

## الباب السادس

### قواعد التفاضل

#### ٦-١ :- تفاضل المجموع Differentiation of a sum

درسنا فى الأبواب السابقة تفاضل لدوال من حد واحد فيما عدا الدالة :-

$y = mx + b$  وقد علمنا كيفية إيجادها من المبادئ الأولية " طريقة  $\Delta$  " ، فى هذا الباب سندرس تفاضل دوال عبارة عن مجموع لبضعة دوال " اثنين أو أكثر " فى نفس المتغير  $x$  ، مثلاً

$$y = 3x^3 + 2x^2 - 5x \quad \text{:- وذلك مثل الدالة :-}$$

وفيما يلى طريقة إيجاد تفاضل مثل هذه الدوال .

لنعتبر كل من  $U, V$  دالة فى  $x$  ولتكن  $y$  تمثل مجموع الدالتين :-

$$Y = U + V$$

وبذلك فإن كل من  $y, v, u$  تعتبر دوال فى  $x$  ولنفترض أن هنالك تغير فى المتغير المستقل  $x$  مقداره  $\Delta x$  ، وينتج عن هذا التغير ، تغير مناظر فى كل من  $y, u, v$  وليكن  $\Delta y, \Delta u, \Delta v$  على الترتيب

وبذلك تصبح  $y$  عبارة عن  $y + \Delta y$

، تصبح  $u$  عبارة عن  $u + \Delta u$  ،

، تصبح  $v$  عبارة عن  $v + \Delta v$  ،

$$\because y = u + v$$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$$

وبالطرح :-

$$\therefore \Delta y = \Delta u + \Delta v$$

وبالقسمة على  $\Delta x$  :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وهذا صحيح لجميع قيم  $\Delta x$  ولجميع الزيادات المناظرة  $\Delta y, \Delta u, \Delta v$

كما وأن نهايتهم متساوية . وعندما  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

وواضح أن نفس التحليل السابق ينطبق على مجموع أى عدد من الدوال وبذلك فإن قاعدة تفاضل الدوال المجموعة فى نفس المتغير تكون كالتالى :-  
[[ المعامل التفاضلى لمجموع عدد من الدوال يساوى مجموع المعامل التفاضلى لهذه الدوال ]].

### أمثلة محلولة

مثال (١) :- أجز التفاضل بالنسبة إلى  $x$  للدالة :

$$y = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 11$$

الحل :-

طبقاً لقاعدة تفاضل المجموع السابقة ،

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 5 \times 3x^2 + 4 \times 2x - 8 \\ &= 15x^2 + 8x - 8\end{aligned}$$

مثال (٢) :- أوجد ميل المماس للمنحنى  $y = x^2 - 4x + 15$

عند  $x = 3$

وما هو الإحداثى السينى للنقطة التى يكون ميل المماس عندها مساوياً للصفر

الحل :-

$$\therefore y = x^2 - 4x + 15$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times 3 - 4 = 2$$

وعندما  $x = 3$  فإن

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ أى } \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore 2x - 4 = 0 \quad \therefore 2x = 4, \quad x = 2$$

أى أن المماس يكون مساوياً للصفر أى موازياً لمحور السينات عندما  $x = 2$

مثال (٣) إذا كانت العلاقة بين المسافة  $S$  والزمن  $t$  لجسم متحرك ، كالتالى :-

$$S = 40t - 8t^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 8 \text{ عندما } t \text{ ثم أوجد قيمة } t$$

الحل :-

$$\therefore S = 40t - 8t^2$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 40 - 16t$$

$$\frac{ds}{dt} = 8 \text{ وعندما}$$

$$\therefore 8 = 40 - 16t$$

$$\therefore 16t = 40 - 8 = 32$$

$$\therefore t = 2$$

مثال (٤) أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية :-

$$a) y = 2x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$b) y = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7$$

$$c) y = 3x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2$$

$$d) y = x^{\frac{4}{5}} - 3x^{\frac{-3}{4}} + \frac{2}{x} + 2x$$

$$e) y = x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$f) y = \left( x^{\frac{1}{3}} - 3 \right) \left( \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} \right)$$

الحل :-

$$a) \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x + 6$$

$$b) \frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^2 - 10x$$

$$c) \frac{dy}{dx} = 3 \times \frac{3}{2} \sqrt{x} = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{9\sqrt{x}}{2} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$d) \frac{dy}{dx} = \frac{4}{5} x^{\frac{-1}{5}} + \frac{9}{4} x^{\frac{-7}{4}} - \frac{2}{x^2} + 2$$

$$e) \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

f) يتم أولاً فك القوسين ويُصبح المقدار كالتالي :

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{-1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-1} - 6x^{\frac{-1}{2}} - 9x^{-1}$$

$$= 2x^{\frac{-1}{6}} + 3x^{\frac{-4}{6}} - 6x^{\frac{-3}{6}} - 9x^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{-1}{6} x^{\frac{-7}{6}} + 3 \times \frac{-4}{6} x^{\frac{-10}{6}} - 6 \times \frac{-3}{6} x^{\frac{-9}{6}} - 9 \times -1 x^{-2}$$

$$= \frac{-1}{3x^{\frac{7}{6}}} - \frac{2}{x^{\frac{10}{6}}} + \frac{3}{x^{\frac{9}{6}}} + \frac{9}{x^2}$$

مثال (٥) :-

$$v = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$$

إذا كانت

فاوجد :- (أ) :  $f(1), f(0) \times f(-1)$

(ب) : قيم  $x$  التي تجعل  $f(x) = \text{صفر}$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x - 9$$

$$\cdot f(1) = 3(1)^2 + 6(1) - 9 = 0$$

$$\cdot f(0) = 3(0)^2 + 6(0) - 9 = -9$$

$$\cdot f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 9 = -12$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ \therefore x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ \therefore (x+3)(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= 1, x = -3 \end{aligned}$$

هي قيم  $x$  التي تجعل  $f(x) =$  صفر

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{مثال (٦) إذا كانت :}$$

حيث  $a, b, c$  ثوابت

$$f'(-1) = 1, f'(2) = 2, f(1) = 3 \quad \text{وكانت}$$

فأوجد قيم  $a, b, c$

الحل :-

$$\because y = ax^2 + bx + c$$

$$\therefore y' = 2ax + b$$

$$f(1) = 3 = a(1)^2 + b(1) + c$$

$$\therefore a + b + c = 3 \quad \text{..... A}$$

$$f'(2) = 2 = 2a(2) + b$$

$$\therefore 4a + b = 2 \quad \text{..... B}$$

$$f'(-1) = 2a(-1) + b = 1$$

$$\therefore -2a + b = 1 \quad \text{..... C}$$

ب طرح (c) من (b)

$$\therefore 6a = 1, \quad a = \frac{1}{6}$$

بالتعويض في (c)

$$\therefore -2 \times \frac{1}{6} + b = 1$$

$$\therefore b = \frac{4}{3}$$

بالتعويض عن قيم  $c, b$  في A

$$\therefore \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + c = 3$$

$$\therefore c = 1.5$$

مثال (٧) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية :

$$a) y = 5 \quad , \quad b) y = -3x \quad , \quad c) y = x^5 \quad , \quad d) y = \frac{3}{x}$$

الحل :

$$a) \because y = 5 \therefore \frac{dy}{dx} = \text{Zero}$$

$$b) \because y = -3x \therefore \frac{dy}{dx} = -3$$

$$c) \because y = x^5 \therefore \frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$d) \because y = \frac{3}{x} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x^2}$$

مثال (٨) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

$$a) y = \frac{-7}{x^2} \quad , \quad b) y = \frac{8}{x^3} \quad , \quad c) y = a\sqrt{x} \quad , \quad d) y = a\sqrt[3]{x}$$

الحل :

$$a) \because y = \frac{-7}{x^2} = -7x^{-2} \therefore \frac{dy}{dx} = -7 \times -2x^{-3} = \frac{14}{x^3}$$

$$b) \because y = \frac{8}{x^3} = 8x^{-3} \therefore \frac{dy}{dx} = 8 \times -3x^{-4} = \frac{-24}{x^4}$$

$$c) \because y = a\sqrt{x} = a \cdot x^{\frac{1}{2}} \therefore \frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$d) \because y = a\sqrt[3]{x} \therefore y = ax^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{a}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مثال (٩) : أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية :

$$a) y = \frac{-a}{b} \sqrt[5]{x^2} \quad , \quad b) y = 2x^{-3/4}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \text{a) } \because y &= \frac{-a}{b} \sqrt[5]{x^2} = \frac{-a}{b} x^{\frac{2}{5}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{-a}{b} \times \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{-2a}{5b} x^{-\frac{3}{5}} \\ &= \frac{-2a}{5b} \times \frac{1}{x^{3/5}} = \frac{-2a}{5b} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \because y &= 2x^{\frac{-3}{4}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= 2 \times \frac{-3}{4} \times x^{\frac{-3}{4}-1} = \frac{-3}{2} x^{-\frac{7}{4}} = \frac{-3}{2} \times \frac{1}{x^{7/4}} = \frac{-3}{2} \times \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}} \end{aligned}$$

مثال (١٠) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :-

$$\text{a) } y = ax^{\frac{1}{5}} \quad , \quad \text{b) } y = \frac{a}{\sqrt{x}}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \text{a) } \because y &= ax^{\frac{1}{5}} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = a \times \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{a}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{a}{5} \times \frac{1}{x^{4/5}} = \frac{a}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \because y &= \frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} = a \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= a \times \frac{-1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{-a}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-a}{2} \times \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{-a}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

مثال (١١) أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية :-

$$\text{a) } y = 9x^{\frac{4}{3}} \quad , \quad \text{b) } y = \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{c) } y = \frac{10}{\sqrt[5]{x^3}} \quad , \quad \text{d) } y = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$$

الحل :-

$$a) \because y = 9x^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 9 \times \frac{4}{3} \times x^{\frac{4}{3}-1} = 12x^{\frac{1}{3}} = 12\sqrt[3]{x}$$

$$b) \because y = \frac{-5}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-5}{x^{2/3}} = -5 \times x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -5 \times \frac{-2}{3} x^{\frac{-2}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{-\frac{5}{3}} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{x^{5/3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

مثال (١٢) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = (x-3)(2x+1)$$

الحل : -

نقوم بفك الأقواس فنحصل على حدود مجموعة جبرياً

$$\therefore y = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x - 5$$

مثال (١٣) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$$

الحل : -

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 3$$

مثال (١٤) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

الحل : -

$$y = x + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + 3 \times \frac{-1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{-3}{2} \times \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$$



مثال (١٥) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = 3x^2 - \frac{3}{x^2} + 1$$

الحل : -

$$y = 3x^2 - 3x^{-2} + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x + 6x^{-3} = 6x + \frac{6}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x^3}\right)$$

مثال (١٦) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = x\left(x^2 - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5}\right)$$

الحل : -

$$y = x^3 - 3x^{-2} + 4x^{-3} + 5x^{-4}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 3x^2 + 6x^{-3} - 12x^{-4} - 20x^{-5} \\ &= 3x^2 + \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^4} - \frac{20}{x^5}\end{aligned}$$

مثال (١٧) أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[6]{x^5}$$

الحل : -

$$y = x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{5}{6}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{6}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[6]{x}}\end{aligned}$$

مثال (١٨) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = (2x^2 + 3x - 1)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right)$$

الحل : -

نفك الأقواس بحيث تصبح الدالة عبارة عن حدود مجموعة جبرياً

$$\begin{aligned}\therefore y &= 2x + 3\frac{-1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \\ &= 2x + 3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{x^4}$$

مثال (١٩) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{x^3}}$$

الحل : -

$$y = 7x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -7x^{-\frac{3}{2}} + \frac{15}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{-7}{x^{3/2}} + \frac{15}{2x^{5/2}} = \frac{-7}{\sqrt{x^3}} + \frac{7.5}{\sqrt{x^5}}$$

مثال (٢٠) : - أوجد المشتقة الأولى للدالة : -

$$y = ax^2 + \frac{b}{x} - c$$

الحل : -

$$\frac{dy}{dx} = 2ax - \frac{b}{x^2}$$

#### Exercise 4

فاضل الدوال التالية في (x) :-

$$y = 6x^3 + 5x^2 \quad (١)$$

$$y = \frac{3}{x} + 2x \quad (٢)$$

$$y = 3x^3 + x - 2 \quad (٣)$$

$$y = 8 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} \quad (٤)$$

$$y = 4x^4 + 3x^2 - 2x \quad (٥)$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{5} \quad (٦)$$

$$y = x(3 - 2x + 2x^2) \quad (٧)$$

$$y = 6\sqrt{x} + \sqrt{10} \quad (٨)$$

$$y = 5x^2 + \frac{2}{3\sqrt{x}} + 3 \quad (٩)$$

$$y = (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x^3}) \quad (١٠)$$

$$y = x^4 + x^3 + x^2 + x \quad (١١)$$

$$y = \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - 5\sqrt[3]{x^2} \quad (١٢)$$

$$y = \frac{7}{x^3} - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{2} \quad (١٣)$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \quad (١٤)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} + 2x \quad (١٥)$$

أوجد قيمة  $\frac{ds}{dt}$  عندما :-

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad (١٦)$$

$$S = 5t + 8t^2 \quad (١٧)$$

$$S = 2t^2 - 3t + 8 \quad (18)$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\text{أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ للدالة : -} \quad (19)$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\text{فاضل بالنسبة إلى } x \text{ : -} \quad (20)$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\text{فاضل بالنسبة إلى } x \text{ : -} \quad (21)$$

$$(1+x)^3$$

$$\text{فاضل بالنسبة إلى } x \text{ : -} \quad (22)$$

$$\text{إذا كانت : -} \quad (23)$$

$$y = x^{3n} - nx^3 + 7n$$

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{فأوجد قيمة}$$

$$\text{أوجد قيمة } \frac{dy}{dx} \text{ عندما :} \quad (24)$$

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x}$$

$$y = 2x^2 - 3x + 1$$

$$\text{أوجد ميل المماس للمنحنى :} \quad (25)$$

عندما  $x = 1.5$  ، وعند أى قيمة لـ  $x$  يكون الميل مساوياً للصفر

$$\text{أوجد قيمة } x \text{ التى يكون ميل المماس للمنحنى : } y = 3(x^2 - 6) \text{ ،} \quad (26)$$

مساوياً للصفر

$$\text{أوجد ميل المماس للمنحنى : } y = x^3 - 4x^2 - 5x + 6 \text{ عند النقط } x = 1, 2, 3 \quad (27)$$

$$\text{أوجد النقط التى عندها يكون ميل المماس مساوياً للصفر للمنحنى : -} \quad (28)$$

$$y = x + \frac{1}{x}$$

## ٦ - ٢ تفاضل حاصل الضرب Differentiation of Product

قد يكون من السهل أحياناً إيجاد المعامل التفاضلى لحاصل ضرب بعض الكميات مثل :  
 $(x+2)^2$  أو  $2x(5x-3)$  . وذلك بأن ن فك حاصل الضرب ويصبح فى صورة مجموع  
 جبرى ، ثم نفاضل كما سبق وأن علمنا .

فمثلاً :  $(x+2)^2$  تُصبح :  $x^2 + 4x + 4$  . وهى فى صورة مجموع وكذلك  
 $2x(5x-3)$  تُصبح :  $10x^2 - 6x$  . وهى فى صورة مجموع أيضاً .

إلا أنه يصعب أحياناً تحويل الكميات المضروبة إلى مجموعة من الحدود مجموعة جبرياً .  
 وذلك مثل المقادير التالية : -

$$x^2 \times \sqrt{1-3x} , \quad x \sin x , \quad \frac{x^3}{2} \times \tan x$$

والمعامل التفاضلى فى مثل هذه الحالات لا يكون مساوياً لحاصل ضرب المعامل  
 التفاضلى لكل حد على حدة .

ولإيجاد قاعدة عامة لجميع حالات الضرب نستعرض معاً ما يلى : -

لنعتبر  $U, V$  دوال فى  $x$  ،  $y$  دالة فى  $U, V$

أى أن  $Y = U \times V$  وبذلك فإن  $y$  تعتبر كدالة فى  $x$

$$\therefore y = uv$$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = uv + u.(\Delta v) + v.(\Delta u) + (\Delta u).(\Delta v) \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = u.(\Delta v) + v.(\Delta u) + (\Delta u).(\Delta v)$$

وبالقسمة على  $\Delta x$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = u. \frac{\Delta v}{\Delta x} + v. \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u. \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وعندما  $\Delta x \rightarrow 0$  ، فإن كلاً من  $\Delta u, \Delta v, \Delta y$  تقترب كذلك من الصفر

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( u. \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( v. \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta u. \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

وفى النهايات ، فإنه عندما تقترب  $\Delta u$  من الصفر فإن الحد الأخير  $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$  يقترب أيضاً من الصفر .

وباستخدام رموز التفاضل :

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

أى أن :-

( تفاضل مقدارين مضروبين فى بعضهما ، يساوى المقدار الأول مضروباً فى تفاضل المقدار الثانى + المقدار الثانى مضروباً فى تفاضل المقدار الأول )

وهذه القاعدة تصلح لأكثر من دالتين " مقدارين " فمثلاً إذا كانت :-

$$Y = U \cdot V \cdot W$$

وكانت كل من  $U, V, W$  وبالتبعية  $Y$  دوال فى  $x$  فإن :-

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{du}{dx} \times VW \right) + \left( \frac{dv}{dx} \times UW \right) + \left( \frac{dw}{dx} \times UV \right)$$

### أمثلة محلولة

مثال (١) :-

$$y = (3x^2 + 1)(5x + 7)$$

أوجد مشتقة الدالة

الحل :-

بتطبيق القاعدة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (3x^2 + 1) \cdot (5) + (5x + 7) \cdot (6x)$$

$$= 15x^2 + 5 + 30x^2 + 42x$$

$$= 45x^2 + 42x + 5$$

مثال (٢) :-

$$y = (5x^3 + 2x - 1)(3x^2 - 4)$$

أوجد مشتقة الدالة :-

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (5x^3 + 2x - 1) \cdot (6x) + (3x^2 - 4) \cdot (15x^2 + 2) \\ &= 30x^4 + 12x^2 - 6x + 45x^4 + 6x^2 - 60x^2 - 8 \\ &= 75x^4 - 42x^2 - 6x - 8\end{aligned}$$

مثال (٣) :-

$$(x^2 - 3x + 3)(2x^2 + 5)$$

فاضل بالنسبة إلى  $x$  :

الحل :- لتكن

$$y = (x^2 - 3x + 3)(2x^2 + 5)$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= \left[ \frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 3) \times (2x^2 + 5) \right] + \left[ \frac{d}{dx}(2x^2 + 5) \times (x^2 - 3x + 3) \right] \\ &= \left[ (2x - 3)(2x^2 + 5) \right] + \left[ (4x)(2x - 3) \right]\end{aligned}$$

ويمكن اختصار الناتج إذا رغبتنا في ذلك .

مثال (٤) :-

$$y = (x^2 - 2)(3x - 1)(x^3 + 2x^2 + 1)$$

فاضل بالنسبة إلى  $x$  :

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \left[ \frac{d}{dx}(x^2 - 2) \cdot (3x - 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 1) \right] \\ &+ \left[ \frac{d}{dx}(3x - 1) \cdot (x^2 - 2) \cdot (x^3 + 2x^2 + 1) \right] \\ &+ \left[ \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 + 1) \cdot (x^2 - 2) \cdot (3x - 1) \right] \\ &= 2x(3x - 1)(x^3 + 2x^2 + 1) + 3(x^2 - 2)(x^3 + 2x^2 + 1) + \\ &+ (3x^2 + 4x)(2x)(3)\end{aligned}$$

ويمكن اختصار النتيجة إذا رغبتنا في ذلك .

مثال (٥) :-

$$y = (x^2 + 2)^3 (x^3 - 4)^2$$

أوجد مشتقة الدالة :

الحل :-

يمكن بالطبع حل هذه المسألة بفك الأقواس بحيث تصبح  $y$  دالة كثيرة الحدود في  $x$  إلا أن هذه عملية طويلة .

وأفضل طريقة لحل هذه المسألة هو مراعاة أنها عبارة عن حاصل ضرب قوسين وبالتالي يمكن حلها باستخدام النظرية :-

$$\frac{d}{dx} uv = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

واختصاراً تكتب كالتالي :-

$$d u v = u d v + v d u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2)^3 \cdot \frac{d}{dx} (x^3 - 4)^2 + (x^3 - 4)^2 \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 2)^3$$

$$\frac{d}{dx} (x^3 - 4)^2 = 2(x^3 - 4) \times \frac{d}{dx} (x^3 - 4)$$

$$= 2(x^3 - 4) \times (3x^2) = 6x^2 (x^3 - 4) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 2)^3 = 3(x^2 + 2)^2 \times \frac{d}{dx} (x^2 + 2)$$

$$= 3(x^2 + 2)^2 \times 2x = 6x (x^2 + 2)^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

وبالتعويض بـ (1) ، (2) في المعادلة  $\frac{dy}{dx}$  :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2)^3 \cdot (6x^2) \cdot (x^3 - 4) + (x^3 - 4)^2 \cdot (6x) \cdot (x^2 + 2)^2$$

$$= 6x (x^2 + 2)^2 (x^3 - 4) [x(x^2 + 2) + (x^3 - 4)]$$

$$= 6x (x^2 + 2)^2 (x^3 - 4) (2x^3 + 2x - 4)$$

مثال (٦) :-

$$y = (x^3 - 5) \cdot \sqrt{2x^2 + 3}$$

إذا كانت

فاوجد  $\frac{dy}{dx}$



الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 5) \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{2x^2 + 3} \cdot \frac{d}{dx} (x^3 - 5)$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{2x^2 + 3} = \frac{d}{dx} (2x^2 + 3)^{1/2} = \frac{1}{2} (2x^2 + 3)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx} (2x^2 + 3)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 3}} \times 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^3 - 5) \cdot \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3}} + \sqrt{2x^2 + 3} \cdot 3x^2$$

$$= \sqrt{2x^2 + 3} \cdot \frac{8x^4 + 9x^2 - 10x}{2x^2 + 3}$$

مثال (٧) :-

$$f(x) = (x+2)^3 (3x-1)^{\frac{5}{3}}$$

إذا كانت :

فأوجد  $f'(x)$

الحل :-

نستخدم قاعدة حاصل الضرب وذلك بوضع :

$$u = (x+2)^3 \quad , \quad v = (3x-1)^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore y = u \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 3(x+2)^2 \cdot (1)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{5}{3} (3x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot (3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x+2)^3 \times 5\sqrt[3]{(3x-1)^2} + \sqrt[3]{(3x-1)^5} \cdot 3(x+2)^2$$

$$= (x+2)^2 (3x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot 5[(x+2) + 3(3x-1)]$$

$$= (x+2)^2 \cdot (3x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot (14x+7)$$

مثال (٨) :-

$$y = (x+2)(x^2+1)(x-7)$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة :-

الحل :-

$$\therefore y = u \cdot v \cdot w$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v \cdot w + \frac{dv}{dx} \cdot u \cdot w + \frac{dw}{dx} \cdot u \cdot v$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (1)(x^2+1)(x-7) + (2x)(x+2)(x-7) + (1)(x+2)(x^2+1)$$

$$= x^3 - 7x^2 + x - 7 + 2x^3 - 14x^2 + 4x^2 - 28x + x^3 + x + 2x^2 + 2$$

$$= 4x^3 - 15x^2 - 26x - 5$$

مثال (٩) :-

$$x = \frac{y}{a} \cdot \sqrt{3by - y^2}$$

أوجد مشتقة الدالة :-

الحل :-

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a} \cdot \frac{d}{dy} (3by - y^2)^{\frac{1}{2}} + (3by - y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy} \cdot \frac{y}{a}$$

$$= \frac{y}{a} \cdot \frac{d}{dy} (3by - y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{(3by - y^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$$

$$V = (3by - y^2)$$

ثم نضع :

$$\therefore \frac{dv}{dy} = (3b - 2y)$$

$$U = (3by - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ ومنها}$$

ثم نضع :

$$\therefore U = V^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{3by - y^2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{u}{a}$$

$$\therefore \frac{du}{dy} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{3by-y^2}} \cdot (3b-2y)$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a} \cdot \frac{(3b-2y)}{2\sqrt{3by-y^2}} + \frac{\sqrt{3by-y^2}}{a}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{3by-2y^2+3by-y^2}{a(3by-y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6by-3y^2}{a\sqrt{3by-y^2}}$$

وهذه الطريقة طويلة ومعقدة ومن الأفضل وضعها في الصورة :-

$$x = \frac{y}{a} (3by-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$U = \frac{y}{a} , \quad V = (3by-y^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ونعتبر :}$$

$$X = U \times V$$

ثم نستخدم قاعدة حاصل الضرب :

$$\therefore \frac{dX}{dY} = U \cdot \frac{dV}{dY} + V \cdot \frac{dU}{dY}$$

وسنصل لنفس الجواب .

### Exercise "5"

فاضل الدوال التالية بقانون حاصل ضرب الدوال " وليس المجموع "

- $(2x+1)(5x+2)$  ..... (١)
- $(x^2+2)\left(\frac{x}{2}+1\right)$  ..... (٢)
- $(2x-3)(x^2+3x)$  ..... (٣)
- $(x^2+2)(3x^2-1)$  ..... (٤)
- $(x^2-2x)(3x^2-x)$  ..... (٥)
- $(x^2+x-1)(x+1)$  ..... (٦)
- $(x^2-x+1)(x-1)$  ..... (٧)
- $(x^2+3x-2)(x^2-3)$  ..... (٨)
- $(x^2-2)(x^2+2)$  ..... (٩)
- $(x^2-x+1)(x^2+x-1)$  ..... (١٠)
- $(x-5)(x^2+5x+4)$  ..... (١١)
- $(2x^2-3)(3x^2+2x-1)$  ..... (١٢)
- $(x+1)(x-1)(x^2-1)$  ..... (١٣)
- $(x+1)(2x+1)(3x+3)$  ..... (١٤)
- $(ax^2+bx+c)(ux+5v)$  ..... (١٥)
- $\sqrt{x}(2x+1)(x^2-2x+3)$  ..... (١٦)
- $2\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$  ..... (١٧)
- $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^2}$  ..... (١٨)
- $abx^2 \times c\sqrt{x^3}$  ..... (١٩)

### ٦-٣ :- تفاضل القسمة Differentiation of a quotient

علمنا فيما سبق كيفية إيجاد المعامل التفاضلي للقسمة البسيطة مثل تفاضل  $\frac{1}{x}$  وذلك من

المبادئ الأولية ، أى بطريقة  $\Delta$

إلا أن هذه الطريقة لا تُفيد فى الحالات الأصعب والمعقدة عن هذا المثال البسيط  $\left(\frac{1}{x}\right)$

وسنقوم باستنباط قاعدة عامة لتفاضل قسمة دالتين كما يلى :-

$$y = u \div v \quad \text{نعتبر :}$$

$$\therefore y + \Delta y = (u + \Delta u) \div (v + \Delta v)$$

$$\therefore \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \quad \text{وبالطرح :-}$$

$$= \frac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

وبالقسمة على  $\Delta x$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

فإذا ما آلت  $\Delta x$  إلى الصفر ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) فإنه وبالتبعية ، تؤول كل من  $\Delta u$  ,  $\Delta v$  ,  $\Delta y$  للصفر كذلك .

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(v + \Delta v)}$$

وذلك من قواعد النهايات

وبذلك تؤول نهايات البسط إلى :-

$$v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}$$

وتكون نهاية المقام  $v^2$  حيث أن :  $\Delta v \rightarrow 0$  أيضاً .

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

أى أن تفاضل قسمة دالتين :-

$$\left[ \frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{مربع المقام}} \right]$$

أمثلة محلولة :-

مثال (١) :-

$$\left( \frac{2x}{2x-1} \right)$$

فاضل بالنسبة إلى  $x$  :

وذلك باستخدام قاعدة تفاضل قسمة دالتين السابقة :-

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

حيث  $v = (2x - 1)$  ,  $u = 2x$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{[(2x-1) \cdot (2) - (2x) \cdot (2)]}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{4x-2-4x}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

مثال (٢) :-

$$y = \frac{(x^3 + 1)}{(x^3 - 1)}$$

فاضل بالنسبة إلى  $x$  :

باستخدام القاعدة السابقة

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^3 - 1) \times (3x^2) - (x^3 + 1) \times (3x^2)}{(x^3 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^5 - 3x^2 - 3x^5 + 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-6x^5}{(x^3 - 1)^2} \end{aligned}$$

مثال (٣) :-

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}, \quad x^2 \neq 2 \quad \text{أوجد المشتقة الأولى للدالة :}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \because y &= \frac{u}{v} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2 - 2)(2x) - (x^2 + 2)(2x)}{(x^2 - 2)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x - 2x^3 - 4x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

مثال (٤) :-

$$y = \frac{x}{x+1} \quad \text{أوجد المعامل التفاضلي الأول بالنسبة إلى } x \text{ للدالة :}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \because y &= \frac{x}{x+1} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{[(1+x) \times 1] - [(x) \times 1]}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

مثال (٥) :-

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \quad \text{أوجد المشتقة الأولى للدالة :}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{[\sqrt{x} \cdot (2x)] - \left[ (x^2) \cdot \left( \frac{-1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) \right]}{x} \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = 2.5\sqrt{x} \end{aligned}$$

مثال (٦) :-

$$y = \frac{4x^3 - 7x^2 - 2}{3x + 5}$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة :

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{[(3x+5)(12x^2 - 14x)] - [(4x^3 - 7x^2 - 2)(3)]}{(3x+5)^2} \\ &= \frac{36x^3 - 42x^2 + 60x^2 - 70x - 12x^3 + 21x^2 + 6}{(3x+5)^2} \\ &= \frac{24x^3 + 39x^2 - 70x + 6}{(3x+5)^2} \end{aligned}$$

مثال (٧) :-

$$y = \frac{1}{x^5}$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة :

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^5 \times 0) - (1) \times (5x^4)}{(x^5)^2} \\ &= \frac{0 - 5x^4}{x^{10}} = \frac{-5}{x^6} \end{aligned}$$

مثال (٨) :-

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

أوجد تفاضل الدالة :

الحل :-

$$f(t) = \frac{t}{(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$\therefore f'(t) = \frac{(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (1) - (t) \times \left[ \frac{1}{2} (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2t \right]}{(t^2 - 1)}$$



ويمكن اختصار هذا الكسر بعدة طرق إلا أن أسهل طريقة هي بضرب كل من البسط

والمقام في  $(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore f'(t) = \frac{(t^2 - 1) - t^2 (t^2 - 1)^0}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

حيث :  $(t^2 - 1)^0 = 0$

مثال (٩) :-

$$y = \frac{x(x-1)}{x^2 + 3x - 2}$$

أوجد مشتقة الدالة :

الحل :-

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 3x - 2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 3x - 2)(2x - 1) - (x^2 - x)(2x + 3)}{(x^2 + 3x - 2)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2 - 4x - x^2 - 3x + 2 - 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 + 3x}{(x^2 + 3x - 2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 3x - 2)^2}$$

مثال (١٠) :- أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = \frac{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 2}}{2x + 3}$$

الحل :- باستخدام قاعدة القسمة :-

$$y' = \frac{(2x + 3) \left[ (x^2 + 2) \left( \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 2}} \right) + (\sqrt{x^2 - 2})(2x) \right] - (x^2 + 2)(\sqrt{x^2 - 2}) \cdot (2)}{(2x + 3)^2}$$

$$= \frac{(2x + 3)[x^3 + 2x + 2x^3 - 4x]}{(2x + 3)^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2}} - \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 2)}{(2x + 3)^2 \cdot \sqrt{x^2 - 2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2x+3)(3x^3-2x)}{(2x+3)^2 \sqrt{x^2-2}} - \frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(2x+3)^2 \sqrt{x^2-2}} = \\
&= \frac{6x^4-4x^2+9x^3-6x-x^4+2x^2-2x^2+4}{(2x+3)^2 \sqrt{x^2-2}} = \\
&= \frac{5x^4+9x^3-4x^2-6x+4}{(2x+3)^2 \sqrt{x^2-2}}
\end{aligned}$$

$$y = \left( \frac{3x+2}{2x-1} \right)^4$$

مثال (١١) أوجد تفاضل الدالة :-

الحل :-

$$\begin{aligned}
y' &= 4 \left( \frac{3x+2}{2x-1} \right)^3 \left[ \frac{(2x-1) \cdot (3) - (3x+2)(2)}{(2x-1)^2} \right] \\
&= 4 \left( \frac{3x+2}{2x-1} \right)^2 \frac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^3} \\
&= \frac{4(3x+2)^3}{(2x-1)^5} \times (-7) = \frac{-28(3x+2)^3}{(2x-1)^5}
\end{aligned}$$

مثال (١٢) :- أوجد تفاضل الدالة :-

$$y = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

الحل :-

نضع الدالة في أبسط صورة لها بالضرب في المرافق :-

$$\begin{aligned}
\therefore y &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} = \frac{(x+2) - 2\sqrt{x}\sqrt{x+2} + x}{(x+2) - x} \\
&= \frac{2x+2-2\sqrt{x^2+2x}}{2} = x+1 - \sqrt{x^2+2x}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}} \times (2x+2) = 1 - \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

مثال (١٣) :- أوجد تفاضل الدالة :-

الحل :-

$$y = \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) &= \frac{(x^2 - 1)(2x) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \times (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال :- (١٤) :- أوجد تفاضل الدالة :-

$$y = \sqrt{2 - \frac{2}{x^2 + 2}}$$

الحل :-

$$V = x^2 + 2 \quad \text{نضع}$$

$$U = 2 - \frac{2}{x^2 + 2} \quad \text{، نضع}$$

$$\therefore V = x^2 + 2$$

$$, U = 2 - \frac{2}{V}$$

$$\therefore Y = \sqrt{u}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{u}} \times \frac{+2}{v^2} \times 2x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2 - \frac{2}{x^2 + 2}}} \times \frac{2}{(x^2 + 2)^2} \times 2x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2x^2 + 4 - 2}{x^2 + 2}}} \times \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 2}} \times \frac{2x}{(x^2 + 2)^2} =$$

$$= \frac{2x}{(2x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2)^{3/2}}$$

### Exercise "6"

فاضل الدوال التالية في  $x$  :-

$$\frac{1}{(1-2x^2)} \quad (٢)$$

$$\frac{(x-1)}{(x+2)} \quad (٤)$$

$$\frac{(x+b)}{(x-b)} \quad (٦)$$

$$\frac{x^2}{(x-3)} \quad (٨)$$

$$\frac{\sqrt{x}}{(x-1)} \quad (١٠)$$

$$\frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} \quad (١٢)$$

$$\frac{(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)} \quad (١٤)$$

$$\frac{(1+x+x^2)}{x} \quad (١٦)$$

$$\frac{(3x-2)}{(2-3x)} \quad (١٨)$$

$$\frac{\frac{1}{x^2}+2}{x^{3/2}} \quad (٢٠)$$

$$\frac{2}{(3x-1)} \quad (١)$$

$$\frac{x}{(x-4)} \quad (٣)$$

$$\frac{(3x-1)}{(2x+3)} \quad (٥)$$

$$\frac{(x-b)}{(x+b)} \quad (٧)$$

$$\frac{x^2}{(x^2-3)} \quad (٩)$$

$$\frac{(x-1)}{\sqrt{x}} \quad (١١)$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt[3]{x}+1)} \quad (١٣)$$

$$\frac{(2x^2-x+1)}{(3x^2+x-1)} \quad (١٥)$$

$$\frac{3x^2}{(b^2-x^2)} \quad (١٧)$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+2)} \quad (١٩)$$

## ٦ - ٤ : - تفاضل دالة الدالة : Function of a Function

لكي نتفهم معنى دالة الدالة ، سنعتبر الدالة المثلثية  $\sin^2 x$  أى  $(\sin x)^2$  وهذه الدالة وهى مربع الدالة  $\sin x$  أى دالة فى  $\sin x$  بالضبط تماماً مثل  $x^2$  دالة فى  $x$  ، الدالة  $v^2$  دالة فى  $v$  إلا أن  $\sin x$  هى نفسها دالة فى  $x$  .

وبذلك فإن  $\sin^2 x$  دالة فى  $\sin x$  ،  $\sin x$  نفسها دالة فى  $x$  ومنها  $\sin^2 x$  دالة فى دالة  $x$  .

وبالمثل فإن  $\sqrt{x^2+3x}$  دالة فى  $x$  مثلما  $\sqrt{x}$  دالة فى  $x$  كما وأن  $x^2+3x$  هى نفسها دالة فى  $x$  .

وقد رأينا أن  $\sin^2 x$  دالة فى دالة  $x$  إلا أن الأمر يختلف فى حالة  $\sin^2 \sqrt{x}$  .

حيث أن  $\sin^2 \sqrt{x}$  دالة فى  $\sin \sqrt{x}$  وهى بدورها دالة فى  $\sqrt{x}$  ،  $\sqrt{x}$  دالة فى  $x$  .  
أى أن  $\sin^2 \sqrt{x}$  : ( دالة فى دالة دالة  $x$  ) .

كما وأن  $\sin^2 \sqrt{3x}$  دالة فى  $\sin \sqrt{3x}$  وهى دالة فى  $\sqrt{3x}$  ،  $\sqrt{3x}$  دالة فى  $3x$  ،  
 $3x$  دالة فى  $x$  .

أى أن  $\sin^2 \sqrt{3x}$  ( دالة فى دالة دالة دالة  $x$  ) .

وسوف نكتفى بضرب هذه الأمثلة عن الدوال المثلثية حيث سنوردها فيما يلى من مواضع .

إلا أنه للوصول إلى قاعدة عامة لتفاضل دالة الدالة ، فسوف نعتبر الدالة  $(x^2-3)^5$

$$u = (x^2 - 3) \quad \text{ولنعتبر}$$

$$\therefore y = u^5$$

$$\frac{dy}{du} = 5u^4$$

إلا أن المطلوب هو  $\frac{dy}{dx}$  ولذلك فإننا نلجأ للطريقة التالية : -

سنعتبر أن  $x$  تزداد بمقدار ضئيل للغاية ويساوى  $\Delta x$

، سنعتبر أن  $u$  تزداد بمقدار مناظر ضئيل للغاية ويساوى  $\Delta u$

، سنعتبر أن  $y$  تزداد بمقدار مناظر ضئيل للغاية ويساوي  $\Delta y$

وبذلك فإن :-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

فإذا أصبحت  $\Delta x \rightarrow 0$  فإن كلاً من  $\Delta y$  ،  $\Delta u$  ستؤول للصفر كذلك

وبذلك فإن كل من المقادير التالية ستقترب من نهاية محددة وهي :-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta y}{\Delta u}, \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

وفي مثالنا السابق  $y = u^5$

$$\therefore \frac{dy}{du} = 5u^4, \quad \because u = (x^2 - 3) \quad \therefore \frac{du}{dx} = 2x$$

وحيث أن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5u^4 \times 2x = 10x(x^2 - 3)^4$$

أمثلة محلولة :-

$$y = \sqrt{2 - x^2}$$

مثال (١) :- فاضل المقدار :

الحل :-

$$y = (2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

ونعتبر  $u = (2 - x^2)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -2x$$

وحيث أن  $u = (2 - x^2)$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} \times -2x = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$$

مثال (٢) : - أوجد مشتقة الدالة :

$$y = (2x^3 - 3x^2 + 1)^6$$

الحل :-

$$u = (2x^3 - 3x^2 + 1) \quad \text{نضع}$$

$$\therefore y = u^6, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore u = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2 - 6x$$

$$\therefore y = u^5 \quad \therefore \frac{dy}{du} = 5u^4 = 5(2x^3 - 3x^2 + 1)^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5(2x^3 - 3x^2 + 1)^4 (6x^2 - 6x)$$

$$= 30x(2x^3 - 3x^2 + 1)^4 (x-1)$$

$$y = (x^2 + 2)^3$$

مثال (٣) أوجد مشتقة الدالة :-

الحل :-

يمكن حل المسألة بطريقتين ، الطريقة الأولى بفك القوس ذو القوة 3

$$\therefore y = x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^5 + 24x^3 + 24x$$

والطريقة الثانية هي طريقة دالة الدالة :



$$u = (x^2 + 2). \quad \text{نضع}$$

$$\therefore y = u^3, \quad \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$\therefore u = (x^2 + 2) \therefore \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (3u^2) \times (2x) = 6x(u^2) = 6x(x^2 + 2)^2 = 6x(x^4 + 4x^2 + 4)$$

$$= 6x^5 + 24x^3 + 24x$$

وهي بالطبع نفس الإجابة السابق الحصول عليها بالطريقة الأولى

مثال (٤) : - أوجد  $\frac{dx}{dy}$  للدالة : -

$$y = \sqrt{\left(\frac{3}{x} - 2\right)}$$

الحل :-

$$\frac{du}{dx} = \frac{-3}{x^2}$$

نضع  $u = \frac{3}{x} - 2$  ومنها :

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2x}{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3-2x}{x}}} \times \frac{-3}{x^2} = \frac{-3}{2x^2} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{-2x^2\sqrt{3-2x}}{3\sqrt{x}}$$

وهي عبارة عن مقلوب  $\frac{dy}{dx}$

ويمكن الحل بالطريقة التالية : -

$$\therefore y = \sqrt{\frac{3}{x}-2} \quad \therefore y^2 = \frac{3}{x}-2$$

$$\therefore \frac{3}{x} = y^2 + 2 \quad \therefore x = \frac{3}{y^2 + 2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dx}{dy} &= \frac{(y^2 + 2)(0) - 3(2y)}{(y^2 + 2)^2} = \frac{-6y}{(y^2 + 2)^2} = \frac{-6\left(\frac{3}{x}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{3}{x}-2\right)+2\right]^2} = \frac{-6\left(\frac{3}{x}-2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{3}{x}\right)^2} \\ &= \frac{-6x^2\left(\frac{3-2x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{9} = \frac{-2x^2}{3} \times \frac{\sqrt{3-2x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

مثال (٥) : - إذا كانت  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  فأوجد  $y_2, y_3$

الحل :-

$$y_2 = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

وهي تعني التفاضل للتفاضل أو التفاضل الثاني

$$y_3 = y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

وهي تعني التفاضل الثالث .

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y_2 = \frac{(x^2 + 1)^2(-2x) - (1 - x^2) \times 2(x^2 + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{(2x^3 - 6x)}{(1 + x^2)^3}$$

$$y_3 = \frac{(1 + x^2)^3(6x^2 - 6) - (2x^3 - 6x) \times 3(1 + x^2)^2(2x)}{(1 + x^2)^6} = \frac{-6x^4 + 36x^2 - 6}{(x^2 + 1)^4}$$

مثال (٦) : - أوجد  $\frac{dy}{dx}$  للدالة  $y = (3x^2 + 5x)^3$

الحل :-

$$u = (3x^2 + 5x) \quad \text{نضع}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x + 5$$

$$y = u^3 \quad \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2 = 3(3x^2 + 5x)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3(3x^2 + 5x)^2 (6x + 5) \end{aligned}$$

ويمكن التفاضل مباشرة كالتالي :-

$$\therefore y = (3x^2 + 5x)^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(3x^2 + 5x)^{3-1} \cdot \frac{d}{dx} (3x^2 + 5x) = 3(3x^2 + 5x)^2 \times (6x + 5)$$

مثال (٧) :- أوجد  $\frac{dy}{dx}$  للدالة :-

$$y = (4x^2 + 5x - 1)^4 + (3x^3 + 2x - 3)^6$$

الحل :-

$$y = u^4 + v^6$$

بطريقة دالة الدالة : نضع

$$u = (4x^2 + 5x - 1) \quad \text{حيث}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (8x + 5)$$

$$v = (3x^3 + 2x - 3)$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = (9x^2 + 2)$$

$$y = u^4 + v^6 \quad \therefore \frac{dy}{du} = 4u^3, \quad \frac{dy}{dv} = 6v^5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot (8x + 5) + 6v^5 \cdot (9x^2 + 2)$$

$$= 4(4x^2 + 5x - 1)^3 (8x + 5) + 6(3x^3 + 2x - 3)^5 (9x^2 + 2)$$

$$y = (x+1)^3$$

مثال (٨) - أوجد  $\frac{dy}{dx}$  للدالة

الحل :-

بالطريقة المباشرة ، ن فك القوس :

$$\therefore y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x + 3$$

وبطريقة دالة الدالة :-

$$u = x + 1 \quad \text{حيث} \quad y = u^3 \quad \text{نضع}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 1 = 3(x+1)^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3x^5 - 2x^3}}$$

مثال (٩) - أوجد  $\frac{dy}{dx}$  للدالة :

الحل :-

$$u = 3x^5 - 2x^3 \quad \text{نضع}$$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{-1}{2u^{3/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{(3x^5 - 2x^3)^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^4 - 6x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{(3x^5 - 2x^3)^3}} \times (15x^4 - 6x^2)$$

مثال (١٠) أوجد المشتقة الأولى للدالة :-

$$y = (x^2 - 2x + 3)^3$$

الحل :-

$$u = (x^2 - 2x + 3) \quad \text{نضع}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (2x-2) = 2(x-1)$$

$$y = u^3 \therefore \frac{dy}{du} = 3u^2 = 3(x^2 - 2x + 3)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 3(x^2 - 2x + 3)^2 \cdot 2(x-1) \\ &= 6(x-1)(x^2 - 2x + 3)^2 \end{aligned}$$

وعمزید من التدریب فإن الطالب یمكنه إجراء عملية التفاضل بسهولة وبدون الحاجة إلى فرض قيمة  $U$

والمثال السابق یعتبر نموذج للطالب لكي یبدأ فی إجراء التفاضل بدون اللجوء لفرض قيمة لـ  $U$

إلا أننا یمكن مما سبق أن نستنتج التالي :-

[ تفاضل أى مقدار جبرى مرفوع لأس = الأس مضروباً فی المقدار الجبرى مرفوعاً (للأس - 1) ومضروباً فی تفاضل المقدار الجبرى ] .

وبذلك فإن المثال السابق یمكن حله مباشرة كالتالى :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3(x^2 - 2x + 3)^2 \times (2x-2) \\ &= 6(x-1)(x^2 - 2x + 3)^2 \end{aligned}$$

مثال (١١) :- أوجد المشتقة الأولى للدالة :-

$$y = (3x^2 - 2x + 5)^{3/2}$$

الحل :- یمكن الحل بدون فرض قيمة  $U$  ویكون الحل كالتالى :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} (3x^2 - 2x + 5)^{\frac{3}{2}-1} \times d.c. \text{ of } (3x^2 - 2x + 5)$$

d.c. ، هی اختصار لكلمة المعامل التفاضلى :- differential coefficient

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} (3x^2 - 2x + 5)^{\frac{1}{2}} \times (6x-2)$$

$$= 3(3x-1)(3x^2-2x+5)^{\frac{1}{2}}$$

مثال (١٢) :- أوجد المشتقة الأولى للدالة :-

$$y = (x^2 + 2) \times \sqrt[3]{(x^2 - 3)}$$

الحل :- واضح أن  $y$  عبارة عن حاصل ضرب مقدارين أو دالتين لذلك سنلجأ للقاعدة

$$\therefore \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2) \times \left[ d.c.of \sqrt[3]{(x^2 - 3)} \right] + \left[ \sqrt[3]{(x^2 - 3)} \right] \times \left[ d.c.of (x^2 + 2) \right] \dots\dots\dots (1)$$

ونعلم مما سبق أن  $\sqrt[3]{x^2 - 3}$  هو دالة في  $(x^2 - 3)$

،  $(x^2 - 3)$  دالة في  $x$  أى أن  $\sqrt[3]{x^2 - 3}$  هو دالة الدالة .

ومن الأفضل هنا إجراء تفاضلها منفصلاً ثم التعويض عنها بعد ذلك .

$$\therefore \frac{d}{dx} \sqrt[3]{(x^2 - 3)} = \frac{d}{dx} (x^2 - 3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} (x^2 - 3)^{-\frac{2}{3}} \times (2x) = \frac{2x}{3(x^2 - 3)^{\frac{2}{3}}}$$

وبالتعويض في (1) عن هذه القيمة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2) \times \frac{2x}{3(x^2 - 3)^{\frac{2}{3}}} + (x^2 - 3)^{\frac{1}{3}} \times 2x$$

$$= \frac{2x(x^2 + 2)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3)^2}} + 2x\sqrt[3]{(x^2 - 3)}$$

ويمكن اختصار هذه النتيجة لتصبح :-

$$\frac{2x(x^2 + 2)(x^2 - 3)^{\frac{1}{3}}}{3(x^2 - 3)} + \frac{2x(x^2 - 3)^{\frac{4}{3}}}{(x^2 - 3)} \times \frac{3}{3}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)^{\frac{1}{3}}[x^2+2+3(x^2-3)]}{3(x^2-3)} = \frac{2x\sqrt{(x^2-3)}(4x^2-7)}{3(x^2-3)}$$

مثال (١٣) :-

$$y = \frac{\sqrt{1+3x}}{4x}$$

أوجد المشتقة الأولى لهذه الدالة :

الحل :-

هذا المقدار على صورة دالة كسرية  $\left(\frac{u}{v}\right)$  حيث :-

$$u = 1+3x \quad , \quad v = 4x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x[d.c \text{ of } (1+3x)] - [(1+3x) \times d.c \text{ of } (4x)]}{(4x)^2}$$

وقد عرفنا أن  $\sqrt{1+3x}$  هو دالة في الدالة

$$\therefore \frac{d}{dx} (1+3x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (1+3x)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\left[ 4x \times \frac{3}{2\sqrt{1+3x}} \right] - \left[ \sqrt{1+3x} \times 4 \right]}{16x^2} = \frac{\frac{6x}{\sqrt{1+3x}} - 4\sqrt{1+3x}}{16x^2} \\ &= \frac{6x - 4(1+3x)}{16x^2 \sqrt{1+3x}} = \frac{-6x - 4}{16x^2 \sqrt{1+3x}} = -\frac{2+3x}{8x^2 \sqrt{1+3x}} \end{aligned}$$

## ٥-٦ :- تفاضل الدالة الضمنية :-

### Differentiation of implicit functions

علمنا من تعريف الدوال أن الدالة الضمنية هى الدالة التى تتضمن حدودها كل من  $x, y$  ولا يمكن فصل أى منهما عن الآخر

أى أنه لا يمكن وضع الحدود المشتملة على  $y$  فى طرف والحدود المحتوية على  $x$  فى الطرف الآخر .

ومثال ذلك ، الدوال التالية :-

$$x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 7 = 0$$

$$x \text{ Log } y + y^2 = 4xy$$

وفى هذه الحالة فإنه يلزم أن نفاضل حداً بعد حد فى جميع حدود المعادلة على أن لا

نسى أنه عند التفاضل بالنسبة إلى  $y$  ، أنها ذاتها (أى  $y$ ) دالة الدالة فى  $x$

مثال (١) :-

$$x^2 - y^2 + 3x = 5y$$

أوجد  $\frac{dy}{dx}$  من المعادلة التالية :

الحل :-

بالتفاضل :-

$$\therefore 2x - 2y \frac{dy}{dx} + 3 = 5 \frac{dy}{dx}$$

وبتجميع الحدود المشتملة على  $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} (2y + 5) = 2x + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3}{2y + 5}$$

وواضح أن بدلالة كل من  $x, y$  وبمعرفة قيم  $x, y$  فإن القيمة العددية للمقدار

$\frac{dy}{dx}$  ، يمكن حسابها :-

والمثال التالى يوضح ذلك :-



مثال (٢) :-

أوجد ميل المماس للمنحنى :  $x^2 + 3xy + y^2 = 6$  عند النقطة  $(3, -3)$

الحل :-

نقوم بإجراء التفاضل كما بالمثال السابق ويجب أن لا ننفل عن أن  $xy$  عبارة عن

حاصل ضرب

وبالتفاضل :

$$\therefore 2x + \left(3y + 3x \frac{dy}{dx}\right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} (3x + 2y) = -(2x + 3y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + 3y)}{(3x + 2y)}$$

وعند النقطة  $(3, -3)$  أى عندما  $x = 3$  ,  $y = -3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(2 \times 3 + 3 \times -3)}{(3 \times 3 + 2 \times -3)} = \frac{-(-3)}{(3)} = 1$$

$\therefore$  ميل المماس للمنحنى  $= 1$  وهو يصنع زاوية  $45^\circ$  مع الإتجاه الموجب لمحور السينات  
(X - axis)

Exercise "7"

احسب التفاضلات التالية :-

$$(3x+2)^2, (1-3x)^4, (2x+5)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{1}{(1-3x)}, (2-3x)^2, \sqrt{1-2x} \dots\dots\dots (2)$$

$$(x^2-3)^5, (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, \sqrt{2x^2-5} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{1}{(1-3x^2)}, \sqrt{1-3x^2}, x\sqrt{1-2x^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{1}{(4-x)}, \frac{1}{\sqrt{(4-x)}}, \frac{1}{(4-x)^2} \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{1}{(x^2-1)}, \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}, \sqrt{\frac{x}{(1-x)}}, \sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}} \dots\dots\dots (7)$$

$$x \times \sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}}, \sqrt[3]{(x^3+1)} \dots\dots\dots (8)$$

$$\sqrt{c^2+x^2}, \frac{1}{\sqrt{c^2+x^2}} \dots\dots\dots (9)$$

$$\sqrt{1-x+2x^2}, (1-3x^2)^n \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}, \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{\sqrt{1+4x}}{x} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{2x} \dots\dots\dots (13)$$

$$x^2 \times \sqrt{2-x}, \frac{1}{\sqrt{3x^2-5x+2}} \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}, x\sqrt{(3x+2)} \dots\dots\dots (١٥)$$

أوجد  $\frac{dy}{dx}$  من المعادلات الضمنية التالية :-

$$2x^2 + 5xy + 7y^2 = 7 \dots\dots\dots (١٦)$$

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0 \dots\dots\dots (١٧)$$

$$x^3 + y^3 = 3xy \dots\dots\dots (١٨)$$

$$x^n + y^n = a^n \dots\dots\dots (١٩)$$

(٢٠) أوجد الميل عند النقطة (1, 1) الذى يصنعه مماس المنحنى

$$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$$

## ٦-٦ :- التفاضل المتتالي : Successive differentiation

اتضح لنا مما سبق أن العامل التفاضلى لدالة ما فى  $x$  عبارة عن دالة فى  $x$  كذلك ما لم تكن الدالة الأصلية دالة خطية من الدرجة الأولى فمثلاً لو أن :

$$y = 5x^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 20x^3$$

وواضح أن  $20x^3$  هى دالة فى  $x$  كذلك والأخيرة يمكن تفاضلها بالنسبة إلى  $x$

$$\frac{d}{dx}(20x^3) = 60x^2$$

ويُطلق على  $60x^2$  لهذه الدالة ( $y = 5x^4$ ) بالمعامل التفاضلى الثانى أو المشتقة الثانية للدالة الأصلية، ويعبر عنها كالتالى :-

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ويستخدم الرمز  $\frac{d^2y}{dx^2}$  للتعبير عن المعامل التفاضلى الثانى ويجب مراعاة أن (2) فى

الرمز  $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$  ، فى كل من البسط والمقام ليستا أساً ولكنها تعنى أن الدالة الأصلية  $y$

قد تم تفاضلها مرتين وفى كل مرة منهما ، بالنسبة إلى  $x$

وبذلك فإن  $\frac{d^2y}{dx^2}$  تقيس المعدل الذى تتغير به  $\frac{dy}{dx}$  بالنسبة إلى  $x$  ، تماماً مثلما تُعبر

عن معدل تغير  $y$  بالنسبة إلى  $x$

والمعامل التفاضلى الثانى ، هو دالة فى  $x$  ، إذا لم تكن  $\frac{dy}{dx}$  دالة خطية أو ثابت

كما أنه يمكننا أن نفاضل  $\frac{d^2y}{dx^2}$  بالنسبة إلى  $x$  ويُعرف الناتج بالمعامل التفاضلى الثالث

لـ  $y$  بالنسبة إلى  $x$  ويرمز لها بالرمز  $\frac{d^3y}{dx^3}$  . وبذلك فإنه يمكننا الإستمرار فى عمليات

تفاضل متتالية إلى أن يُصبح أحد معاملات التفاضل ، رقماً ثابتاً

وبذلك فإنه فى مثالنا السابق :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 60x^2, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 120x, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 120$$

أى أنه لا يمكننا إيجاد أكثر من المعامل التفاضلى الرابع للمثال المذكور .

فإذا اعتبرنا أن  $y = x^n$

فإنه بالتفاضل المتتالى بالنسبة إلى  $x$  نحصل على :-

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

فإذا كانت  $n$  عدد صحيح موجب فإن هذه العملية يُمكن أن تستمر حتى نصل إلى

$(n-n)$  ، مساوية لقوة  $x$

$$n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$$

ويصبح المعامل التفاضلى

أى يُصبح عبارة عن مضروب  $n$  " Factorial  $n$  أو  $n!$  " ويكون التفاضل التالى هو الصفر .

أما إذا كانت  $n$  عدداً ليس صحيحاً موجباً فإن العملية يمكنها أن تستمر بدون نهاية .

ويتضح ذلك من المثال التالى :-

$$y = x^3 - 5x^2 + 2x - 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 10$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

### Alternative notation For differential Coefficients

يطلق كذلك على المعاملات التفاضلية المتتالية بالمشتقات أو بالدوال المشتقة للدالة الأصلية

ويمكن التعبير بالرموز التالية : -

(١) عند استخدام رمز الدالة :  $f(x)$  or  $\Phi(x)$  ، فإذا كانت  $f(x)$  أو  $\Phi(x)$  ترمز لدالة في  $x$

ترمز للمعامل التفاضلي الأول  $\therefore f'(x)$  or  $\Phi'(x)$   
 ترمز للمعامل التفاضلي الثاني  $f''(x)$  or  $\Phi''(x)$   
 ترمز للمعامل التفاضلي الثالث  $f'''(x)$  or  $\Phi'''(x)$   
 ترمز للمعامل التفاضلي الرابع  $f^{IV}(x)$  or  $\Phi^{IV}(x)$   
 ..... وهكذا .

(٢) عند استخدام  $y$  كرمز للدالة في  $x$

المعامل التفاضلي الأول  $\therefore y_1 =$   
 المعامل التفاضلي الثاني  $y_2 =$   
 المعامل التفاضلي الثالث  $y_3 =$

..... وهكذا .

أو قد نستخدم الرموز  $y^{IV}, y''', y'', y'$  ، أحياناً .

### ٦- ٨ : - منحنيات الاشتقاق Derived curves

اتضح لنا مما سبق أن التفاضل المتتالي لدالة في  $x$  ينتج عنه مجموعة من المشتقات ، كل منها دالة في  $x$

ويمكننا تمثيل هذه المشتقات بمنحنياتها حيث تنشأ منها علاقات محددة .

$$y = x^2 - 4x + 3$$

ولنعتبر الدالة : -

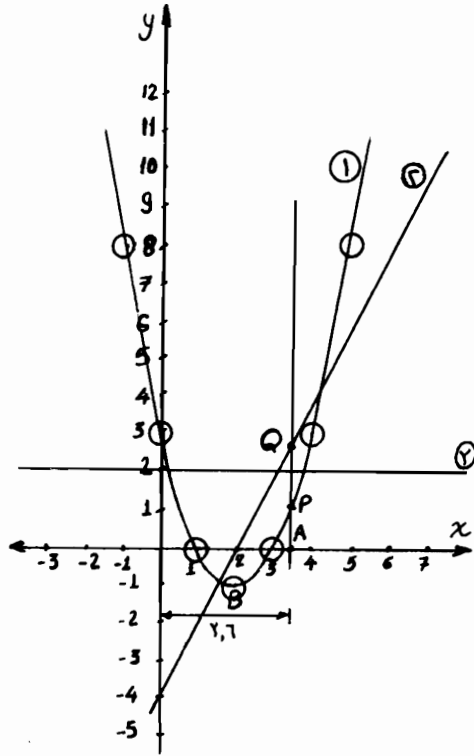
$$\therefore y_1 = 2x - 4 \quad , \quad y_2 = 2$$

ويوضح الشكل (٦-١) المنحنيات التالية :-

$$1) y = x^2 - 4x + 3$$

$$2) y_1 = 2x - 4$$

$$3) y_2 = 2$$



شكل (٦ - ١)

ويمكن ملاحظة العلاقات التالية بين المنحنى الأصلي ومشتقيه :-

(١) تعطى  $y_1$  وهى دالة المشتقة الأولى ، معدل زيادة  $y$  بالنسبة إلى  $x$  ، وقيمتها عند

أى قيمة نختارها لـ  $x$  ، تساوى الميل عند النقطة المناظرة على المنحنى

فإذا أخذنا أى نقطة ولتكن  $A$  على المحور  $OX$  بحيث أن  $x=3.6$  ثم نرسم الخط

الرأسى المار بـ  $A$  فيقطع المنحنى فى  $P$  ويقطع الخط المستقيم  $[y_1 = 2x - 4]$  فى  $Q$

وبذلك فإن قيمة الإحداثى الرأسى  $QA$  تكون مساوية لميل المنحنى عند  $P$  ، وواضح

من الرسم أنها حوالى 3.2 وحدة .

وبالحساب والتعويض عن قيمة  $x=3.6$  فى المعادلة  $[y_1 = 2x - 4]$

فإن المعامل التفاضلى الأول يساوى :-

$$(2 \times 3.6 - 4) = 7.2$$

(٢) والرسم الذى يمثله  $y_2$  أو التفاضل الثانى  $y_2 = 2$  عبارة عن خط مستقيم موازياً لـ  $OX$  حيث تكون قيمة الإحداثى الصادى لأى نقطة عليه ثابتة وهو يوضح أن ميل  $y_1 = 2x - 4$  ، رقم ثابت يساوى 2

(٣) وعند أسفل نقطة على المنحنى وهى نقطة  $B$  [ المنحنى :  $y = (x^2 - 4x + 3)$  ] فإن الإحداثى الصادى ( الرأسى ) عند النقطة المرادفة لـ  $B$  على المنحنى الممثل للتفاضل الأول  $y_1 = 2x - 4$  تكون مساوية للصفر حيث أن  $y_1 = 2x - 4$  يقطع محور  $OX$  عند هذه النقطة .

وبذلك فإن ميل الدالة الأصلية يساوى الصفر عندما  $x = 2$  والمماس المرسوم للمنحنى عند  $B$  يكون موازياً لمحور السينات  $OX$

(٤) لقيم  $x$  الأقل من 2 فإن الدالة  $x^2 - 4x + 3$  تتناقص بينما قيم الدوال المشتقة تكون سالبة

ولقيم  $x$  الأكبر من 2 فإن الدالة  $x^2 - 4x + 3$  تتزايد وتكون الدالة  $2x - 4$  موجبة .

مسائل متنوعة محلولة : -

$$y = \frac{(x^2 + 2x)^5}{(x^4 + 3x - 1)^2} \quad (١) \text{ أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ إذا كانت :}$$

الحل :-

يمكن حل هذه المسألة كحاصل قسمة أو كحاصل ضرب كالتالى :-

$$y = (x^2 + 2x)^5 \times (x^4 + 3x - 1)^{-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2x)^5 \times -2(x^4 + 3x - 1)^{-3} + (x^4 + 3x - 1)^{-2} \times 5 \times (x^2 + 2x)^4 \times (2x + 2)$$

ويمكن إختصار هذه الإجابة إلى أبسط صورة .

(٢) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = (x^3 - 6)^5$$

بالنسبة إلى  $x$



الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 5(x^3 - 6)^4 \times \frac{d}{dx}(x^3 - 6) = 5(x^3 - 6)^4 \times 3x^2 = 15x^2(x^3 - 6)^4$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا ما فككنا القوس المرفوع للأس 5 وأوجدنا المشتقة المطلوبة كحاصل جمع جبرى للحدود .

(٣) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = (3x^2 + 2x)^{12}$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 12(3x^2 + 2x)^{11} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 2x) = 12(3x^2 + 2x)^{11} \times (6x + 2).$$

(٤) أوجد مشتقة الدالة :-

$$u = \sqrt[4]{\frac{1}{y^5}} = y^{-\frac{5}{4}}$$

الحل :-

نضع الدالة فى الصورة الأسية بدلاً من الصورة الجذرية

$$\therefore u = y^{-\frac{5}{4}}$$

$$\therefore \frac{du}{dy} = \frac{-5}{4} y^{-\frac{5}{4}-1} = \frac{-5}{4} y^{-\frac{9}{4}} = \frac{-5}{4} \sqrt[4]{\frac{1}{y^9}}$$

$$f(x) = 3\sqrt[6]{x^5}$$

(٥) أوجد  $f'(x)$  للدالة :

الحل :-

$$f(x) = 3x^{\frac{5}{6}}$$

$$\therefore f'(x) = 3 \times \frac{5}{6} \times x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{2} x^{-\frac{1}{6}} = \frac{5}{2} \sqrt[6]{\frac{1}{y}}$$

(٦) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = \frac{ax^n - 5}{b}$$

الحل :-

$$y = \frac{a}{b}x^n - \frac{5}{b}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{an}{b}x^{n-1} - 0 = \frac{an}{b}x^{n-1}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بكتابة :

$$y = \frac{1}{b}(ax^n - 5)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \cdot nax^{n-1} = \frac{an}{b}x^{n-1}$$

(٧) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = \sqrt[a]{\frac{1}{x^b}}$$

الحل :- يمكن كتابة  $y$  هكذا :

$$y = x^{-\frac{b}{a}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-b}{a}x^{-\frac{b}{a}-1} = \frac{-b}{a}x^{-\left(\frac{b+a}{a}\right)}$$

(٨) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = \sqrt{3x^3 - 5x + 2}$$

الحل :- يمكن كتابة الدالة  $y$  هكذا :-

$$y = (3x^3 - 5x + 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x^3 - 5x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(3x^3 - 5x + 2)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3x^3 - 5x + 2}} \times (9x^2 - 5) = \frac{9x^2 - 5}{2\sqrt{3x^3 - 5x + 2}}$$

$$y = \sqrt{2x^3 + 3x}$$

(٩) أوجد مشتقة الدالة :

الحل :-

$$u = 2x^3 + 3x \quad \text{نضع}$$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore u = 2x^3 + 3x \quad \therefore \frac{du}{dx} = 6x^2 + 3$$

$$\therefore y = u^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + 3x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x^3 + 3x}} \times (6x^2 + 3)$$

ويمكن الحصول على الإجابة بسهولة وذلك بتربيع كل من الطرفين ثم نوجد مشتقة كل طرف بالنسبة إلى  $x$  :

$$\therefore y = \sqrt{2x^3 + 3x}$$

$$\therefore y^2 = 2x^3 + 3x$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(6x^2 + 3)}{2y} = \frac{(6x^2 + 3)}{2\sqrt{2x^3 + 3x}}$$

$$S = \sqrt[3]{(6-t)}$$

(١٠) أوجد مشتقة الدالة : -

الحل :- نُحول الجذر إلى أُس كسرى

$$\therefore S = (6-t)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3}(6-t)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{d}{dt}(6-t)$$

$$= \frac{1}{3}(6-t)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-1) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(6-t)^2}}$$

$$f(t) = \sqrt[3]{2t^3 + 4t - 3}$$

(١١) إذا كانت

فأوجد  $f'(t)$

الحل :-

$$f'(t) = \frac{df}{dt}$$

، نقوم بتحويل الجذر إلى أُس كسرى ،

$$\therefore f(t) = (2t^3 + 4t - 3)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(t) &= \frac{1}{3}(2t^3 + 4t - 3)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{d}{dt}(2t^3 + 4t - 3) \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(2t^3 + 4t - 3)^2}} \times (6t^2 + 4) \end{aligned}$$

(١٢) أوجد المشتقة الأولى للدالة :

$$y = \frac{1}{2x^3 - 3x^2 + 5x + 6}$$

الحل :-

$$y = (2x^3 - 3x^2 + 5x + 6)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= -1(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6)^{-2} (6x^2 - 6x + 5) \\ &= \frac{-6x^2 + 6x - 5}{(2x^3 - 3x^2 + 5x + 6)^2} \end{aligned}$$

$$y = x^3 - 3\sqrt{2x^2 + 5}$$

(١٣) إذا كانت :

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{فأوجد}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3) - 3 \frac{d}{dx} \sqrt{2x^2 + 5} \\ &= 3x^2 - 3 \times \frac{2x\sqrt{2x^2 + 5}}{2x^2 + 5} = 3x^2 - \frac{6x\sqrt{2x^2 + 5}}{2x^2 + 5} \end{aligned}$$

حيث :-

$$\frac{d}{dx} \sqrt{2x^2 + 5} = \frac{d}{dx} (2x^2 + 5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 5}} \times 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 5}}$$

(١٤) أوجد مشتقة الدالة :-

$$y = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

الحل :- يمكن كتابة الدالة في الصورة الأسية كالتالى :-

$$y = 2 + 3x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{5}{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{x^3}} + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x^5}}$$

$$y = x^7$$

(١٥) أوجد المشتقة السابعة للدالة :

الحل :-

$$7x^6$$

المشتقة الأولى :

$$7 \times 6x^5$$

المشتقة الثانية :

$$7 \times 6 \times 5 x^4$$

المشتقة الثالثة :

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 x^3$$

المشتقة الرابعة :

$$840 \times 3 x^2$$

المشتقة الخامسة :

$$2520 \times 2 x$$

المشتقة السادسة :

$$5040$$

المشتقة السابعة :

وواضح أن المشتقة الثامنة = صفر ولذلك فإن الدالة  $y = x^7$  ، لها ثمانية مشتقات .

$$y = (x^2 - 5x)(3x + 2)$$

(١٦) أوجد مشتقة الدالة :

الحل :-

$$d(u.v) = u.dv + v.du.$$

نستخدم النظرية :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x^2 - 5x)(3) + (3x + 2)(2x - 5)$$

$$= 3x^2 - 15x + 6x^2 - 15x + 4x - 10$$

$$= 9x^2 - 26x - 10$$

$$y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{2x^2 - 1}}$$

(١٧) أوجد تفاضل الدالة :-

الحل :-

نحول الصورة الجذرية إلى صورة أسية وهي تسمح لنا بتطبيق النظرية كالتالي :-

$$\therefore y = x^3(2x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}$$

وهي عبارة عن حاصل ضرب مقدارين

$$\begin{aligned}u &= x^3, \quad V = (2x^2 - 1)^{\frac{-1}{3}} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \\ &= x^3 \cdot \frac{-1}{3} (2x^2 - 1)^{\frac{-4}{3}} \cdot 4x + (2x^2 - 1)^{\frac{-1}{3}} \cdot 3x^2 \\ &= x^2 (2x^2 - 1)^{\frac{-4}{3}} \left[ \frac{-4x^2 + 9(2x^2 - 1)}{3} \right] \\ &= \frac{x^2}{3} (2x^2 - 1)^{\frac{-4}{3}} [14x^2 - 9] \\ &= \frac{x^2 [14x^2 - 9]}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 1)}}\end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(١٨) أوجد تفاضل الدالة :

الحل :-

يمكن حل هذه المسألة بكتابتها في الصورة :

$$x = (1+y^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$u = 1+y^2$$

ثم نضع

$$\therefore x = u^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{du} = \frac{-1}{2} u^{\frac{-3}{2}}$$

$$\because u = 1+y^2 \quad \therefore \frac{du}{dy} = 2y$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dy} = \frac{-1}{2} u^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y \\ &= \frac{-1}{2} (1+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y \\ &= \frac{-y}{\sqrt{(1+y^2)^3}} \end{aligned}$$

ويمكن حل هذه المسألة بتربيع الطرفين حيث نحصل على دالة ضمنية فى كل من  $x, y$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\therefore x^2 + x^2 y^2 = 1$$

ثم نجرى التفاضل كالمعتاد بالنسبة إلى  $x$  ولا ننسى أن  $y$  دالة فى  $x$  وأن  $x, y$  مقدارين مضروبين فى بعضهما وكذلك  $x^2 \cdot y^2$  :

$$\therefore 2x + \left[ x^2 \left( 2y \frac{dy}{dx} \right) + y^2 \cdot (2x) \right] = 0$$

$$\therefore 2x + 2x^2 y \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$$

$$\therefore 2x^2 y \frac{dy}{dx} = -2x - 2xy^2 = -2x(1+y^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x(1+y^2)}{2x^2 y} = \frac{-(1+y^2)}{xy}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{-xy}{(1+y^2)} = \frac{-1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{y}{(1+y^2)}$$

$$= \frac{-y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}$$

$$y = \frac{9x^2}{3x-2} - (x-3)(3x-1)$$

(١٩) أوجد تفاضل الدالة : -

**الحل :-** في هذه المسألة ، نستخدم قاعدة القسمة للحد الأول وحاصل الضرب للحد الثاني ، هكذا :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(3x-2)(18x) - 9x^2(3)}{(3x-2)^2} - [(x-3)(3) + (3x-1)(1)] \\ &= \frac{54x^2 - 36x - 27x^2}{(3x-2)^2} - (3x - 9 + 3x - 1) \\ &= \frac{27x^2 - 36x}{(3x-2)^2} - (6x - 10)\end{aligned}$$

وبتوحيد المقامات :-

$$= \frac{27x^2 - 36x - (6x - 10)(3x - 2)^2}{(3x - 2)^2}$$

ويمكن إختصار هذه النتيجة .

$$y = \left[ \sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right]^5$$

(٢٠) أوجد  $\frac{dy}{dx}$  للدالة :

**الحل :-**

$$\frac{dy}{dx} = 5 \left[ \sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right]^4 \times d.c.of \left[ \sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right]$$

$$d.c.of \left[ \sqrt{x-2} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right] = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \times 1 - \frac{1}{\sqrt{(x-2)^3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \left[ \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2} + 2}{\sqrt{x-2}} \right]^4 \left[ \frac{(x-2) - 2}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= 5 \left[ \frac{x-2+2}{\sqrt{x-2}} \right]^4 \left[ \frac{x-4}{2(x-2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= \frac{5x^4}{2(x-2)^2} \frac{(x-4)}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{5x^4(x-4)}{2(x-2)^{\frac{7}{2}}}$$



(٢١) أوجد المشتقة الأولى للدالة :-

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

الحل :- نضع الدالة في الصورة الأسية كالتالى :-

$$y = \left\{ x + \left[ x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

وهنا يلزم إجراء عملية تفاضل متسلسل ( بالتتابع ) chain rule

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \left\{ x + \left[ x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ x + \left[ x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x + \left[ x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx} \left[ x + (x)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x + \left[ x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ x + (x)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \times \left[ 1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \\ &= \left[ \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \right] \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \times \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$y = (x^2 + 2x + 1)^3$$

(٢٢) إذا كانت

$$x = 3t^2 + 2t - 1$$

وكانت :-

$$\frac{dy}{dt} \quad \text{فأوجد}$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 2x + 1)^2 \cdot (2x + 2) = 6(x + 1)(x^2 + 2x + 1)^2$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 6t + 2 = 2(3t + 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dt} &= 6(x+1)(x^2 + 2x + 1)^2 \times 2(3t+1) \\ &= 12(x+1)(x^2 + 2x + 1)^2 (3t+1) \end{aligned}$$

(٢٣) أوجد المشتقة النونية للدالة :-

$$y = \frac{1}{2x+3}$$

الحل :-

$$y = (2x+3)^{-1}$$

$$y' = -1(2x+3)^{-2} \times 2 = -2(2x+3)^{-2} \quad \text{- والمشتقة الأولى :}$$

$$y'' = 4(2x+3)^{-3} \times 2 = 8(2x+3)^{-3} \quad \text{- والمشتقة الثانية :}$$

$$y''' = -24(2x+3)^{-4} \times 2 = -48(2x+3)^{-4} \quad \text{- والمشتقة الثالثة :}$$

$$y^{IV} = 192(2x+3)^{-5} \times 2 = 384(2x+3)^{-5} \quad \text{- والمشتقة الرابعة :}$$

ولإيجاد المشتقة النونية يُلاحظ مايلي :-

(١) أن المشتقات تبادلية الإشارة أى أنها مرة موجبة والأخرى سالبة وأن ترتيب المشتقات (الأولى ، والثالثة ، والخامسة ، ..... ) عندما يكون فردياً فإن قيمة المشتقة تكون سالبة . وعندما يكون ترتيبها زوجياً فإن قيمة المشتقة موجبة

وبذلك فإنه يمكن التعبير عن الخاصية السابقة للمشتقة النونية بأنها  $(-1)^n$  فمثلاً عندما

$$n=3 \text{ وهى فردية فإن الإشارة تُصبح سالبة : } (-1)^3 = -1$$

(٢) معامل المشتقة كالتالى (بإهمال الإشارات) :

$$2, 8, 48, 384, \dots\dots\dots$$

$$2 = 2^1 \cdot 1! = 2^n \times n! \quad \text{المشتقة الأولى [عندما } n=1 \text{]:}$$

$$8 = 2^2 \cdot 2! = 2^n \times n! \quad \text{المشتقة الثانية [عندما } n=2 \text{]:}$$

$$48 = 2^3 \cdot 3! = 2^n \times n! \quad \text{المشتقة الثالثة [عندما } n=3 \text{]:}$$

$$384 = 2^4 \cdot 4! = 2^n \times n! \quad \text{المشتقة الرابعة [عندما } n=4 \text{]:}$$

(٣) عند أخذ قوة أو أس المقدار  $(2x+3)$  في الإعتبار :-

$$(2x+3)^{-2} = \frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{1}{(2x+3)^{n+1}} \quad : n=1, \text{ المشتقة الأولى}$$

$$(2x+3)^{-3} = \frac{1}{(2x+3)^3} = \frac{1}{(2x+3)^{n+1}} \quad : n=2, \text{ المشتقة الثانية}$$

$$(2x+3)^{-4} = \frac{1}{(2x+3)^4} = \frac{1}{(2x+3)^{n+1}} \quad : n=3, \text{ المشتقة الثالثة}$$

$$(2x+3)^{-5} = \frac{1}{(2x+3)^5} = \frac{1}{(2x+3)^{n+1}} \quad : n=4, \text{ المشتقة الرابعة}$$

ومما سبق سنجد أن المشتقة النونية للمقدار  $\frac{1}{2x+3}$  هي :-

$$f^n(x) = (-1)^n \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2x+3)^{n+1}}$$

مثال :-

المشتقة الثالثة للمقدار ذاته تساوى :

$$\begin{aligned} f^3(x) &= (-1)^3 \cdot \frac{2^3 \cdot 3!}{(2x+3)^{3+1}} = \frac{-1 \times 8 \times (3 \times 2 \times 1)}{(2x+3)^4} \\ &= \frac{-48}{(2x+3)^4} \end{aligned}$$

### Exercise "8"

اكتب المشتقة الأولى والثانية والثالثة للدوال الآتية في  $x$  :

$$x^2 (2x-3) \dots\dots\dots (1)$$

$$x^{2a} \dots\dots\dots (2)$$

$$3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \dots\dots\dots (3)$$

$$2x^5 - 3x^3 + 4x - 1 \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{1}{x} \dots\dots\dots (5)$$

$$\sqrt{x} \dots\dots\dots (6)$$

$$\sqrt{2x+1} \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{1}{x^2} \dots\dots\dots (8)$$

(9) أوجد المعامل التفاضلي من الرتبة " $n$ " للمقدار  $\frac{1}{a^2 - x^2}$

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] \quad \text{ملحوظة :}$$

$$f(x) = 6x^2 - 5x + 3 \quad (10) \text{ إذا كانت :-}$$

فأوجد  $f'(0)$  وما هي قيمة  $x$  التي تجعل  $f'(0) = 0$  وما هي النقطة المناظرة على المنحنى  $f(x)$ .

(11) أوجد قيمة  $x$  التي يكون عندها ميل المنحنى :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + 1$$

مساوياً للصفر وما هي قيمة  $x$  التي يكون عندها ميل  $f'(x)$  مساوياً للصفر وما هي قيمة  $f'(x)$  المناظرة .

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7 \quad (12) \text{ إذا كانت :}$$

فأوجد  $f'(1)$  ،  $f''(2)$  وعند أي قيمة لـ  $x$  تتلاشى قيمة  $f'(x)$ .