الباب الرابع

التغير ومُعدل تغير الدالة ، والميل

change , rate of change of a function and gradients

رأينا فيما سبق أن الدالة تتغير قيمتها عندما يتغير المتغير الذى تعتمد عليه والسؤال المهم الآن هو كيفية حساب معدل التغير .

وما يهمنا هنا هو معدل التغير فى الدالة بالنسبة للتغير الحادث فى المتغير الذى تعتمد عليه .

وسوف نوضح هذا فيما يلى بمجموعة من الأمثلة مع مزيد من الإيضاح برسم الدوال المعنية .

٤ – ١ : – الحركة المنتظمة uniform motion

عندما يتحرك جسم بحيث يقطع مسافات متساوية فى فترات زمنية متساوية فإنه يقال أن الجسم يتحرك بانتظام .

فالمسافة دالة فى الزمن ومن التعريف الذى سبق لمعدل تغير الدالة فإن معدل التغير فى حالة الحركة المنتظمة يكون ثابتاً .

ولإيضاح ذلك نعتبر : –

S = المسافة التى يتحركها الجسم .

t = الزمن المستغرق لقطع هذه المسافة .

ومعروف من قوانين الحركة أن : –

$$S = Vt$$

حيث V = السرعة وهى ثابتة وهى المسافة المقطوعة فى كل ثانية .

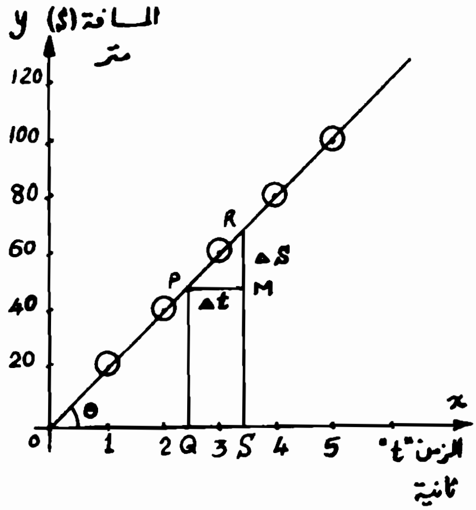
والنسبة بين المتغيرين S , t أى $\frac{S}{t}$ تكون ثابتة .

ولنعتبر المثال التالى الموضح بيانياً : –

سيارة تتحرك بحيث تقطع المسافات الموضحة بالجدول فى الأزمنة المقابلة قرين كل منها.

الزمن بالثانية t	1	2	3	4	5
المسافة بالمتر S	20	40	60	80	100

وقد حسبت هذه القراءات بدءً من نقطة ثابتة على خط تحرك السيارة . وبتوقيع هذه النقط بيانياً والتوصيل بينها نجد أنها تقع على خط مستقيم يمثل هذه العلاقة ، انظر شكل (٤-١) .



شكل (٤ – ١)

ولنعتبر كل من OS , OQ ، يمثلان فترتين زمنيتين (t) ويناظر كل منهما المسافة RS , PQ .

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS}$$

وهى تعادل ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الأفقى .

وهذا صحيح بالنسبة لجميع أوضاع P,R ولذلك فإن الرسم عبارة عن خط مستقيم .

ولتكن θ هى الزاوية التى يصنعها هذا الخط مع OX

$i.e \angle POQ$

$$\therefore \frac{PQ}{PO} = \frac{RS}{OS} = \tan\theta$$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ}$$ يُمثل ميل الخط المستقيم

ولنعتبر PM مستقيم يوازى OX وهو يمثل الزيادة فى الزمن ولتكن $= \Delta t$

، RM يُمثل الزيادة فى المسافة ولتكن $= \Delta S$

$$\therefore \quad \frac{\text{الزيادة فى المسافة}}{\text{الزيادة فى الزمن}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\text{ميل الخط المستقيم} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \tan\theta$$

وعلى ذلك فإنه لأى قيم مُناظرة لـ S أو t فإنه نسبة الزيادة فى المسافة بالنسبة للزيادة فى الزمن تكون ثابتة وتساوى ميل الخط المستقيم

وفى مثالنا السابق للحركة المنتظمة فإن الميل يساوى :-

$\frac{20m}{1S} = 20\,mS^{-1}$ ، وهى تعادل سرعة السيارة .

٤-٢ :- ميل الدالة الخطية Gradient of a linear function

يمكننا تعميم ما سبق كالتالى :-

لتكن y دالة فى (x) أى : $y = f(x)$

والخط المستقيم الذى يمثل الدالة قد يكون فى إحدى الصورتين التاليتين :-

$$y = mx \qquad \text{..........} \ (١)$$

وهى تُمثل خط مستقيم يمر بنقطة الأصل فإذا كانت Δy تُمثل الزيادة فى y ، Δx تمثل الزيادة فى x

فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تكون ثابتة . وتمثل ميل الخط المستقيم وهذا الميل يُمثل بـ " m "

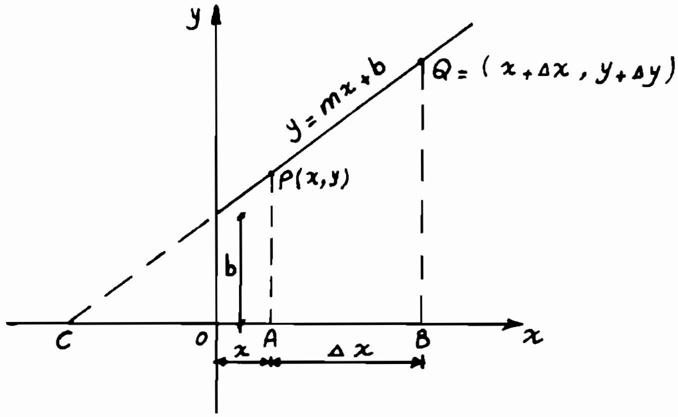
$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

وتُمثل m مُعدل الزيادة فى y بالنسبة إلى x

$$y = mx + b \qquad \text{..........} \ (٢)$$

وهى تُمثل خط مستقيم لا يمر بنقطة الأصل ولكنه يقطع مسافة b من محور y .

أنظر شكل (٤-٢)



شكل (٤-٢)

وفى الشكل ، ليكن CPQ خط مستقيم معادلته $y = mx + b$

ولتكن θ هى الزاوية التى يصنعها المستقيم مع OX

ولتكن P نقطة على هذا الخط وإحداثييها (x , y)

$$i.e \;\; OA = x \;\; , \;\; PA = y$$

فإذا ما ازدادت x بمقدار Δx من OA إلى OB ، وازدادت y بمقدار Δy من AP إلـــى BQ

وبرسم PR موازياً للمحور OX

$\therefore$ تكون إحداثيات Q $(x + \Delta x \; , \; y + \Delta y)$

$$i.e \;\; OB = x + \Delta x \quad , \quad QB = y + \Delta y$$

وبالتعويض بهذه القيم فى المعادلة :

$$y = mx + b \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore y + \Delta y = m(x + \Delta x) + b \qquad \ldots\ldots (2)$$

وبطرح (1) من (2)

$$\therefore \Delta y = m(\Delta x)$$

$$\therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan QCB = \tan PCA = \tan\theta$$

أى أن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تُمثل ميل المستقيم : Gradient of the line

ومن الواضح أن إضافة الثابت b للطرف الأيمن فى المعادلة لن يؤثر فى الميل ، ففى كل

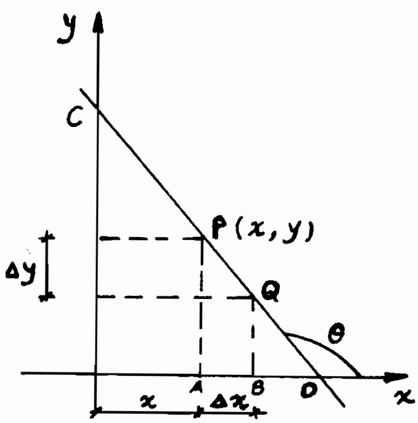
من : $y = mx$, $y = mx + b$

فإن الميل ثابت ويساوى m ويتوازى المستقيمان عند أى قيم تأخذها m

٤–٣ :– الميل السالب Negative gradient

تُقاس الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم مع محور OX ، دائماً فى الإتجاه العكسى لاتجاه دوران عقارب الساعة anti-clockwise

فعندما تكون هذه الزاوية أكبر من $90°$ ، أى من الزاوية القائمة كما فى حالة زاوية θ التى يصنعها المستقيم CD بالشكل (٤–٣) ، فإن الميل يكون سالباً .



شكل (٤–٣)

فإذا كانت P هى النقطة التى إحداثياتها (x , y)

$$\therefore OA = X \qquad , \qquad AP = Y$$

فإذا ما ازدادت X بمقدار Δx فى إتجاه OB ، فإن الإحداثى الرأسى للنقطة Q هو QB

وبرسم المستقيم RQ موازياً OX ، سنجد أنه عند حركة النقطة من A إلى B فإن الإحداثى الأفقى (السينى) سيزداد بمقدار Δx بينما يتناقص الإحداثى الرأسى (الصادى) بمقدار ΔY ((من PA الى QB))

ويعبر عن هذا بأنها زيادة سالبة (أو نقص)

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = negative(-ve)$$

كذلك $\therefore \tan\theta = (-ve)$,

وبذلك فإن مُعدل زيادة y بالنسبة إلى x ، يكون سالباً ويمكن تلخيص ما سبق ، كمـــا يلى :-

(١) إذا ازدادت y نتيجة لزيادة x فإن الميل يكون موجباً

(٢) إذا نقصت y نتيجة لزيادة x فإن الميل يكون سالباً .

٤-٤ :- ميــل المنحنى Gradient of a curve

نعلم أن الخط المستقيم ، هو الرسم البيانى المعبر عن أى دالة من الدرجـة الأولى ويكـون ميله ثابتاً عند كل نقط المستقيم

أما إذا كان الرسم البيانى عبارة عن منحنى فإن الميل يكون مختلفــاً عنـد كـل نقطـة مـن نقط المنحنى ولذلك فإنه لا يلاحظ معنى الميل على المنحنى حيث أنه يتغير باستمرار ، وسوف نقوم بإيضاح ذلك فيما يلى بشئ من التفصيل :-

المنحنى البيانى لحركة جسم بسرعة متزايدة بانتظام :-

Body moving with uniformly increasing velocity

سبق أن بينا أن الرسم البيانى الذى يصل بين المسافات والأزمنة المنـاظرة لجسـم يتحـرك بسرعة ثابتة عبارة عن خط مستقيم

وسوف نعتبر هنا أن الجسم يتحرك بسرعة تزايدية منتظمة أى أنه فـى الأزمنـة المتسـاوية فإن سرعته تزداد بنفس المقدار

وهذا يعنى أنه فى الأزمنة المتساوية فإن المسافات المناظرة المقطوعة تكون غير متساوية .

وذلك لأنه كلما زادت السرعة فإن المسافة المقطوعة كذلك تزداد

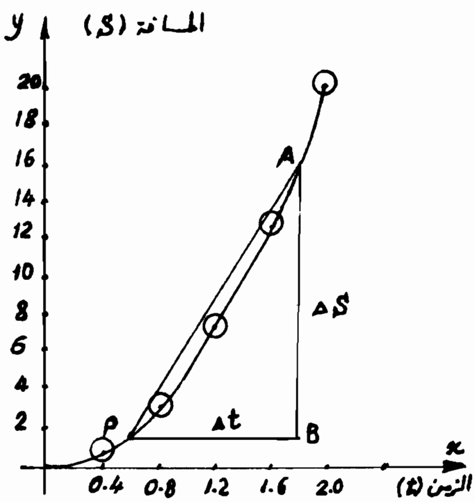
وكلما زادت السرعة ، زادت المسافة المقطوعة.

والمثال البسيط لإيضاح ذلك ، هو الجسم الساقط فسرعته تزداد بمرور الزمن

والجدول التالى يبين المسافات المقطوعة فى الفترات الزمنية المبينة لجسم يسقط سقوطاً حراً من وضع السكون

الزمن t بالثانية	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
المسافة S بالمتر	0	0.8	3.2	7.2	12.8	20.0

وبرسم هذه البيانات ، بيانياً ينتج لنا منحنى كما هو مبين بالشكل (٤-٤)



شكل (٤-٤)

وواضح أن المنحنى يميل أكثر فأكثر بانتظام مع زيادة الوقت ، أى أن نسبة المسافة للزمن تزداد أو أن السرعة تزداد .

ويعنى الشكل الإنسيابى للمنحنى أن ازدياد السرعة ثابت ولنعتبر نسبة الزيادة فيما بين المسافة والزمن فى خمسة فترات زمنية كما هو موضح بالجدول التالى :

الفترة الزمنية بالثانية	0 to 0.4	0.4 to 0.8	0.8 to 1.2	1.2 to 1.6	1.6 to 2.0
المسافة بالمتر	0.8	2.4	4.0	5.6	7.2
المسافة ÷ الزمن	2	6	10	14	18

وتُبين هذه النسب مُعدل السرعات للفترات المناظرة ويجب ملاحظة أن ميل الأوتار التى تصل بين النقط المتتالية على المنحنى يكون مساوياً لمعدلات السرعات .

فإذا ما أخذنا نقطة P على المنحنى ورسمنا منها وتراً يقطع المنحنى عند نقطة A .

ثم نرسم الإحداثى AB الذى يلاقى المستقيم PB المرسوم موازياً لمحور الإحداثيات السينى OX عند B

ولنفترض زيادة فى الزمن قدرها Δt فيما بين نقطتين P , B أى أن $PB = \Delta t$

ومن الرسم فإن التغير فى المسافة بين النقطتين ، يقابل المسافة $AB = \Delta S$

∴ معدل السرعة خلال هذه المرحلة = $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. وهو يعادل ميل الوتر PA .

فإذا ما تناقصت الفترة الزمنية Δt فإن المسافة المناظرة لها ΔS تتناقص كذلك ، إلا أن النسبة بينهما لا تزال تعنى معدل السرعة خلال الفترة الزمنية . وتعنى كذلك ميل الوتر PA والذى يتناقص طوله ويتلاشى تدريجياً بتناقص كل من ΔS , Δt

فإذا ما تخيلنا أن الفترة الزمنية قد تناقصت بلا حدود إلى حد متناهى فى الصغر فإن ΔS تتناقص كذلك لقيمة متناهية فى الصغر.

وعندما تصبح A قريبة جداً من P أى منطبقة عليها فإن النسبة $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ تُصبح قريبة جداً من قيمة محددة ويُصبح الوتر PA مماساً للمنحنى عند P ، والنهايةالتى تصل إليها النسبة $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ تكون عبارة عن ميل هذا المماس .

وهى تعنى كذلك ، السرعة عند P

وبذلك فإن السرعة عند نقطة ما هى نهاية النسبة $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ، عندما يُصبح كل من حدى النسبة صغيراً صغراً متناهياً . وهى أيضاً ؛ أى السرعة تعنى فى ذات الوقت ميل المماس للمنحنى عند نقطة P . وبذلك فإن ميل المنحنى عند أى نقطة على المنحنى يكون مساوياً لميل المماس للمنحنى والمرسوم عند هذه النقطة .

وفى الشكل السابق ، نرسم PQ مماساً للمنحنى عند نقطة P ، PR بطول يعادل الوحدة موازياً للمحور OX ومن R نرسم RS عمودياً على PR ويلاقى PQ فى S والزاوية التى يصنعها PQ مع $OX = \angle QPR = \theta$.

وميل PQ :- $\frac{SR}{RP} = \frac{10}{1} = 10$

$\therefore$ السرعة عند نقطة P = ميل المماس عند P وتساوى $10\ m/S = 10ms^{-1}$.

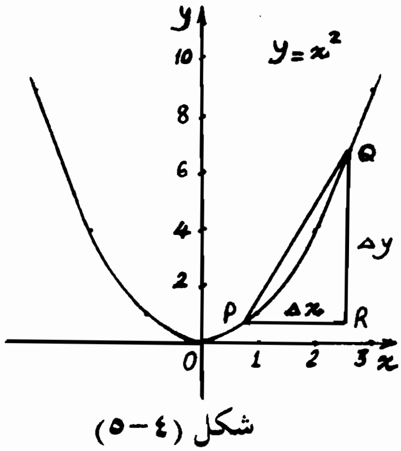
أى أن السرعة عند نهاية ثانية واحدة = $10\ m/S$.

ويمكن للطالب الماهر إثبات أن الإجابة حوالى $(9.8\ m/s)$.

ميـــل المنحنى $y = x^2$:-

يعتبر المنحنى $y = x^2$ من الأمثلة الشائعة والبسيطة للدوال الجبرية وهو من سلسلة المنحنيات $y = ax^2$ وللتبسيط سنعتبر $a = 1$ والطرق المتبعة هنا فى مثالنا $y = x^2$ يمكن تطبيقها لأى منحنى حيث $a \neq 1$ [أى لأى قيمة لـ : a]

والشكل التالى يوضح هذا المنحنى $y = x^2$ ، شكل (٤-٥)



شكل (٤-٥)

، لتكن P هى النقطة $(1\,,1)$ ثم نرسم الوتر PQ الذى يقطع المنحنى Q ثم نرسم PR موازياً للمحور OX ليلاقى الرأسى من Q فى R ولتكن PR ، تُمثل الزيادة فى X فيما بين $P\,,Q$ أى $=\Delta x$

ولتكن QR ، تمثل الزيادة فى Y فيما بين $P\,,Q$ أى $=\Delta y$

$\therefore$ ميل الوتر PQ = ظل الزاوية $QPR = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

وكذلك فإن $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ تساوى معدل الزيادة فى y لكل زيادة بمقدار الوحدة فى x فيما بين $P\,,Q$ ، والآن :-

الدالة : $y = x^2$ $\qquad$ (1)............

وعندما تزداد x بمقدار Δx ، تزداد y بمقدار Δy كزيادة مناظرة :-

$$\therefore y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \qquad \text{..........}\ (2)$$

بطرح (1) من (2) :

$$\therefore \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$$

$$\therefore \Delta y = 2x\,.\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

وبالقسمة على Δx :

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

ومن ذلك فإن قيمة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ يمكن حسابها لأى قيمةلـ Δx عند أى نقطة على المنحنى حيث تكون قيمة X معروفة .

وبذلك فإنه عندما $x = 1$ كما هو الحال فى النقطة P على المنحنى السابق فإن :-

$$if\ \ \Delta x = 0.3\ \ ,\ \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \times 1 + 0.3 = 2.3$$

$$if\ \ \Delta x = 0.2\ \ ,\ \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.2 = 2.2$$

$$if\ \ \Delta x = 0.1\ \ ,\ \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.1 = 2.1$$

$$if\ \Delta x = 0.01\ \ ,\ \ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.01 = 2.01$$

$$if \quad \Delta x = 0.001 \quad , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.001 = 2.001$$

$$if \quad \Delta x = 0.0001 \quad , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + 0.0001 = 2.0001$$

وهذه القيم توضح ميل الوتر PQ عندما تتلاشى Δx وتتحرك Q قريبا من P ومن الواضح أن ميل الوتر يقترب من 2 ويمكننا أن نستنتج أنه عندما تتحرك Q للإنطباق على P ويصبح الوتر مماساً للمنحنى عند P ، فإن ميل المماس = 2 .

أى أن معدل الزيادة فى y بالنسبة لوحدة الزيادة فى x عند النقطة $P = 2$.

ويمكن الوصول إلى نفس النتائج لأى نقطة على المنحنى ، إلا أن ميل كل مماس يعتمد على قيمة x عند النقطة المقام منها المماس .

وبذلك سنجد أن الميل عبارة عن دالة فى x .

فمثلاً عند نقطة على المنحنى ، إحداثيها السينى $x = 3$ ، نجد أن ميل المماس سيكون مساوياً لـ : 6 $[2x = 2 \times 3 = 6]$

[وبذلك فإن الميل عند أى نقطة على منحنى ، يمثل دالة ويكون مساوياً لميل المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقطة]

وهو أيضاً عبارة عن معدل زيادة الدالة لقيمة x عند هذه النقطة .

الميل السالب :- Negative gradient

فى الشكل السابق (٤-٥) ، نعتبر النقطة S على المنحنى ولها إحداثى سينى سالب ، نرسم مماس للمنحنى ونمده حتى يلاقى المحور $X'O$ ، سنجد أن الزاوية التى يصنعها هذا المماس أكبر من $90°$ وبالتالى فإن الميل سالب (كما سبق ذكر الميل **السالب** للخط المستقيم) . وهذا يعنى أن معدل الزيادة فى الدالة سالب أى أن الدالة تتناقص وبدراسة المنحنى ، نجد أنه بزيادة x خلال القيم السالبة لها من $(-\infty \rightarrow 0)$ فإن الدالة الممثلة بالمنحنى ، تتناقص من $(+\infty \rightarrow 0)$ عند نقطة الأصل .

وعند هذه النقطة ، وهى نقطة الأصل ، يكون OX مماساً للمنحنى وميل المنحنى يصبح مساوياً لميل محور السينات وهو يساوى الصفر .

Exercise 2

(١) ارسم الخط المستقيم : $3x - 2y = 6$ ثم أوجد ميله وإذا كانت Q , P نقطتان على هذا المستقيم بحيث أن قيمة x عند Q أكبر من قيمة x عند P بمقدار 0.8 ، فبكم تزيد قيمة y عند Q عن قيمتها عند P

(٢) أوجد ميل المستقيمات التالية :-

$a)\ \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 2$

$b)\ 3x + 4y = 12$

$c)\ \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 3$

$d)\ 2x - 3y = 0$

(٣) إذا كان ميل أحد المستقيمات هو 1.5 وكان يمر بالنقطة $(4 , 2)$ فأوجد معادلته .

(٤) إذا كانت المسافة التى يقطعها جسم يسقط سقوطاً حراً من وضع السكون تكون طبقاً للعلاقة التالية ، التقريبية :-

$$S = 4.9t^2$$

وباعتبار الزيادة فى الزمن $= \Delta t$ والزيادة المناظرة فى المسافة $= \Delta S$ ، فأوجد بالطرق السابق دراستها فى هذا الموضوع ، صيغة رياضية لـ : ΔS بدلالة Δt لأى قيمة لـ t .

ومن ثم أوجد $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ومنها إحسب معدل السرعة للفترات الزمنية التالية :-

(1) $2S$ to $2.2S$ (2) $2S$ to $2.1S$

(3) $2S$ to $2.01S$ (4) $2S$ to $2.001S$

ومن هذه النتائج استنتج السرعة عند نهاية ثانيتين .

(٥) فى المنحنى الذى معادلته $y = x^2$ وباستخدام نفس الرموز المتقدمه فى الشرح لهذا الموضوع ، أوجد قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تزيد قيمة x من 3 إلى :-

3.1 , 3.01 , 3.001 , 3.0001 على الترتيب

ثم استنتج ميل المماس للمنحنى عند النقطة التى إحداثيها السينى $= 3$

(٦) ارسم المنحنى الذى معادلته $y=x^3$ لقيم x فيما بين :- $0 , 2$

ثم أوجد صيغة لـ Δy بدلالة $x , \Delta x$ ثم أوجد صيغة لـ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

ثم أوجد ميل المماس للمنحنى عند النقطة التى فيها $x=2$ ، أكد صحة الإجابة برسم المماس للمنحنى عند هذه النقطة

(٧) الدالة : $y=\dfrac{1}{x}$ تمثل قطع زائد ، أوجد صيغة لـ Δy بدلالة $x , \Delta x$ ثم أوجد صيغة لـ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ وباعتبار قيم x :- $1.0001 , 1.001 , 1.01 , 1.1$

فأوجد النهاية التى تقترب منها $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ عند اقتراب x من الواحد الصحيح

ثم أوجد الميل وزاوية ميل المنحنى عند نقطة $x=1$ ، وأكد صحة الإجابة برسم المنحنى والمماس له عند هذه النقطة

(٨) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية ، عند $x=1$:-

$a)\ y=3x^2-2$

$b)\ y=2x^2+5$

$c)\ y=x^3+3$

(٩) أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية عند $x=3$:-

$a)\ y=2x^2-11$

$b)\ y=3x^2+2$

$c)\ y=5x^2-7$