الباب الثانـــى

الــــدوال Functions

٢-١ :- عام

تُعرف العلاقة التى تربط بين متغيرين بحيث أن قيمـة أحدهمـا تعتمـد علـى قيمـة الآخـر بالنص التالى :-

" المتغير التابع دالة فى المتغير المستقل "

وفى الأمثـــلة السابقة فإن :-

(١) حجم الكرة V دالة فى نصف قطرها

(٢) المسافة المقطوعة S بالجسم الساقط من السكون دالة فى الزمن t وهُناك أمثلة لدوال أُخرى مثل :-

١- لوغاريتم العدد هو دالة فى العـدد فمثـلاً $y = \log x$ ، y هـو لوغـاريتم العـدد x وبذلك فإن y دالة فى x أو لوغاريتم العدد دالة فى العدد ذاته .

٢- حجم كتلة معينة من الغاز ، دالة فى درجة الحرارة عند ثبوت الضغط

٣- ضغط كتلة محددة من الغاز ، دالة فى درجة الحرارة عند ثبوت الحجم

٤- جيوب وجيوب تمام وظلال الزوايا هى دوال فى هذه الزوايا

٥- مدى قذيفة المدفع هو دالة فى زاوية القذف مع ثبوت قوة القذف

٢-٢ :-تعريف الدالة : Defination of a function :-

عموما ، إذا كان هنالك علاقة بـين متغـيرين Y , X بحيـث أن أى قيمـة تأخذهـا X ، توجد قيمة مناظرة (أو أكثر) لـ Y فإنه يمكن القول أن Y دالة فى X .

٢-٣ :-رمـوز الـدوال Expression of functions :-

إذا كـانت y دالـة فـى x فإنهـا تُكتـب $y = f(x)$ أو $y = G(x)$ أو $y = \Phi(x)$ أو $y = \psi(x)$ حيث تعنـى الرمـوز f, G للدالـة بينمـا تعنـى $G(a)$, $f(a)$ بقيمـة الدالة عندما $x = a$.

وإذا كان لكل قيمة تأخذها x قيمة واحدة فقط لـ Y فإن الدالـة تُسـمى بدالـة وحيـدة القيمة . أما إذا كانت لكل قيمة تأخذها x أكثر من قيمة لـ Y فإن الدالة تُسـمى دالـة مُتعددة القيم مثل $y^2 = x$ ومنها $y = \pm\sqrt{x}$ أى لها قيمتان لكل قيمة لـ x وعموما فإنه يتم استخدام الحروف الأخيرة من الأبجدية الإنجليزية مثل z , y , x للتعبير عـن المتغيرات وعادة تُستخدم x للتعبير عن المتغير المستقل فى حين تُستخدم y للتعبير عـن المتغير التابع . أما الثوابت فى الدوال المختلفـة فإنـه يتـم استخدام الحـروف الأولى مـن الأبجدية الإنجليزية للتعبير عنهـا مثـل a , b , c أو بـالحروف الوسـطى مـن الأبجديـة الإنجليزية مثل l, m, n مثل $y = mx + b$ حيـث m , b ثوابـت فـى المعادلـة العامـة للخـط المسـتقيم . وعنـد الرغبـة فـى التعبيـر عـن الـدوال فـى الزوايـا مثـل $y = \sin(a) + \cos(a)$ أو $y = \cos^2\theta$ أو $y = \tan\Phi$ فإنه تسـتخدم الرمـوز اليونانية Greek Letters للتعبير عن الزوايا مثل θ " ثيتـا theta " أو Φ " فـاى phi " وكذلك تستخدم x فى هذا الصـــدد .

فإذا كانت لدينا الدالة : $f(x) = x^2 + 3x - 4$

فإن $f(1)$ ترمز لقيمة الدالة عددياً عنـد التعويـض بـالعدد ١ بـدلا مـن x وبذلـك فإنـه للدالة السابقة :-

$$f(1) = 1^2 + 3\times 1 - 4 = 0$$

$$، \quad f(2) = 2^2 + 3\times 2 - 4 = 6$$

$$، \quad f(0) = 0 + 0 - 4 = -4$$

$$f(a) = a^2 + 3 \times a - 4$$

$$، \quad f(a+h) = (a+h)^2 + 3(a+h) - 4$$

وبالمثل إذا كان لدينا الدالة : $\Phi(\theta) = 3\sin\theta$

فإن :-

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\times 1=3$$

$$،\ \Phi(0)=3\sin(0)=0$$

$$،\ \Phi\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=2.1213$$

٢ - ٤ : رمز الزيادة فى الدالة : Notation for increases in functions

إذا كانت x ترمز لمتغير ما ، فإن الرمز δx أو Δx أحياناً وتُنطق "دلتا - delta" x ، يستخدم للدلالة على الزيادة فى قيمة x والرمز δ هو الحرف اليونانى المرادف للحرف الإنجليزى " d " .

ولا تعنى Δx كما هو المعتاد فى الضرب ، لا تعنى حاصل ضرب $\Delta\times x$ ويجب عدم الفصل بين الحرفين Δ, x . وبذلك فإن Δx تعنى الزيادة أو النقص فى x .

وهذا خلاف $a\times x$ فهى هنا تعنى حاصل ضرب قيمة كل من a ، قيمة x ، فى بعضهما.

ونتيجة للزيادة أو النقص فى x فإنه يتبع هذا زيادة أو نقص فى y يعادل Δy

وعلى هذا فإنه إذا كانت :

$$y=f(x)$$

$$\therefore y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

(بالطرح)

$$\therefore \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

فمثلاً إذا كانت :

$$y=x^3-5x^2+3x$$

$$\therefore y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-5(x+\Delta x)+3(x+\Delta x)$$

وقد تُستخدم الحروف الأبجدية الصغيرة للتعبير عن التغير الطفيف فى قيمة x فمثلا فى مثالنا السابق عن الجسم الساقط :

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad i.e.\ S=f(t)$$

$$\therefore S+\Delta S=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2$$

ويمكن كتابة الأخيرة بالحروف الأبجدية الصغيرة بدلاً من Δ كالتالى :

"d,h"

$$S+d=\frac{1}{2}g(t+h)^2$$

حيث h هى التغير الطفيف فى الزمن d,t هى التغير فى المسافة المترتب على التغير فى الزمـــن .

٢ – ٥ :- التمثيل البيانى للدوال :

Graphic representation of functions

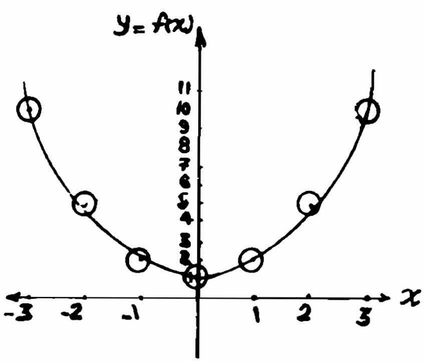
لنعتبر $y = f(x)$ هى دالة فى (x) وحيث أنه لكل قيمة تأخذها x توجد قيمة مناظرة تأخذها y ؛ لذلك فإننا نفترض مجموعة قيم مختلفة للمتغير x ونحسب قيم $f(x)$ أو y المناظرة لهذه القيم . ثم ندون النتائج فى جدول مناسب كالتالى :

الدالة : $y = f(x) = x^2 + 1$

ونفرض قيم لـ x $[-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3]$ مثلاً ثم نحسب قيم y المناظرة .

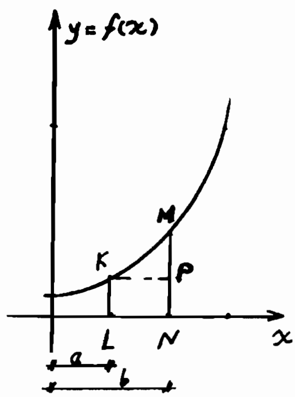
x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y = f(x)	10	5	2	1	2	5	10

ومن القيم المدونة بالجدول ، يمكنك ملاحظة أن $f(-a)$ لها نفس قيم $f(a)$ وعلى ذلك فإن المنحنى يكون متماثلاً حول محور الصادات " المحور الرأسى" yy' ، والدالة عبارة عن منحنى قطع مكافئ Parabola . وذلك كما يتضح من الشكل (٢ – ١) .



شكل (٢–١)

وفى الشكل (٢–٢) والذى يمثل جزء من المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$



شكل (٢-٢)

نأخذ النقط L, N على المحور OX بحيث أن : $OL = a \ , \ ON = b$

ثم نرسم الإحداثى الرأسى ordinate المناظر $(KL \ , \ MN)$.

$\therefore KL = f(a) \quad , \quad MN = (fb)$.

وعموماً ؛ إذا كانت L ، أى نقطة على OX بحيث أن $OL = X$

فإننا إذا اعتبرنا أن X تزيد بالمقدار LN حيث :

$LN = \Delta x$ فإن MP تُمثل الزيادة المناظرة فى $f(x)$ أو فى y .

$\therefore \ MP = \Delta y \qquad , \qquad KL = f(x)$

$, \quad MN = f(x + \Delta x)$

$\therefore \ MP = f(x + \Delta x) - f(x)$

$or\, \Delta Y \ = f(x + \Delta x) - f(x)$

٢ - ٦ : تصنيــــف الــدوال :-

(١) دوال كثيرة الحدود Polynominal functions :-

وتكون فى الصورة : $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$

حـــيث : $a_0 , a_1 , ..., a_n$ ثوابت، n عدد صحيح موجب ومقداره يرمز لدرجة الدالة.

فإذا كانت $f(x)=0$ وهى دالة كثيرة الحدود ، فإن لها على الأقل جذر واحد ، وعندما تكون n هى درجة الدالة فإنه يكون للدالة حينئذ عدداً من الجذور $n=$.

(٢) الـدالة الخطيـة Linear function :-

عندما $n=1$ فإننا نحصل على كثيرة حدود مـن الدرجـة الأولى وتُعـرف بالدالـة الخطيـة

وهى على الصورة : $f(x)=a_0x+a_1$.

وصورتها المألوفة هى : $f(x)=mx+c$ والتى تمثل خطـــــــاً مستقيماً ميله $=a_0$ أو m وطول الجزء المقطوع به من محور الصادات $=a_1$ أو c

(٣) الدالة التربيعية :- Quadratic function :

عندما تكون $n=2$ فإننا نحصل على كثيرة حدود من الدرجة الثانية وصورتها المألوفة :

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$$

وهى تمثل منحنى فى المستوى .

وصورتها الأكثر شيوعاً :- $f(x)=ax^2+bx+c$

(٤) الـدوال أحادية القيمة ومتعددة القيم :-

إذا كانت لكل قيمة من قيم المتغير المستقل x قيمـة واحـدة فقـط منـاظرة لهـا مـن قيـم الدالة (y) فإن الدالة تُسمى أُحادية القيمة .

أما إذا كان لكل قيمة تأخذها x قيمتان أو أكـثر للدالـة (y) فـإن الدالـة تُعـرف بأنهـا متعددة القيم (ثنائية أو ثلاثية أو ....)

مثـــال :- عند قذف جسم لأعلى وباعتبار s هى مقدار ارتفاعه عـن سـطح الأرض وأن t الزمن الذى مر منذ لحظة قذفه ، هنا تكون s دالة فى المتغير المسـتقل t وذلـك لأن الجسم يكون فى كل لحظة من زمن حركته على ارتفاع معين .

كما أن t تكون كذلك دالة فى المتغير المستقل s وذلـك لأن كـل ارتفـاع يصـل إليـه الجسم تناظره قيمتان من قيم t إحداهما عند صعود الجسم والثانية عند هبوطه .

وفى مثالنا هذا ، تكون s دالة أُحادية القيمة فى المتغير المستقل t بينمـا تكـون t دالـة ثنائية القيمة فى المتغير المستقل s .

(٥) الـدوال الفردية والدوال الزوجية :-

وقد تكون الدالة فردية أو زوجية ، فيقال للدالة $y = f(x)$ بأنها فردية إذا كانت تحقـق العلاقة $f(-x) = -f(x)$.

مثـــــل : $y = x^5$ ، $y = \sin x$ ، $y = \tan x$

بينما يقال للدالة بأنها زوجية إذا كانت تُحقق العلاقة $f(x) = f(-x)$

مثـــــل : $y = x^2$ ، $y = x^4 + 5$ ، $y = \cos x$

وقد تكون الدالة لافردية ولازوجية :-

مثـــــل : $y = \sin x + \cos x$ ، $y = x^5 + 5$

(٦) الـدوال الصريحة والدوال الضمنية :-

Explicit and Implicit Functions

إذا كانت $y = f(x)$ وأعطينا المتغير المستقل x قيمة معينه وأمكننا حساب $y = f(x)$ فإنه يقال أن الدالة $f(x)$ دالة صريحة فى (x)

مثـــــل : $y_1 = x^2 + 4$ ، $y_2 = 3x - 2$ ، $y_3 = x^2 - 2x + 8$

فإذا ما اعتبرنا قيمة $x = 3$ فى الأمثلة السابقة فإنه يمكننا بسهولة حساب $y = f(3)$ ، لكل من هذه الدوال وتكون قيمتها كالتالى :-

$y_1 = 13$, $y_2 = 7$, $y_3 = 11$

أما إذا كانت العلاقة بين المتغيرين x, y ، لا تُعطى قيمة y مباشـرة عنـد تحديـد قيمـة معينة لـ x بل يستوجب ذلك إجراء مجموعـة مـن العمليـات الجبريـة أولاً ؛ فـإن الدالـة يُطلق عليها بأنها دالة ضمنية فى x

أمثـــــلة : (١) ——— $x^2 + 3xy + y^3 = 0$

(٢) ——— $\sqrt{x -- 2y^2} = 0$,

ويلاحظ من الدوال الأخيرة أنه يصعب إيجاد قيمة y مباشرة عند إعطاء قيمة لـ x بل يلزم إجراء مجموعة من العمليات الجبرية بحيث نتمكن فى النهاية من وضع y فى طرف، x فى الطرف الثانى .

ففى المثال الثانى (٢) السابق : $\because \sqrt{x-2y^2}=0$

∴ بتربيع الطرفين $\therefore y=\sqrt{\frac{x}{2}}$ $\qquad \therefore x=2y^2$

وإذا كان هذا ممكناً فى بعض الدوال ، فإنه يكون صعباً وربما مُحال فى دوال أُخرى

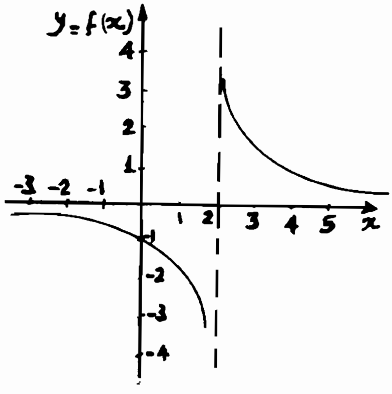
(٧) الـدوال المتصلة (المستمرة) والدوال غير المتصلة (المتقطعة) :-

Continuous and Dsicrete functions

تكون الدالة متصلة إذا كانت المتغيرات المستقلة لهذه الدالة x ، $y=f(x)$ متصلـة أو مستمرة . فاستمرار اتصـال هـذه المتغـيرات يؤدى إلى اسـتمرار أو اتصـال الدالـة وفـى الدوال المتقطعة تكون هنالك قيم غير معرفة للمتغيرالتابع y عند قيم مُعينة لـ x .

فمثلاً :- الدالة $y=\frac{1}{x-2}$ ، محدودة فى الفترة (5 , 3) .

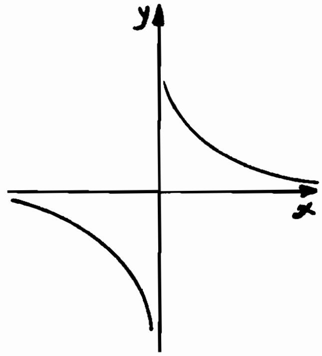
ولكنها غير محدودة فى الفترة (5 , 2) وذلك لأن المتغير المستقل x بوجوده فـى الفـترة (5 , 2) يمكن أن يؤول إلى 2 وحينئذ ستكون الدالة متناهية فى الكبـــر ، انظر الشــكل (٢-٣)



شكل (٢-٣)

ويجب ملاحظة أنه عند $x=2$ فإن : $y=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0}$.

وهى كمية غير معينة ومن الرسم يتضح أن الدالة غير متصلة عند $x = 2$ وكذلك الدالة $y = \frac{1}{x}$ غير متصلة عند $x = 0$ انظر الرسم شكل (٢-٤) .



(٢ - ٤)

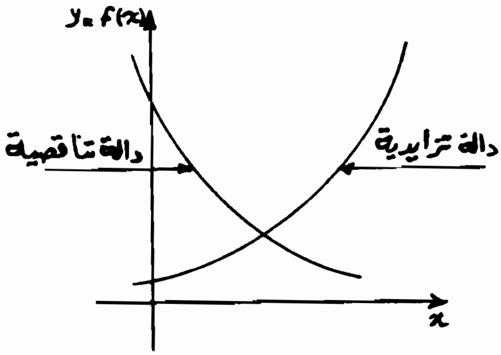
وكذلك الدالة $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

سنجد أنه عند $x = 1$ فإن $y = \frac{Zero}{zero}$ وهى قيمة غير معينة

لذلك فإن y دالة غير متصلة فى x لأنه عند قيمة معينة لـ x $(x = 1)$ فإن $y = f(x)$ تكون غير مُعرفة أولها قيمة غير معينة .

(٨) الـدوال التزايدية والـدوال التناقصية :-

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ مُعرفة فىالفترة المفتوحة (a , b) فإنـه يُطلـق علـى الدالـة $f(x)$ بأنها تزايدية ؛ إذا كانت قيمة $f(x)$ تزيد بزيادة قيمـة المتغـير المسـتقل (x) فـى حين يُطلق عليها بأنها تناقصية ، إذا كانت قيمة $y = f(x)$ تنقص كلما ازدادت قيمـة x



شـــكل (٢-٥)

(٩) الــدالة الجبرية والــدالة غير الجبرية :-

تكون الدالة جبريـة إذا كـانت العمليـات التـى نُجريهـا علـى المتغـير المسـتقل فيهـا هـى عمليات الجمع والضرب والطرح والقسمة والتربيع وإيجاد الجذور وإيجــاد اللوغـاريتم أو الرفع للأسس ، وهكذا ....

أمثـــــلة :- الدوال التالية هى دوال جبرية

$$y = \frac{2x^3 + 2\sqrt[3]{x^2} - 5\log x}{(4+3x)^{\frac{3}{2}} + 7}$$

$$, y = \sqrt{\frac{(x+2)^4}{x^2 - 3x}}$$

ويطلق على ما عدا ذلك من الدوال غير الجبرية وهى :-

(١٠) دالـــة القـــوى :-

مثل الدالة : $y = x^n$ حيث n عدد حقيقى ثابت

وعندما تكون $n = 0$ فإن الدالة y تساوى مقداراً ثابتاً = 1

(١١) الـــدالة الأسيـــة :- Exponential function

مثل الدالة : $y = a^x$ حيث x عدد صحيح غير الواحد والصفر ، $a \neq 0 , 1$ ،

الدالـــة :- $y = e^x$ حيث e عدد حقيقى $\cong$ 2.71828

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ، $n \in N$ وذلك عندما $a = e$

فإذا كانت $a = e = 2.71828$ وهى عدد حقيقى فإنه يسمى بالأساس الطبيعى للوغاريتم ومن ثم فإن $y = f(x) = \log_e x = \ln x$.

ويطلق على $\ln x$ باللوغاريتم الطبيعى للمقدار x .

(١٢) الـدالة اللوغاريتميـة :- logarithmic function

وتكون فى الصورة : $y = \log_a x$ حيث a عدد موجب لا يساوى الواحد ولا الصفـر $a \neq 0 , 1$ وكذلك $y = \log_e x$.

(١٣) الدوال المثلثيـة :- trigonometric functions

مثـــل :-

$$\sin x \;,\; \cos x \;,\; \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \;,\; \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$,\; \sec x = \frac{1}{\cos x} ,\; \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ويعبر عن x عادةً بالزوايا النصف قطرية $\left(\pi - radians = 180^\circ\right)$

بعـــض خـــواص الـــدوال المثلثيـــة :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \;\cos y \pm \cos x \;\sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \;\cos y \mp \sin x \;\sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \;\tan y}$$

(١٤) الـدوال المثلثيـة العكسيـة (الدوال الدائرية) :

$$y = arc\sin x = \sin^{-1} x\left[-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \pi / 2\right]$$

$$y = arc\cos x = \cos^{-1} x\left[0 \leqq y \leqq \pi\right]$$

$$y = arc\ \tan\ x = \tan^{-1} x\left[-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = arc\ \cot\ x = \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\left[0 < y < \pi\right]$$

$$y = arc\ \sec\ x = \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\left[0 \leqq y \leqq \pi\right]$$

$$y = arc\ \mathrm{cosec}\ x = \mathrm{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\left[-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right]$$

(١٥) الـدوال الزائـدية :- **Hyperpolic functions**

تُعرف هذه الدوال بدلالة الدوال الأُسية e^{-x} , e^{x} ذات الأساس الطبيعى e .

$$\sinh\ x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathrm{cosch}\ x = \frac{1}{\sinh\ x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\cosh\ x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad , \quad \mathrm{sech}\ x = \frac{1}{\cosh\ x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

بعـض خـواص الـدوال الزائـدية :-

$$\coth^2 x - 1 = \mathrm{cosch}^2 x$$

$$5h 2x = 2\, sh\, x\ ch\, x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x$$

$$ch\ 2x = ch^2 x + sh^2 x$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\cosh x + sh x = e^{x}$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

(١٦) الـدوال الزائـدية العكسيـة :-

إذا كان لدينا $x = \sinh y$ فـــإن $y = \sinh^{-1} x$ ، هى الجيـب الزائـــدى العكسى للمقدار x .

وفيما يلى قيم الدوال الزائدية العكسية بدلالة اللوغاريتم الطبيعى (ln) ومدى x الـذى تكون فيه الدالة حقيقية :-

وذلك لكل قيم x .

$$\sinh^{-1} x = arc \sinh x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 + 1}\right]$$

$$\cosh^{-1} x = arc \cosh x = \ln\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right], x \geqq 1$$

$$\tanh^{-1} x = arc \tanh x = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{1+x}{1-x}\right], |x| < 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = arc \operatorname{csch} x = \ln\left[\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|}\right], x \neq 0$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = arc \operatorname{sech} x = \ln\left[\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right], 0 < x \leqq 1$$

$$\coth^{-1} x = arc \coth x = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{x+1}{x-1}\right], |x| > 1$$

(١٧) الـدوال المركبـة (دالـة الـدالة) :-

إذا كان لدينا $y = f(z)$ وكانت z فى نفس الوقت دالة فى x فإن هذا يعنى أن y دالــة فى x .

حيث : $z = \Phi(x)$ $\qquad \therefore y = f[\Phi(x)]$

وهى دالة فى الدالة أو دالة مُركبة .

أمثلـــة :-

عند نفخ بالون مثلاً فإن نصف قطره يتغير مع الزمن بعلاقة معينة ، ويتغير حجم البالون بالتالى بتغير نصف القطر :

$$r = \Phi(t) \quad , \quad v = f(r) \quad , \quad v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\therefore v = \Psi(t)$$

وكذلك الدالة $y = \sin x^3$ فإذا ما وضعنا $Z = x^3$:

$$\therefore y = \sin Z$$

وهنا تصبح y دالة فى z ، z أصلاً دالة فى x :

$$\therefore y = \Phi(x)$$

(١٨) الـدالة الكســرية :- **Fractional function**

إذا كانت الدالة يمكن التعبير عنها فى صورة خارج قسمة دالتين كثيرتى الحدود ، البسط كثيرة حدود من درجة n والمقام كثيرة حدود من درجة m مثلاً :

$$\therefore f(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

وتُعرف هذه الدالة بأنها دالة كسرية مثل :

$$y = f(x) = \frac{5 + 2x + 7x^2 - 4x^3}{2 - 3x + 8x^2 + 5x^3 - 2x^4}$$

(١٩) الـدوال الـدورية :-

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ وبحيث أنه يوجد رقم ثابت k ، بحيث إذا أُضيف أو طُرح من المتغير x فإن قيمة الدالة لا تتغير ، فإن الدالة تُعرف بأنها دالة دورية .

$$i.e\; y = f(x) = f(x + k)$$

وأصغر هذه الأعداد التى يمكن إضافتها أو طرحها بحيث لا تتغير قيمة الدالة يُطلق عليها بموجة الدالة أو دورتها .

فمثـلاً :- $y=\sin x$ هى دالة دورية ودورتها $= k=2\pi$

، $y=\cos x$ هى دالة دورية ودورتها $= k=2\pi$

، $y=\tan x$ هى دالة دورية ودورتها $= k=\pi$

، $y=\cot x$ هى دالة دورية ودورتها $= k=\pi$

وذلك لأن :-

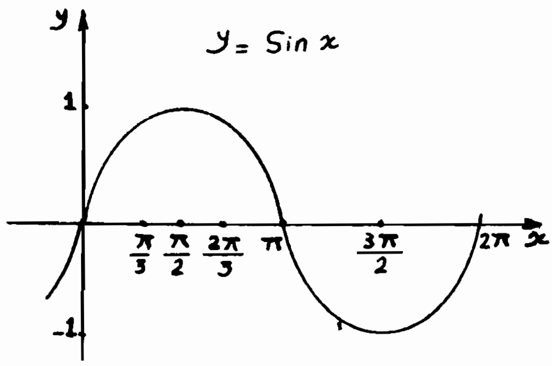
$$y=\sin\ 30=\sin(30+360)=\frac{1}{2}$$

$$y=\cos\ 60=\cos(60+360)=\frac{1}{2}$$

$$y=\tan\ 30=\tan(30+180)=0.5773502=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y=\cot\ 30=\cot(30+180)=1.7320508=\sqrt{3}$$

انظر الرسم شكل (٢-٦) .



نموذج للدالة الدورية

شـكل (٢-٦)

(٢٠) الـدالة العكسيــة :- Inverse functions

إذا كانت $y = x^2$ فــإن $x = \sqrt{y}$

ففى الدالة الأولى عبرنا عن y بدلالة x أى أن y دالة فى (x) .

وفى الدالة الثانية عبرنا عن x بدلالة y أى أن x دالة فى (y) .

ويُطلق على كل من الدالتين $y = x^2$ ، $x = \sqrt{y}$ بالدوال العكسية .

وكذلك إذا كانت $y = a^x$ فــإن $\leftarrow$ $x = \log_a y$

، إذا كانت $y = \sin x$ فــإن $\leftarrow$ $x = \sin^{-1} y$