الباب الخامس

المعامل التفاضلى ،والتفاضل

Differential Coefficient , Differential

٥ - ١ : - تقديم

علمنا مما سبق أن التغير Δx فى المتغير المستقل x يناظره تغير Δy فى المتغير التابع y .

وأن معدل التغير = $\frac{y \text{ قيمةالتغير فى}}{x \text{ قيمةالتغير فى}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

وأن قيمة الدالة تتغير بتغير المتغير المستقل بها .

ومعدل التغير له أهمية تطبيقية كبيرة ولذلك يجب الإلمام بطرق حسابه .

كما وأن معدل التغير سواء كان بالزيادة أو النقصان ، يمكن حسابه هندسياً كما يلى:-

أ) عندما تكون الدالة من الدرجة الأولى ، فإن مثل هذه الدوال يكون تمثيلها بيانيـاً بخـط مستقيم ويكون ميل هذا الخط مساوياً لمعدل تغير الدالة .

فإذا كانت y دالة فى x ، Δx ، Δy هو مقـدار التغيـر فـى x ، y فـإن الميـل يكـون مساوياً لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ويكون ثابتاً على طول الخط المستقيم ويكون معدل التغير مُنتظماً .

ب) إذا لم تكن الدالة من الدرجة الأولى فإن رسمها البيانى يكـون علـى شـكل منحنـى ويكون معدل تغير الدالة مختلفاً على طول المنحنى وتكون قيمته عنـد أى نقطـة مسـاوية لميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة .

وبالرغم من أن الرسم يساعد كثيراً فى إيضاح الموضوع ، إلا أنه من الناحية العملية ، يصعب إيجاد الميل بهذه الطريقة لعدم توفر الدقة التامة .

ولذلك كان لزاماً من استنباط طريقة جبرية لهذه الحالة .

ولنأخذ مثالنا السابق : (1) .... $y = x^2$

(2) .... $y+\Delta y = (x+\Delta x)^2$ ،

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2$$
$$= 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \qquad \text{..........} \ (3)$$

وقد رأينا من رسم الدالة ، أنه عندما تقترب Δx من الصفر فإن ميل الوتر والذى يُمثل معدل الزيادة فى الدالة خلال الفترة Δx ، يقترب تدريجياً من ميل المماس عند النقطة المعينة .

وبذلك فإن ميل المماس والذى يمكن تمثيله بـ : - $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، يكون مساوياً لمعدل زيادة الدالة عند النقطة x المعينة ، ومن الدالة (3) : -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \qquad \text{..........} \ (3)$$

وعندما $\Delta x \to 0$ فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من $2x$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \qquad \text{..........} \ (4)$$

أى أنه عندما $\Delta x \to 0$ فإن نهاية $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، تُمثل معدل الزيادة فى y بالنسبة لـ x لأى قيمة لـ x

فمثلاً عندما $x = 1$ فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ وهذا يعنى أن معدل الزيادة فى y أو فى x^2 بالنسبة إلى $x = 2$.

وعند $x = 2$ فإن : -

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$$

وعند $x = 3$ فإن : -

$$Lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$$

وبذلك فإنه يمكن كتابة المعادلة B كالتالى : -

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

ويُستغنى عن هذا التعبير رياضياً بكتابته $\frac{dy}{dx}$.

أى أن الاصطلاح $\frac{dy}{dx}$ بدلاً من كتابة $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ حيث يتم استخدام الحرف الأبجدى الإنجليزى d بدلاً من الحرف الأبجدى اليونانى δ [دلتا δ Greek]

وبذلك فإن المعادلة (4) تُصبح :

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

ويُطلق على هذه النهاية أو على $\frac{dy}{dx}$ بالمعامل التفاضلى differential Coefficient للدالة بالنسبة إلى المتغير المستقل x

وبنفس الطريقة يمكن حساب المعامل التفاضلى لأى دالة أُخرى ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلى : -

(١) إذا كانت y دالة متصلة فى x وكانت Δx تعادل مقدار التغير فى قيمة x فإنه يكون هنالك تغير مناظر زيادة أو نقصان فى قيمة الدالة y ويُعادل Δy .

(٢) تُمثل النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ معدل التغير فى y بالنسبة إلى x عندما تزيد x إلى $x + \Delta x$.

(٣) حيث أن y دالة متصلة فى x فإنه عندما تصغر Δx بدون حد ، فإن Δy تصغر كذلك بدون حد .

(٤) عندما $\Delta x \to 0$ فإن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تقترب من نهاية محددة .

ويُطلق على هذه النهاية المحددة بالمعامل التفاضلى لـ y بالنسبة إلى x ويرمز له بالرمز $\frac{dy}{dx}$ أى : -

$$i.e. \; \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

ويهتم حساب التفاضل أساساً بالتغيرات فى الدوال ويمكننا إعتبار المعامل التفاضلى كمقياس لمعدل هذه التغيرات .

فهو يقيس المعدل الذى تتغير به قيمة الدالة مقارنة بالمتغير المستقل بالدالة .

فالدالة $y = x^2$ يكون المعامل التفاضلى لها : $\frac{dy}{dx} = 2x$

فعند $x = 4$ فإن y أو x^2 تتغير قيمتها بمقدار ثمانية أضعاف معدل التغير فى x

$[2x = 2 \times 4 = 8]$

والعامل التفاضلى $\frac{dy}{dx}$ يُطلق عليه أيضاً بمشتقة y $(derivative\ of\ y)$ بالنسبة إلى x أو بالدالة المشتقة (derived function) .

ويستخدم أحيانا الرمز $y`$ بدلاً من $\frac{dy}{dx}$

وبذلك فإنه إذا كانت $y = x^2$ فإن $y` = 2x$

وإذا كانت الدالة $y = f(x)$ فإن معاملها التفاضلى يرمز له بالرمز $y`$ أو $f`(x)$.

وإذا كانت u دالة فى V أى $u = f(V)$ فإن المعامل التفاضلى لـ u بالنسبة إلى V يكتب $u`$ أو $f`(v)$ أو $\frac{du}{dv}$ والتفاضل ، هو عملية إيجاد المعامل التفاضلى أو مشتقة الدالة .

ويمكن استخدام الرمز $\frac{d}{dx}$ بمعنى الرغبة فى إجراء أو إيجاد عملية التفاضل فى الدالة بالنسبة إلى x .

وبذلك فإن تفاضل x^2 بالنسبة إلى x يمكن التعبير عنه بالرموز التالية : -

$$\frac{d(x^2)}{dx} or \frac{d}{dx}(x^2)$$

وعموماً فإن تفاضل $f(x)$ بالنسبة إلى (x) يمكن التعبير عنه بالرموز : -

$$\frac{d\,f(x)}{dx}\ or\ \frac{d}{dx}[f(x)]$$

ويمكن التعبير عنها كذلك بالرموز : Dy أو $D_x y$

ويستخدم الرمز Dy عندما يكون معروفاً أن x هو المتغير المستقل وعندما نقول أن :

$\frac{dy}{dx} = 2x$ للدالة : $y = x^2$

فإن هذا يعنى أن نسبة تفاضل y إلى تفاضل x يساوى $2x$ أو أن تفاضل y يساوى ($2x$ مرة) تفاضل x

ويمكن التعبير عن هذا بالمعادلة : -

$$dy = 2x\,.dx$$

وفى الصورة الأخيرة تظهر $2x$ كمعامل لتفاضل x ومن هنا ظهر التعبير (المعامل التفاضلى) .

ولا يجب أن نتعامل مع $\frac{dy}{dx}$ كما لو كان كسراً ، بسطه dy ومقامه dx أى أن المشتقة ليست نسبة وإن كانت على شكل كسر وإنما هى رمز واحد لا يتجزأ أو بمعنى نهاية نسبة .

$$\therefore \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

٥ - ٢ المعامل التفاضلى للمقدار الثابت

حيث أن المعامل التفاضلى ، يقيس معدل التغير للمتغير فى الدالة ، وحيث أن المقدار الثابت ليس به تغير .

فإن المعامل التفاضلى للمقدار الثابت = صفر

$$\therefore \frac{dy}{dx}(C) = 0 \quad , \quad C = \text{Constant}$$ ثابت

٥ -٣ : - تفاضل الدالة $y = mx + b$: -

هذه الدالة هى الصورة العامة للدالة من الدرجة الأولى ورسمها يكون على شكل خط مستقيم وبذلك فإن الميل يكون ثابتاً ، ويمكن إيضاح ذلك جبرياً من المبادئ الأولية كما يلى : -

لنفرض أن الزيادة فى x = Δx

وأن الزيادة المناظرة فى y = Δy

وبالتعويض فى المعادلة : $y = mx + b$ .... (1)

$$\therefore y + \Delta y = m(x + \Delta x) + b \quad \text{..........} \quad (2)$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = m(\delta x)$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

وهذا صحيح لكل قيم Δx

وحيث أن m مقدار ثابت

$$\therefore \frac{dy}{dx} = m$$

ويجب ملاحظة أن $\frac{dy}{dx}$ لا تعتمد على b

وعند إختلاف قيم b فإن المعادلة تبقى خط مستقيم أو مجموعة خطوط مستقيمة متوازية ولها نفس الميل m

٥ – ٤ : – تفاضل الدالة $y = x^3$:–

وسوف نقوم بإيجاد المعامل التفاضلى الأول لهذه الدالة من المبادئ الأولية (طريقة Δ):–

فإذا فرضنا أن التغير فى $x = \Delta x$

، فإذا افترضنا أن المناظر فى $y = \Delta y$

وبالتعويض فى المعادلة $y = x^3$

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$$
$$= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

وبالطرح : –

$$\therefore \Delta y = 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 \quad , \quad \Delta x \neq 0$$

وعندما تقترب Δx من الصفر ، يقترب كل من : –

$3x \,.\, (\Delta x)$ ، $(\Delta x)^2$ من الصفر

$$\therefore \underset{\Delta x \to o}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

$$i.e \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

٥ – ٥ : – تفاضل الدالة $y = x^4$:-

بنفس الطريقة السابقة فإننا نصل إلى أن : –

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x^3 + 6x^2.(\Delta x) + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x^3 \text{ ،}$$

ويلاحظ مما سبق أن أى دالة فى الصورة : $y = x^n$

يمكن التعامل معها بنفس الطريقة السابقة أى من المبادئ الأولية (طريقة Δ) .

وواضح من مفكوك $(x + \Delta x)^n$ أن المعامل التفاضلى هو الحد الثانى فى المفكوك .

فمثلاً : – إذا كانت $y = x^5$ فإن $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

وإذا كانت $y = x^6$ فإن : $\frac{dy}{dx} = 6x^5$

وعلى العموم ، إذا كانت x عدد صحيح موجب ، $y = x^n$ $\therefore \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

وسنثبت هذا فيما يلى : –

نفترض أن : $y = x^n$

، Δx = التغير فى x

، Δy = التغير المناظر فى y

وبالتعويض :

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$

وبفك الطرف الأيمن بنظرية ذات الحدين :

$$\therefore y + \Delta y = x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.x^{n-2}.(\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}.x^{n-3}.(\Delta x)^3 + ...$$

وبالطرح :

$$\therefore \Delta y = nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}.(\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}.x^{n-3}.(\Delta x)^3 + \ldots\ldots$$

وبالقسمة على Δx : -

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}.(\Delta x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}.x^{n-3}(\Delta x)^2$$

فعند اقتراب Δx من الصفر فإن كل الحدود بالطرف الأيمن إبتداء من الحد الثانى (بعد الحد الأول) تقترب من الصفر .

$$\therefore \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

$$i.e \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

وهذا صحيح لجميع قيم n السالبة والموجبة والكسرية ويمكن التأكد من ذلك بإيجاد المعامل التفاضلى للدالة $y = x^n$ بعدة طرق أُخرى بخلاف الطريقة المتضمنة مفكوك ذات الحدين .

وعليه فإنه لجميع قيم n :

$$\therefore \frac{dy}{dx}(x^n) = n.x^{n-1}$$

٥ – ٦ تفاضل الدالة $y = ax^n$

حيث a مقدار ثابت

$$\because y = ax^n$$

$$\therefore y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n$$

$$= a\left\{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots\right\}$$

وبالطرح : -

$$\therefore \Delta y = a\left\{n.x^{n-1}.(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.x^{n-2}(\Delta x)^2 + ...\right\}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\left\{n.x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}.x^{n-2}.(\Delta x) + ...\right\}$$

وعندما تقترب Δx من الصفر

$$\therefore \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.n.x^{n-1}$$

ومن هذا نجد أن الثابت a فى الدالة الأصلية يبقى كما هو ولكن مضروباً فى المعامل التفاضلى لـ x^n أى $a \times nx^{n-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = n.a.x^{n-1}$$

أمثـــلة محلولـــة

(١) أوجد مشتقة (العامل التفاضلى) الدالة :

$$y = 3x + 2$$

باستخدام المبادئ الأولية .

الحـــل : -

$\because y = 3x + 2$ .... (1)

$\therefore y + \Delta y = 3(x + \Delta x) + 2$ .... (2)

بطرح (1) من (2) : -

$$\therefore \Delta y = 3.\Delta x$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

(٢) أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{1}{x}$ **[أو** $y = x^{-1}$] **من المبادئ الأولية .**

الحــل : -

$$\because y=\frac{1}{x} \qquad \therefore y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$$

وبالطرح :

$$\therefore \Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x^2+x(\Delta x)}$$

$, when\ x\to 0$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x^2}\ ,[x.\Delta x=0]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2}$$

(٣) اوجد معدل التغير اللحظى للدالة : $y=x^2+4x-6$ من المبادئ الأولية .

الحــل : -

المقصود بمعدل التغير اللحظى هو المشتقة أو العامل التفاضلى

$$\because y=x^2+4x-6$$

$$\therefore y+\Delta y=(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)-6$$

$$=x^2+2x.(\Delta x)+(\Delta x)^2+4x+4.(\Delta x)-6$$

وبالطرح :

$$\therefore \Delta y=2x.(\Delta x)+4.(\Delta x)+(\Delta x)^2$$

ومعدل التغير = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+4+8\Delta x$$

ومعدل التغير اللحظى (المشتقة) =

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + 4 + \Delta x \quad = 2x + 4$$

(٤) اكتب العامل التفاضلى للدوال التالية : -

1) $y = x^7$ 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$ 3) $y = x^{-4}$

4) $y = x^{0.6}$ 5) $y = x^{-0.5}$ 6) $y = x$

الحـــل : -

1) $\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3) $\frac{dy}{dx} = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$

4) $\frac{dy}{dx} = 0.6x^{0.6-1} = 0.6x^{-0.4} = 0.6\frac{1}{x^{0.4}} = \frac{0.6}{\sqrt[10]{x^4}}$

5) $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}x^{-0.5-1} = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2x^{3/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

6) $\frac{dy}{dx} \quad 1 \times x^{1-1} = 1 \times x^0 = 1 \times 1 = 1.$

(٥) اوجد تفاضل الدوال التالية :-

1) $y = 8x^5$ 2) $y = 4\sqrt[3]{x}$

3) $y = ax^{2b}$ 4) $S = 16t^2$

الحـــــل :-

1) $\frac{dy}{dx} = 8 \times 5 \times x^4 = 40x^4$

2) $\frac{dy}{dx} 4\sqrt[3]{x} = \frac{dy}{dx} 4x^{\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{4}{3x^{2/3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3) $\frac{dy}{dx} = a.2b.x^{2b-1} = 2ab\ x^{2b-1}$

$$4)\ \frac{ds}{dt}=16\times 2t^{2-1}=32t$$

(٦) **اوجد مشتقة الدالة :-**

$$y=\frac{2x+1}{x-1}$$

الحـــــل :-

$$\therefore y=\frac{2x+1}{x-1}$$

$$\therefore y+\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)+1}{(x+\Delta x)-1}$$

$$\therefore \Delta y=\frac{2x+2.(\Delta x)+1}{(x-1+\Delta x)}-\frac{2x+1}{x-1}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x-1)(2x+2.\Delta x+1)-(x-1+\Delta x)(2x+1)}{\Delta x(x-1+\Delta x)(x-1)}$$

$$=\frac{-3\Delta x}{\Delta x.(x-1+\Delta x)(x-1)}=\frac{-3}{(x-1)(x-1+\Delta x)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3}{(x-1)(x-1+\Delta x)}=\frac{-3}{(x-1)(x-1)}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

(٧) **أوجد ميل المماس للمنحنى** $y=\frac{1}{x}$ **عند النقطة التى إحداثيها السينى** $=1$

الحـــــل :-

يمكن حساب الميل بإيجاد قيمة المعامل التفاضلى عند النقطة المعنية .

(مثـــال ٢)

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}$$

$$,\ at\ \ x=1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-1=\tan 135^\circ$$

وهذا يعنى أن ظل الزاوية التى يصنعها المماس عند النقطة $x=1$ ، سالب لأن الزاوية التى ظلها (1−) هى 135°

(٨) أوجد ميل المنحنى الآتى باستخدام طريقة Δ " Δ - **method** " أى من المبـادئ الأولية :-

$$y = 3x^2 - 2x + 4 \qquad at \left(\frac{1}{2}\ ,\ 3\right)$$

الحـــــل :-

لإيجاد ميل المنحنى عند نقطة معينة نوجد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، ومن طريقة Δ ؛ نعلم أن :-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 4 - \left(3x^2 - 2x + 4\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 4 - 3x^2 + 2x - 4}{\Delta x}$$

$$= \frac{6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 6x + 3.\Delta x - 2$$

$$, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\ 6x + 3.\Delta x - 2 = 6x - 2$$

وعند النقطة $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 3\right)$:- $\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$

وهو الميل المطلوب

وزاوية ميل المماس :

$$= \tan^{-1} 3 \cong 71.6^\circ$$

(٩) أوجد ميل المنحنى الآتى باستخدام طريقة Δ :

$$y = x^3 - 3x + 5 \qquad at\ (-2\ ,\ 2)$$

الحـــــل :-

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - (3x+\Delta x) + 5 - (x^3 - 3x + 5)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 . \Delta x + 3x . (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 5 - x^3 + 3x - 5 - 3x - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{3x^2 . \Delta x + 3x . (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3 . \Delta x}{\Delta x}$$

$$= 3x^2 + 3x . \Delta x + (\Delta x)^2 - 3$$

$$, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ 3x^2 + 3x . \Delta x + (\Delta x)^2 - 3 = 3x^2 - 3$$

وعند النقطة $(2 \ , \ -2)$:-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \times (-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$$

وهو الميل المطلوب

وزاوية ميل المماس =

$$\tan^{-1} 9 \cong 83.6^\circ$$

(١٠) أوجد مشتقة الدالة : $f(x) = (2x-1)^{-\frac{1}{2}}$

وذلك باستخدام طريقة Δ

الحـــــل :-

من التعريفات السابقة :-

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$, \quad \because f(x) = (2x-1)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\therefore f(x+\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \right) / \Delta x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$، \ \frac{1}{\sqrt{(2x+\Delta x)-1}} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2(x+\Delta x)-1}}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1} \ . \ \sqrt{2x-1}}$$

وبالضرب فى المرافق وهو : $\frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x+\Delta x)-1}}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2(x+\Delta x)-1}}$ وهو يساوى الواحد :-

$$\therefore \frac{\left[\sqrt{2x-1}-\sqrt{2(x+\Delta x)-1}\right]\left[\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+\Delta x)-1}\right]}{\left[\sqrt{(2x-1)}.\sqrt{2x+2\Delta x-1}\right]\left[\sqrt{2x-1}+\sqrt{2(x+\Delta x)-1}\right]}=$$

$$=\frac{[(2x-1)-(2x+2\Delta x-1)]}{\left[(2x-1)\sqrt{2x+2\Delta x-1}\right]+\left[(2x+2\Delta x-1)\sqrt{2x-1}\right]}$$

$$,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{\left[(2x-1).\sqrt{2x+2\Delta x-1}+(2x+2\Delta x-1).\sqrt{2x-1}\right]}$$

ولا ننسى أن المقدار أصلاً مقسوم على Δx كما فى (1)

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{\left[(2x-1).\sqrt{(2x+2\Delta x-1)}\right]+\left[(2x+2\Delta x-1).\sqrt{2x-1}\right]}$$

وبالتعويض عن $\Delta x=0$ فى المقدار السابق

$$\therefore f'(x)=\frac{-2}{(2x-1).\sqrt{2x-1}+(2x-1).\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{-2}{(2x-1)^{3/2}+(2x-1)^{3/2}}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{-2}{2(2x-1)^{3/2}}=\frac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$$

(١١) أوجد معدل تغير الدالة :- $y=f(x)=x^2-2$

بين $x=3$, $x=4$

الحـــــل :-

معدل التغير هو $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$،\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$,\because x=3\qquad \therefore \Delta x=\ 4-3=1$$

$$,\quad y=f(x)=f(3)=3^2-2=9-2=7$$

$$،\ For\ x=4$$

$$\therefore y+\Delta y=f(x+\Delta x)=4^2-2=16-2=14$$

$$\therefore \Delta y\quad =f(x+\Delta x)-f(x)=f(4)-f(3)=14-7=7$$

وهو معدل التغير المطلوب : $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{7}{1}=7$

(١٢) أوجد معدل تغير y بالنسبة إلى x عند النقطة التى إحداثيها السينى ؛

$x = 3.5$ **وذلك للدالة :-** $2y = x^2 + 3x - 5$

الحـــــل :-

معدل التغير = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\text{،}\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\therefore 2\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 5 - \left(x^2 + 3x - 5\right)$$

$$= x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3.\Delta x - 5 - x^2 - 3x + 5$$

$$= 2x \ .\ \Delta x + (\Delta x)^2 + 3 \ .\ \Delta x$$

وبالقسمة على Δx

$$\therefore 2\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = x + \frac{\Delta x}{2} + 1.5$$

$$, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \ x + \frac{\Delta x}{2} + 1.5 = x + 1.5$$

$$, For \quad x = 3.5$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.5 + 1.5 = 5$$

وهذا يعنى أن معدل التغير اللحظى للدالة المذكورة عند النقطة $x = 3.5$ هو 5 أى أن الدالة تتغير بسرعة تعادل خمسة أضعاف تغير المتغير المستقل x عندما $x = 3.5$

وميل المماس للمنحنى عند $x = 3.5$ هو 5

$$, \theta \ = \tan^{-1} 5 \cong 78.7^\circ$$

(١٣) أوجد مشتقة الدالة : $y = 2x^2 + 5x$ **بطريقة** Δ

الحـــــل :-

من التعريف :-

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\because\ y = f(x) = 2x^2 + 5x$$

$$\therefore\ f(x+\Delta x) = 2(x+5)^2 + 5(x+\Delta x)$$

$$,\ y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+5)^2 + 5(x+\Delta x) - 2x^2 - 5x}{\Delta x}$$

وبالاختصار :-

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 4x + 2\Delta x + 5$$

وعندما $\Delta x \to 0$ فإن الحد $2\Delta x$ ينعدم وتُصبح

$$f'(x) = 4x + 5$$

(١٤) أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sqrt{x}$ بطريقة Δ

الحـــــل :-

$$y = f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

وبالضرب فى المرافق :-

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

وعندما $\Delta x \to 0$ فإن :-

$$\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \to \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(١٥) **أوجد مشتقة الدالة :** $y = f(x) = \sqrt{2x-3}$

باستخدام طريقة Δ

الحـــــل :-

$$\because\ y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\because\ y = f(x) = \sqrt{2x-3}$$

$$\therefore\ y + \Delta y = f(x+\Delta x) = \sqrt{2(x+\Delta x) - 3}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x+\Delta x)-3} - \sqrt{2x-3}}{\Delta x}$$

فإذا ما عوضنا عن $\Delta x = 0$ فإن المقام يؤول للصفر ولهذا فإننا سنقوم بالضرب فى المرافق أى بالضرب فى كسر قيمته الكلية تساوى الواحد الصحيح وهذا لن يغير من المسألة .

أى إننا سنضرب المقدار السابق فى (1) والواحد هنا سيكون على شكل الكسر التالى :

$$\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

وبذلك فإن النهاية المطلوبة ، هى للمقدار :-

$$\frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} - \sqrt{2x-3}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

$$= \frac{(2x+2\Delta x-3) - (2x-3)}{\Delta x\left[\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}\right]}$$

$$= \frac{2\Delta x}{\Delta x\left[\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}\right]}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-3} + \sqrt{2x-3}}$$

والآن يمكننا أن نعوض عن Δx بالصفر

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

ومن هذا نصل إلى نتيجة هامة وهى أن أى مقدار كسرى ، بسطه الواحد الصحيح ، ومقامه جذر من الدرجة الأولى فى x فإن تفاضله $\dfrac{1}{\text{ضعف الجذر}}$

فمثلاً تفاضل $\dfrac{1}{\sqrt{7x+6}}$ هو :- $\dfrac{1}{2\sqrt{7x+6}}$

، وتفاضل $\dfrac{1}{\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$ هو :- $\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}-1}}$

وهكذا ؛

(١٦) إذا كانت $y=f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ **فأوجد** $f'(x)$ **بطريقة** Δ

الحـــــل :-

$$\because f(x)=x^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}$$

فإذا ما عوضنا عن $\Delta x=0$ فإن المقـام يُصبح مسـاوياً للصفـر وحيـث أن الضـرب فـى المقدار (1) لا يغير من المقـدار ، لذلـك فإننـا نلجأ إلى الضـرب فـى مقـدارى كسـرى يساوى الواحد وهو :-

$$\frac{(x+\Delta x)^{4/3}+(x+\Delta x)^{2/3}\,.\,x^{2/3}+x^{4/3}}{(x+\Delta x)^{4/3}+(x+\Delta x)^{2/3}\,.\,x^{2/3}+x^{4/3}}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}:$$

$$\frac{\left[(x+\Delta x)^{2/3}-x^{2/3}\right]\left[(x+\Delta x)^{4/3}+(x+\Delta x)^{2/3}\,.\,x^{2/3}+x^{4/3}\right]}{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{4/3}+(x+\Delta x)^{2/3}\,.\,x^{2/3}+x^{4/3}\right]}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{2}-x^{2}}{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{4/3}+(x+\Delta x)^{2/3}\,.\,x^{2/3}+x^{4/3}\right]}$$

بفك البسط والقسمة على Δx :

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)^{4/3}+(x+\Delta x)^{2/3}\,.\,x^{2/3}+x^{4/3}}$$

والآن بالتعويض عن $\Delta x = 0$ نحصل على :-

$$\frac{2x}{x^{4/3}+x^{2/3}\,.\,x^{2/3}+x^{4/3}}=\frac{2x}{3x^{4/3}}=\frac{2x^{3/3}}{3x^{3/3}\,.\,x^{1/3}}=\frac{2}{3x^{1/3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

(١٧) أوجد مشتقة الدالة $y=\sin x$ باستخدام المبادئ الأولية . " بطريقة Δ "

الحـــــل :-

$\because\ y=\sin x$

$\therefore\ y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$

$\therefore\ \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$

ومن قواعد حساب المثلثات نجد أن قيمة Δy :-

$$=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore\ \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\left(\cos x+\frac{\Delta x}{2}\right)\times\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=\cos x\ \times\ 1\ =\cos x$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\ f(x)}{dx}\ =\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

(١٨) أوجد مشتقة الدالة :- $y=\cos x$ باستخدام طريقة Δ

الحـــــل :-

$\because\ y=\cos x$

$\therefore\ y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$

$$\therefore\ \Delta y = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\therefore\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\lim_{\Delta x\to 0}\ \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

وعندما تؤول Δx إلى الصفر فإن المقدار يساوى :-

$$= -\sin x\ .\ 1 = -\sin x$$

$$\therefore\ y` = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Exercise "3"

(١) أوجد المعامل التفاضلى للدوال الآتية بالنسبة إلى x :

$$x^8 \ , \ 7x \ , \ \frac{x}{5} \ , \ 0.007x \ , \ \frac{1}{3}x^5 \ , \ 12x^4 \ , \ \frac{6}{7}x^{14} \ , \ (5x)^3 \ , \ 3a\ x^3$$

(٢) فاضل ما يأتى بالنسبة إلى x :- $\quad cx^5 \ , \ \frac{ab}{c}x^7 \ , \ x^{3b} \ , \ 2x^{4a+1} \ , \ 3\pi\ x^2$

(٣) فاضل ما يأتى بالنسبة إلى x :- $\quad 5x+2 \ , \ \frac{2}{3}x-7 \ , \ -5x+b \ , \ ax+bc$

(٤) اكتب الدوال التى تفاضلها ما يلى :-

$$x \ , \ 2x \ , \ x^2 \ , \ \frac{x^2}{4} \ , \ x^7 \ , \ x^{4a} \ , \ x^n \ , \ \frac{3x^4}{4} \ , \ 3b\ x^2$$

(٥) إذا كانت $U = V + at^2$ فاوجد قيمة $\frac{du}{dt}$ باعتبار أن u , a ثوابت

(٦) إذا كانت $S = \frac{1}{2}at^2$ ، a ثابت فاوجد $\frac{ds}{dt}$ عندما $a = 30$

(٧) إذا كانت مساحة الدائرة تُعطى بالعلاقة $A = \pi\ r^2$ حيث $r =$ نصف القطر ، $A =$ مساحة الدائرة فاوجد $\frac{dA}{dr}$.

(٨) إذا كان حجم الكرة يُعطى بالعلاقة $V = \frac{4}{3}\pi\ r^3$ ، حيث $V =$ الحجم ، $r =$ نصف القطر فاوجد $\frac{dV}{dr}$ عندما تكون r مساوية : $6\,cm$.

(٩) فاضل بالنسبة إلى x ، كل من الدوال التالية :-

$$3\sqrt{x} \ , \ \frac{2}{x} \ , \ \frac{3}{\sqrt{x}} \ , \ \sqrt[3]{x^2} \ , \ \sqrt[4]{3x^3}$$

(١٠) فاضل بالنسبة إلى x :- $\quad x^{0.6} \ , \ 7x^{0.15} \ , \ \frac{8}{x^{0.4}} \ , \ 3x^{-3} \ , \ x^{-n}$

(١١) فاضل بالنسبة إلى x :- $\quad 3x^{2.5} \ , \ 4x^{-1.3} \ , \ 8x^{0.7} \ , \ \frac{5}{\sqrt[6]{x^3}}$

(١٢) إذا كانت $U = \frac{30}{V^2}$ فأوجد قيمة $\frac{dU}{dV}$.

(١٣) أوجد ميل المنحنى $y = 3x^3$ عند النقطة التى إحداثيها السينى $= 1.5$.

(١٤) أوجد ميل المنحنى $y = \frac{x^2}{3}$ عند النقطة التى إحداثيها السينى : $x = 2$ وما هى قيمة x التى تجعل هذا الميل مساوياً للصفر .

(١٥) أوجد ميول المنحنى $y = \frac{2}{x}$ عند النقط التى فيها x : $\frac{1}{2}, 1, 2, 10$.

(١٦) أوجد من المبادئ الأولية " باستخدام طريقة Δ " ، المعامل التفاضلى للدالة : $y = \frac{1}{x^2}$.

(١٧) عند أى نقطة على المنحنى $y = x^2$ يكون ميل المنحنى مساوياً 2 .

(١٨) عند أى نقطة على المنحنى $y = x^3$ يكون مماس المنحنى صانعاً زاوية قدرها $45°$ مع محور السينات .

(١٩) عند أى نقطة على المنحنى $y = \sqrt{x}$ يكون الميل مساوياً 2 .

(٢٠) مطلوب رسم مماس للمنحنى $y = 0.5\,x^2$ وبحيث يكون موازياً للمستقيم $2x - 4y = 3$ ، فعند أى نقطة على المنحنى يجب رسمه .