى أنه لا يوجد تغير فى إشارة y' .

، انظر الرسم شكل (٧ - ٢٣) .



شكل (٧ - ٢٣)

(٥) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$y = 2x^2 - 8x + 5$

الحــــــل :-

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 8$$

وبمساواتها بالصفر نحصل على قيم x الحرجة : -

$\therefore 4x - 8 = 0 \qquad \therefore x = 2$

$\therefore$ عند $x = 2$ توجد نقطة حرجة ، وسوف نستخدم طريقة المشتقة الثانية لتحديد ما إذا كانت $x = 2$ عظمى أم صغرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^{\prime\prime} = 4 \qquad + ve$$ ، موجبة

$\therefore$ فعند $x = 2$ توجد نهاية صغرى .

وبالتعويض بقيمة $x = 2$ فى الدالة y

$\therefore y = 2(2)^2 - 8(2) + 5$

$= 8 - 16 + 5 \qquad = -3$

$\therefore$ النهاية الصغرى تكون عند النقطة $(2\ ,\ -3)$

(٦) : - أوجد النهاية العظمى والصغرى للدالة : -

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$

الحــــــل :-

$f^{\prime}(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x^2 - x - 2)$

$= 6(x + 1)(x - 2)$

وبوضع $f^{\prime}(x) = 0$

$\therefore 6(x + 1)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -1\ ,\ x = 2$

، نوجد $f^{\prime\prime}(x)$ ونوجد قيمتها المناظرة لقيم x الحرجة : -

$$f''(x) = 12x - 6$$
$$= 6(2x - 1)$$
$$\therefore f''(-1) = -18 \qquad at \ \ x = -1$$
$$، \ f''(2) = +18 \qquad at \ \ x = 2$$

وعند $x = -1$: -

$$\therefore f(x) = 20$$

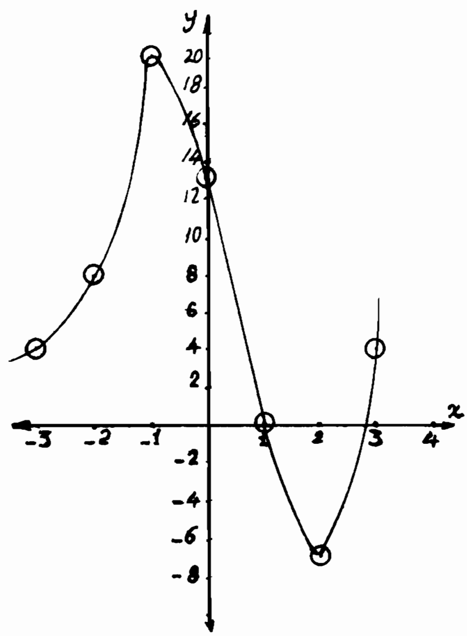
وعند $x = 2$: -

$$\therefore f(x) = -7$$

$\therefore$ $(-1 , 20)$ ، نقطة نهاية عظمى

، $(2 , -7)$ ، نقطة نهاية صغرى

انظر الرسم شكل (٧ - ٢٤) .



شكل (٧ - ٢٤)

(٧) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة التالية ، وارسمها : -

$$y = \frac{4}{x^2 - 4}$$

الحـــــــل :-

$$y' = \frac{(x^2-4)(0)-4(x^2-4)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0$$

$$\therefore \; -8x = 0 \qquad \therefore x = 0$$

وبالتعويض بقيمة x فى الدالة y : -

$$\therefore y = \frac{4}{0-4} = -1$$

$\therefore$ النقطة $(0\ ,-1)$ هى النقطة الحرجة الوحيدة لهذه الدالة .

ولتحديد ماهيه هذه النقطة ، نستخدم طريقة المشتقة الأولى : -

ونوجد قيم $\frac{dy}{dx}$ عند $-1 \le x < 0$ ، $0 < x \le 1$

فعند $x = -1$ ، مثلاً ، نجد أن : -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{9}(+ve)$$

وعند $x = +1$ نجد أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8}{9}(-ve)$$

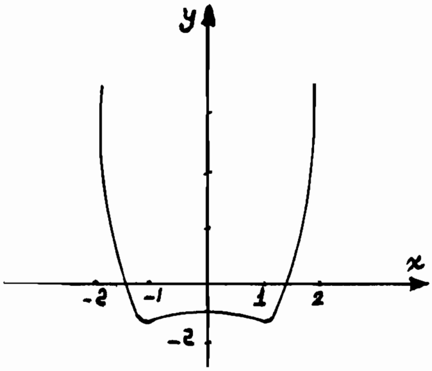
$\therefore$ $\frac{dy}{dx}$ تُغير إشارتها من $(+ve)$ إلى $(-ve)$ عند المرور بنقطة $x = 0$

$\therefore$ عند النقطة $(0\ ,-1)$ ، هُنالك نهاية عظمى

فإذا ما عوضنا بقيمة $x = \pm 2$ فى الدالة الأصلية سنجد أن : -

$$y = \pm\infty$$

انظر الرسم شكل (٧ - ٢٥) .



شكل (٧ – ٢٥)

(٨) **أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : –**

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x+4$$

الحــــــل :–

نوجد $\frac{dy}{dx}$ ونساويها بالصفر ثم نوجد قيم x الحرجة

$$\therefore y^{`}=x^2-5x+6$$
$$=(x-2)(x-3)=0$$
$$\therefore x=2 \quad , \quad x=3$$

والآن نوجد المشتقة الثانية لتحديد ماهيه هذه النقط : –

$$y^{``}=2x-5$$

فعندما $x=2$ توجد نهاية عظمى لأن : –

سالبة . $y^{``} = 2 \times 2 - 5 = -1 \ (-ve)$

وعند $x=3$ نهاية صغرى لأن : –

موجبة . $y^{``} = 2 \times 3 - 5 = +1 \ (+ve)$

وبالتعويض بقيم x الحرجة فى الدالة y

$$\therefore y(2)=\frac{(2)^3}{3}-\frac{5(2)^2}{2}+6(2)+4$$

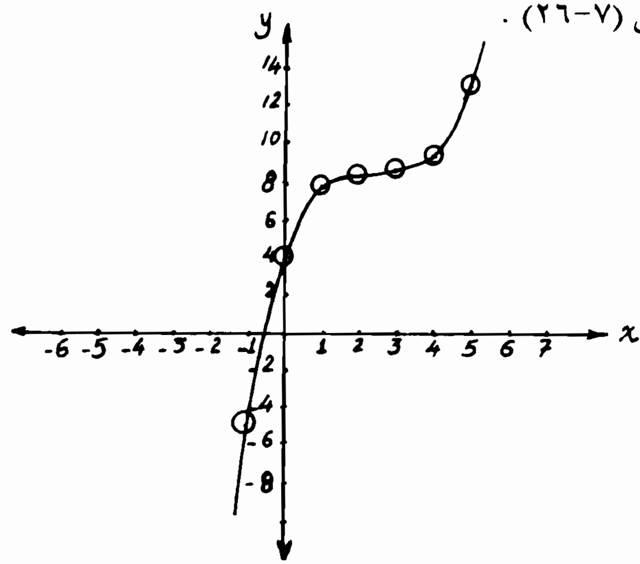
$$= \frac{8}{3} - 10 + 12 + 4 = 8\frac{2}{3}$$

$$، y(3) = \frac{(3)^3}{3} - \frac{5(3)^2}{2} - 6(3) + 4$$

$$= 8\frac{1}{2}$$

$\therefore$ للدالة نهاية عظمى عند $\left(2 , 8\frac{2}{3}\right)$ ونهاية صغرى عند $\left(3 , 8\frac{1}{2}\right)$ ،

انظر شكل (٧-٢٦) .



شكل (٧ - ٢٦)

(٩) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{x} + x$ ، فأوجد القيم العظمى والصغرى وحدد الفترات التى تتزايد فيها $f(x)$ أو تتناقص ثم ارسم المنحنى

الحـــل :-

$$f^{`}(x) = \frac{-1}{x^2} + 1 = \frac{-1 + x^2}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

وبوضع : $f^{`}(x) = 0$

$$\therefore (x-1)(x+1) = 0$$

$\therefore$ $x = 1$ ، $x = -1$ ، هى النقط الحرجة

ولتحديد ماهية هذه النقط ، نعلم أن الدالة تزيد عندما $0 < f`(x)$ وتتناقـــص عندما $f`(x) < 0$ وأن نقط النهاية العظمى أوالصغرى ، تظهر عند النقط التى فيها : - $f`(x)$ تغير إشارتها

ولذلك ، دعنا نرى $f`(x)$ فى الفترات المحددة الموضحة بالجدول التالى :

$f`(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$	
$+ve$	$x < -1$
$-ve$	$0 > x > -1$
$-ve$	$1 > x > 0$
$+ve$	$x > 1$

مما يدعونا إلى استنتاج وجود نهاية عظمى عند $x=-1$ لأن $f`(x)$ تُغير إشارتها من + إلى - عند هذه القيمة (حولها)

كما توجد نهاية صغرى عند $x=1$ لأن $f`(x)$ تُغير إشارتها من - إلى +

وكذلك تتزايد الدالة عند $x<-1$ وعند $x>+1$

وتتناقص عندما $0>x>-1$ وعندما $1>x>0$

ويمكن الحصول على نفس النتائج بإيجاد تفاضل $f`(x)$ أى نوجد $f``(x)$

$f``(x)=\dfrac{2}{x^3}$ ،

فعندما $x=1$: -

$$\therefore f``(x)=\frac{2}{1}=+ve$$

مما يعنى نهاية صغرى

وعندما $x=-1$: -

$$f``(x)=\frac{2}{(-1)^3}=-ve$$

مما يعنى نهاية عظمى

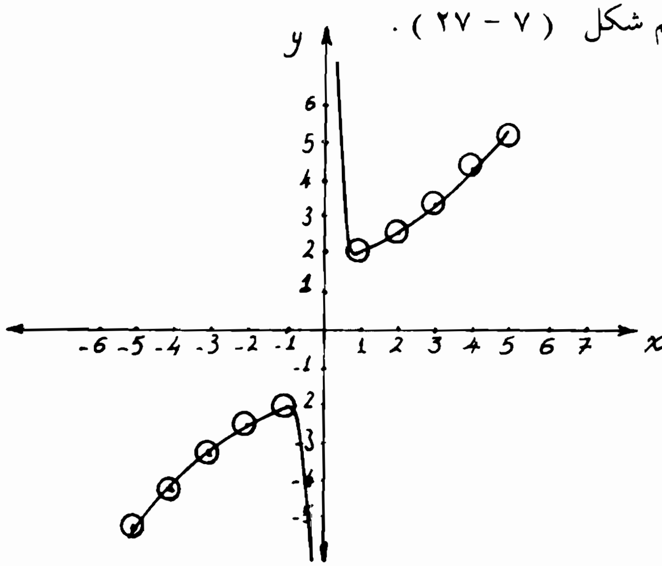
وبالتعويض بقيم x ، $(x=-1,+1)$ فى الدالة الأصلية .

نحصل على قيم y المناظرة

نقطة نهاية عظمى $\therefore (-1\ ,\ -2)$

نقطة نهاية صغرى $(1\ ,\ 2)$ ،

أنظر الرسم شكل (٧ - ٢٧) .



شكل (٧ - ٢٧)

(١٠) أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة : -

$$y = 3x^3 - 9x^2 - 27x + 15$$

الحـــــــل :-

$$y' = 9x^2 - 18x - 27$$
$$= 9(x^2 - 2x - 3)$$
$$= 9(x+1)(x-3)$$

وبوضع $y' = 0$

$$\therefore (x+1)(x-3) = 0$$

$\therefore$ $x = -1$ ، $x = 3$ هى القيم الحرجة لهذه الدالة .

ولتحديد ماهية هذه القيم (عظمى أم صغرى) ، نوجد y'' : -

$$y'' = 18x - 18 = 18(x-1)$$ ،

فعندما $x = -1$: -

$y^{``} = -36 = -ve$ سالبة

$\therefore$ عند $x = -1$: - توجد نهاية عظمى

وعندما $x = 3$: -

$y^{``} = 54 - 18 = 36 = +ve$ موجبة

$\therefore$ عند $x = 3$ توجد نهاية صغرى

وبالتعويض بقيم x هذه نوجد قيم y المناظرة من الدالة الأصلية : -

$$y_{max} = 3(-1)^3 - 9(-1)^2 - 27(-1) + 15 = 30$$

$$، y_{min} = 3(3)^3 - 9(3)^2 - 27(3) + 15 - 66$$

(١١) إحسب القيم العظمى والصغرى للدالة :

$$f(x) = x^3 - x$$

فى الفترة من $x = -1$ إلى $x = 2$

الحـــــل :-

$$y^{`} = 3x^2 - 1$$

ثم نضع $y^{`} = 0$

$$\therefore 3x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

ثم نوجد قيم الدالة y عند قيم x هذه .

$$\therefore f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

$$، f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

وبحساب قيم $f(x)$ عند حدود الفترة

$$\therefore f(-1) = 0$$

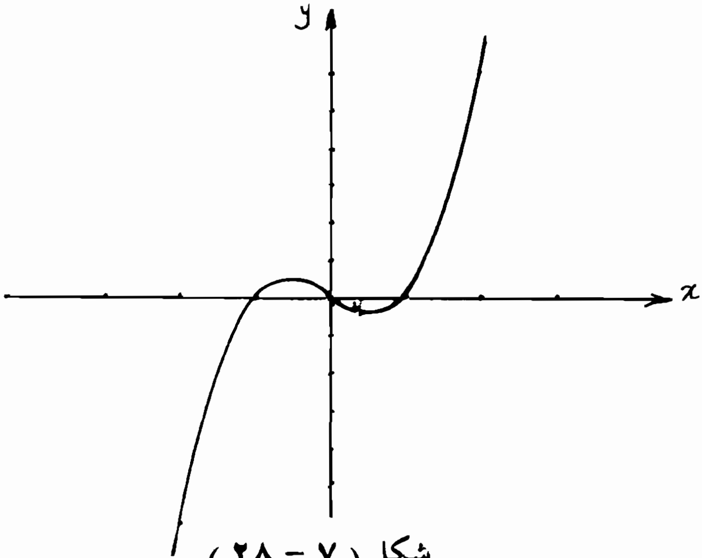
$$، \quad f(2) = 6$$

$\therefore$ النقطة (2) وهى نهاية المدى ، تعتبر أقصى نهاية للدالة .

$\therefore$ أقصى قيم لـ f فى الفترة $(-1 , 2)$: -

هى $\quad 6 \ , \ \frac{-2}{3\sqrt{3}}$

والنقطة $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \ , \ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ليست النهاية العظمى المطلقة ، إلا أنها العظمــى النسـبية فـى هذه الفترة relative maximum ، انظر الرسم شكل (٧ - ٢٨)



شكل (٧ - ٢٨)

(١٢) أوجد نقط النهاية العظمى والصغرى والانقلاب للدالة وارسمها : -

$y = \sin x + \cos x$

الحـــــــل :-

$y' = \cos x - \sin x$

ثم نضع $\quad y' = 0$

$\therefore \cos x - \sin x = 0$

$\therefore \cos x = \sin x$

$\therefore \tan x = 1$

$\therefore \quad x = \frac{\pi}{4}$

كما وأنه فى الربع الثالث من الإحداثيات الكرتيزية ، نجد أن كلاً من $\sin x$ ، $\cos x$ تكون سالبة وبالتالى فإنهما يتساويان كذلك فى الربع الثالث أى عندما $x = \pi + \frac{\pi}{4}$

$$\therefore x = 180 + 45 = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

ولما كان هذا المنحنى له دورة كاملة كل 2π ويتكـرر بعدهـا فـإذا أضفنـا $2\pi\ n$ لهـذا الرقم : - $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ، حيث $n = \ldots\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots$

فسوف نجد عدد لا نهائى من القيم الحرجة ولهذا فإن النقط الحرجة هى : -

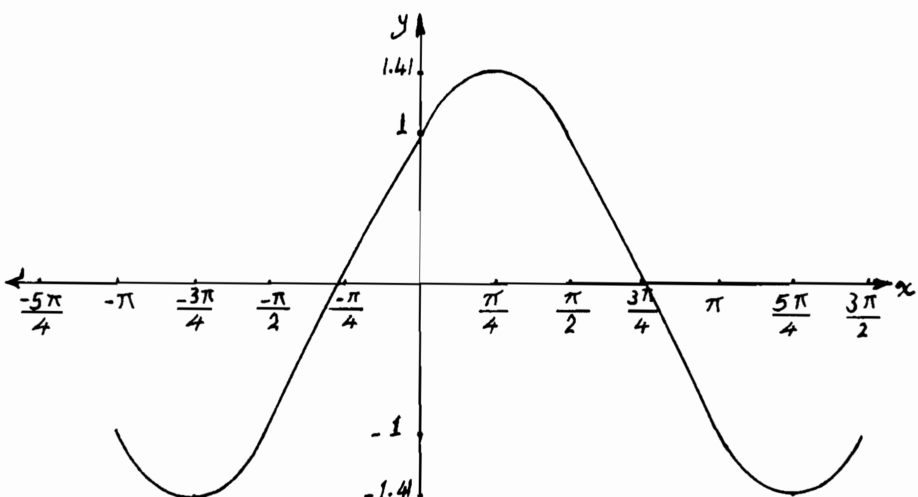
$$\frac{\pi}{4}, 2\pi\ n, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\ n \qquad , \qquad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

إلا أننا سنقتصر فى دراسة الدالة فى المدى : -

$$0 \le x \le 2\pi$$

وسوف نستخدم طريقة المشتقة الأولى لتحديد ماهية النقط الحرجة ولابد من تجربـة قيـم أكبر قليلاً أو أقل قليلاً من كل من هذه القيم الحرجة ثم نسطر الجدول التالى : -

		$\frac{dy}{dx} = \cos x - \sin x$	
$x < \frac{\pi}{4}$	$x = 0$	$+1$	+
$\frac{5\pi}{4} > x > \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{2}$	-1	−
$x > \frac{5\pi}{4}$	$x = 2\pi$	$+1$	+



شكل (٧ - ٢٩)