

الباب الأول

مبادئ التحليل الرياضى ، الفئات ، الأعداد

١-١ :- عام :

التحليل الرياضى له فروع كثيرة من فروع الرياضيات وتجمع فيما بينها بعض الخواص ، فهى تهتم بدراسة العلاقات الكمية فى العالم الحقيقى وتمثل هذه العلاقات كما هو الحال فى علم الحساب بمقادير عددية ، غير أن علم الحساب والجبر يدرس فى الغالب المقادير الثابتة التى تُميز الحالة التى نحن بصدها .

فى حين يتناول التحليل الرياضى المقادير المتغيرة والتى تحدد سير العمليات وعند التعرض للعلاقة والارتباط بين المقادير المتغيرة فإنه ينشأ لنا مفهوم الدالة والنهيات . وفروع التحليل الرياضى متعددة مثل حساب التفاضل والتكامل ونظرية المتسلسلات ونظرية المعادلات التفاضلية . وقد ظهرت مبادئ طرق التحليل الرياضى عند قدماء الإغريق مثل أرشميدس وتطورت ببطء إلى أن جاء القرن السابع عشر حيث قام كل من اسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) وعالم الرياضيات الإنجليزى والفيلسوف الألمانى جوتفريد ولهلم ليبنتز (١٦٤٦ - ١٧١٦) ، قاما وبصورة مستقلة بوضع مفهوم لحساب التفاضل والتكامل بصفة عامة وكذلك بالنسبة للمتسلسلات والمعادلات التفاضلية وقام أويلر بعد ذلك فى القرن ١٨ بتطوير مفهوم المتسلسلات والمعادلات التفاضلية كما قام أويلر أيضاً بوضع أسس لفروع أخرى من فروع التحليل الرياضى وقد اكتمل مفهوم هذه العلوم فى القرن التاسع عشر بجهود علماء كثيرين منهم كوشى فى فرنسا وبرلمان فى ألمانيا .

٢-١ :- الفئات Sets

الفئة عبارة عن مجموعة من الأشياء محددة تحديداً واضحاً وتُعرف الأشياء المكونة للفئة بالعناصر ، عناصر الفئة أو مكونات الفئة أو أعضاء الفئة element or member

وقد لا تكون هنالك صفة مميزة تجمع بين هذه العناصر وقد تكون غير ذات معنى إلا أنها تكون محددة تحديداً واضحاً .

الإ أنه فى الغالب وخاصة من الناحية العملية ، عادة ما تجمع الفئة الواحدة بين مجموعة من العناصر ذات صفة مميزة واحدة أو أكثر .

ومن أمثلة الفئات :

$$1) S_1 = \{2, 4, 6, 8\}$$

وهى عبارة عن فئة عناصرها عبارة عن الأعداد الزوجية الأكبر من الصفر والأقل من 10

$$2) S_2 = \{ \text{السبت ، الأحد ، الإثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة} \}$$

وهى فئة تجمع بين أيام الإسبوع وعدد عناصرها سبعة . وفى الفئات لا يهم ترتيب العناصر فمثلا فى الفئة S_1 نجد أن :

$$S_1 = \{2, 4, 6, 8\} = \{8, 2, 6, 4\} = \{4, 8, 2, 6\}$$

وهذه الفئات متساوية لتساوى عناصرها ، مهما اختلف الترتيب فى العناصر وكذلك

الفئة التى تجمع طلاب السنة النهائية فى إحدى الكليات والذين تقل أعمارهم عن 22

عاماً ، مثلاً ، وهى فئة تجمع كل الطلاب الذين ينطبق عليهم هذا الشرط بالرغم من أنه

قد لا يكون هنالك أى صفة مميزة تجمع بين هؤلاء الطلاب سوى أن أعمارهم أقل من

22 عاماً وطلاب فى السنة النهائية لهذه الكلية .

وكذلك الفئة التى تجمع الرجال الأطول من 2 متر ، وهى فئة تجمع بين كل الرجال

الأطول من 200 cm مهما اختلفت أعمارهم أو أوزانهم أو مؤهلاتهم أو جنسياتهم أو

.... ويرمز للفئات بحروف كبيرة A, B, C مثلاً بينما يُرمز لعناصر الفئة برموز من

حروف صغيرة مثل a, b, c, d, \dots

فإذا كانت لدينا الفئة A ومكوناتها a, b, c, h مثلاً فإنه يمكن كتابتها كالتالى .

$$A = \{a, b, c, h\}$$

وأى عنصر من هذه العناصر ينتمى إلى الفئة A ويُعبر عن هذا كما يلي :-

$$c \in A , a, b, h \in A , b \in A , a \in A$$

بينما العنصر u مثلاً فهو لا ينتمى للفئة A ويعبر عن هذا كما يلي :-

$u \notin A$ أى أن u لا تنتمى إلى A . ويمكن كتابة عناصر أى فئة بطريقتين وهما :-

الطريقة الأولى :-

وهى أن نكتب عناصر الفئة كلها بالتفصيل

ومثال ذلك : $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

وعناصر هذه الفئة هى الأعداد الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من 17 .

الطريقة الثانية :-

وهى أن نكتب الفئة كالتالى بدون كتابة للعناصر ذاتها

$S = \{ \text{الأعداد الزوجية الأكبر من صفر والأصغر من 17} \}$

مثال :-

بالطريقة الأولى :-

$S = \{ \text{السبت ، الأحد ، الإثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة} \}$

بالطريقة الثانية :- $S = \{ \text{أيام الإِسْبوع} \}$

الفئة الخالية : Empty set

يُطلق على الفئة التى لا تحتوى على أية عناصر ، بالفئة الخالية ويُرمز لها بالرمز Φ

$\Phi = \{ \}$

ويقال للفئة A بأنها فئة جزئية من الفئة B إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمى للفئة

B ويعبر عن هذا كما يلي $A \subset B$

وتُقرأ : A فئة جزئية من B "subset" أو A محتواه contained فى B أو B تحتوى

A والأخيرة تكتب هكذا $B \supset A$

٣-١ :- الأعداد

قام الإنسان منذ قديم الأزل بعمليات عد الأشياء التى حوله ومن هنا ظهرت الأعداد $1, 2, 3, \dots$ وتُعرف هذه الأعداد الآن بالأعداد الطبيعية ، ثم ظهرت الكسور نتيجة لعمليات تقسيم وتوزيع الأشياء وقياس المقادير المتصلة المختلفة مثل الوزن والطول وبتطور علم الجبر كأحد فروع الرياضيات ظهرت الأعداد السالبة وكذلك الصفر فى

أوروبا في القرن السابع عشر فقط في حين أنها كانت معروفة في الصين منذ حوالي 2000 عام وفي الهند كذلك منذ حوالي 1500 عام ويُطلق على كل من الأعداد الصحيحة (أو الطبيعية) مثل 1,2,3,... وكذلك على الأعداد السالبة مثل $-1, -2, -3, \dots$ وكذلك الكسور بالأعداد القياسية أو المنطقية .

الأعداد الحقيقية : "R" Real Numbers

كثير من الفئات ، تتكون عناصرها أو أجزائها من أعداد . والأعداد إما أن تكون حقيقية Real أو مركبة Complex ويرمز للأعداد الحقيقية بالحرف الأول من كلمة *Real* $\leftarrow R$ والأعداد الحقيقية تنقسم بدورها إلى :-

(١) الأعداد الطبيعية : "N" Natural Numbers

ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة *Natural* $\leftarrow N$
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

وتعرف كذلك بالأعداد الصحيحة الموجبة وتستخدم لعد عناصر الفئة . ومن ضمن عناصر فئة الأعداد الطبيعية ، هنالك مجموعة عناصر عبارة عن أعداد لا تقبل القسمة إلا على الواحد الصحيح أو على نفسها .

ويُطلق على مجموعة هذه العناصر بالأعداد الأولية "P" Prime Numbers

ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة *Prime* $\leftarrow P$
 والأعداد الأولية هي :-

$$P = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \dots\}$$

وواضح أن الأعداد الأولية هي فئة جزئية من الأعداد الطبيعية . $P \subset N$

كما وأن هنالك الأعداد الزوجية "E" Even Numbers وهي فئة جزئية من الأعداد

الطبيعية ويرمز لها بالحرف الأول من كلمة *Even* $\leftarrow E$

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$E \subset N$$

وبصورة عامة فإن العدد الزوجي يمكن كتابته في الصورة : $E = 2n$

حيث n عدد طبيعي ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية $\therefore E = \{2n, n \in N\}$

وهناك أيضاً الأعداد الفردية "O" Odd Numbers وهي فئة جزئية من فئة الأعداد

الطبيعية ويُرمز لها بالحرف الأول من كلمة Odd ← O

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$O \subset N$$

وبصورة عامة فإن العدد الفردى يمكن كتابته فى الصورة $O = 2n + 1$, $n \in N$

فمثلاً

$$O = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$= 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$= 2 \times 5 + 1 = 11$$

$$\therefore O = \{2n + 1\} \quad , \quad n \in N$$

ويلاحظ أن حاصل جمع عددين طبيعيين مثل " $a + b$ " أو حاصل ضربهما " $a \cdot b$ " للعددين الطبيعيين a, b ، هو عبارة عن عدد طبيعى آخر .

وهذا ما يدعونا غالباً إلى القول بأن فئات الأعداد الطبيعية مُقفلة أى تنطبق عليها عمليات الجمع والضرب .

(٢) الأعداد الصحيحة : "Z" Integers Numbers

وهى الأعداد $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$ ويرمز لها بالرمز Z

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

وبعض عناصر هذه الفئة ، عبارة عن الأعداد الصحيحة السالبة والصفر

Negative Integers Numbers

$$\bar{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0\} \quad \bar{Z} \text{ ويرمز لها بالرمز } \bar{Z}$$

وباقى عناصر هذه الفئة هى الأعداد الصحيحة الموجبة

$$^+Z = \{1, 2, 3, \dots\} \quad ^+Z \text{ ويرمز لها بالرمز } ^+Z$$

وقد نشأت الأعداد الصحيحة السالبة من حل معادلات مثل : $X + b = C$

حيث C, b أعداد طبيعية ، مما أدى إلى عمليات الطرح أو عكس عمليات الجمع وهُنا

تُصبح $X = C - b$ وكل الأعداد الطبيعية تنتمى إلى فئة الأعداد الصحيحة ، أى $N \subset Z$

(٣) الأعداد القياسية أو الكسرية : "Q" Rational Numbers

وهى عبارة عن الأعداد التى يمكن وضعها فى الصورة $\frac{a}{b}$ مثل $\frac{-5}{3}$, $\frac{1}{3}$ وقد نشأت هذه الأعداد من حل بعض المعادلات مثل $bx = a$ وذلك لجميع الأعداد الصحيحة للمقدارين a, b حيث $b \neq 0$ ، وبالتالى فإن $x = \frac{a}{b}$ مما أدى إلى ظهور عمليات القسمة وهى عكس عملية الضرب وبالتالى $x = \frac{a}{b}$ ، أ ، $a \div b$ حيث a هى البسط ، b هى المقام فإذا رمزنا للأعداد القياسية بالرمز Q فإن : $Q = \frac{a}{b}$ حيث :-

$$a = \text{أحد عناصر الأعداد الصحيحة} ، a \in Z ،$$

$$b = \text{أحد عناصر الأعداد الطبيعية} ، b \in N ، b \neq 0$$

أمثلة : $0.07 = \frac{-7}{100}$ ، $0.51 = \frac{51}{100}$ ، $\frac{4}{7}$ ، $\frac{11}{2}$ ، $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ والعدد 57 يمكن كتابته

$\frac{57}{1}$ وبذلك فإن أى عدد قياسى n يمكن كتابته فى صورة كسر $\frac{n}{1}$ وبذلك فإن كل

الأعداد الصحيحة تُعتبر فئة جزئية من الأعداد القياسية أى $N \subset Z \subset Q \subset R$.

(٤) الأعداد غير القياسية "اللاقياسية" أو الأعداد الصماء Irrational Numbers:

ويرمز لها بالرمز Q' وهى عبارة عن الأعداد التى لا يمكن التعبير عنها فى الصورة الكسرية $\frac{a}{b}$ حيث a, b أعداداً صحيحة . والأعداد اللاقياسية أو الصماء ، تكون مثل

$\sqrt{3}$ والنسبة التقريبية π "ط" ، $\sqrt{2}$ ، $\log 3$ ، ويلاحظ أنه لا يمكن وضعها فى الصورة

$\frac{a}{b}$ حيث a, b أعداداً صحيحة ، $b \neq 0$ وكل من فئة الأعداد القياسية وفئة الأعداد

غير القياسية تُعرف بفئة الأعداد الحقيقية أى أن اتحاد كل من Q ، Q' هو R - اتحاد

كل من Q, Q' " $R = Q \cup Q'$. وذلك لتميزها عن فئة الأعداد التخيلية

والجذور التربيعية لمعظم الأعداد تكون لا قياسية ويجب أن لا نغفل أن π عدد لا قياسى

ولكن $\frac{22}{7}$ أو 3.14 هى قيمة تقريبية لهذا العدد اللاقياسى .

وفى بعض الأحيان نلجأ إلى التعبير عن الأعداد القياسية (المنطّقة) بأعداد تقريبية فمثلاً قد نعتبر قيمة الكسر $\frac{1}{3}$ هي 0.33 فقط وهي أقل من $\frac{1}{3}$ أو قد نعتبرها 0.3333 وهي أيضاً أقل من $\frac{1}{3}$ وفى الحالتين السابقتين 0.33 و 0.3333 فإننا أخذنا قيمة تقريبية للكسر أقل منه أى أقل من $\frac{1}{3}$ وقد تقرب قيمة الكسر إلى 0.34 أو إلى 0.334 أو إلى 0.3334 وهي أكبر من $\frac{1}{3}$ ويتوقف هذا على درجة الدقة المطلوبة .

ولذلك فإن الأعداد القياسية (المنطّقة) ، الموجودة ليست كافية فى تطبيقاتنا العملية عند قياس سمك شريحة معدنية رقيقة مثلاً وليكن سمكها مساوياً للعدد 0.058mm ويجب أن لا ننسى هنا درجة الدقة فى كل جهاز مُستخدم فى القياس ومدى الدقة المطلوبة . إلا أنه فى علم الرياضيات فإنه يفترض الدقة المطلقة فى القياس وعلى ذلك كان لزاماً إدخال أعداد جديدة وهي الأعداد الصماء أو اللاقياسية أو اللامنطقة وهي تُعبر عن القياس غير المقاس بوحدات القياس (مثل محيط الدائرة) .

فمثلاً لا يمكن التعبير عن طول قطر مربع طول ضلعه L بالأعداد القياسية " طول القطر $L\sqrt{2} =$ " أو عن جيب تمام الزاوية 30° وهو يساوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو عن النسبة بين محيط الدائرة إلى قطرها $= \pi \frac{22}{7}$ تقريباً "

وبصفة عامة فإنه لا يمكننا التعبير عن النسبة بين المستقيمتين غير القياسية بالأعداد القياسية فمثلاً العدد $\pi = \frac{22}{7}$ تقريباً هو عدد لا قياسى " أصم " وله قيمة تقريبية = 3.14159 وهي أقل من العدد ذاته كما أنه ذو قيمة تقريبية وطبقاً لدرجة الدقة = 3.14160 وهي أكبر من العدد ذاته والفرق بين هاتين القيمتين التقريبتين هو 0.00001 وعلى ذلك فإن خطأ كل منهما لا يتجاوز فى قدره المطلق العدد 0.00001 وإذا اقتضى الأمر ألا يزيد الخطأ عن المقدار 0.000001 فإننا نجد القيمتين :

3.141592 وهي أقل من π

3.141593 وهي أكبر من π

وعلى هذا فإن العدد اللاقياسي " الأسم أو اللا منطق " لا يمكن أن يكون مساوياً للعدد المنطق بالضبط ، إلا أنه يمكننا أن نجد لكل عدد لا قياسي ، أعداداً قياسية مساوية له بالتقريب كأن تكون أكبر منه قليلاً أو أصغر منه قليلاً وبذلك فإنه يصبح بالإمكان جعل الخطأ صغيراً بدرجة كافية .

ولإيضاح الأعداد الصماء بصورة أكثر ؛ لنعتبر أن لدينا مربع طول ضلعه $x \text{ Cm}$ مثلاً ، باعتبار وحدة القياس هي السنتيمتر فإنه يمكننا أن نرسم مربعات طول ضلعها $x \text{ Cm}$ ، $0.7x$ ، $3x$ ، $\frac{5}{6}x$ وقد لا نكتب وحدة القياس فنكتب $0.7x$ أو $3x$ إذا لم يكن هنالك التباس . وتستخدم عادة في القياس ، أعداد جذرية موجبة في غالب الأحيان فإنها تعطى قيمة هذا الطول مُقربة بتفريط أو بإفراط " زيادة أو نقصاناً "

فالمربع الذى طول ضلعه $1 \text{ Cm} =$ مساحته 1 Cm^2

، والمربع الذى طول ضلعه $2 \text{ Cm} =$ مساحته 4 Cm^2

، والمربع الذى طول ضلعه $\frac{5}{2} \text{ Cm} =$ مساحته 6.25 Cm^2

ولكن المشكلة تنشأ من أنه إذا كان لدينا مربع معروفة مساحته فهل سيكون طول ضلعه فى جميع الحالات عدداً جذرياً " قياسياً " موجبا؟؟

والأمر قد يكون سهلاً فى بعض الحالات كما يتضح من الأمثلة التالية :-

المساحة $= 16 \text{ Cm}^2$ ← طول الضلع $= 4$

، المساحة $= \frac{25}{4} \text{ Cm}^2$ ← طول الضلع $= 2.5 \text{ Cm} = \frac{5}{2}$

فالعدد الجذرى الموجب الذى مربعه $= 16$ هو العدد 4

، فالعدد الجذرى الموجب الذى مربعه $= \frac{25}{4}$ هو العدد $\frac{5}{2}$

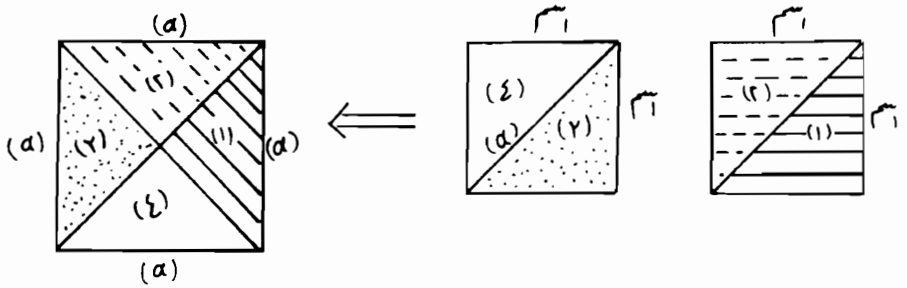
وبذلك فإن 4 هى الجذر التربيعى للعدد 16 ، $4 = \sqrt{16}$ ،

$\frac{5}{2}$ ، هى الجذر التربيعى للعدد $\frac{25}{4}$ ، $\frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$ ،

والآن ، سنقوم برسم مربعين على قطعة من الورق ، طول ضلع كل منهما 1 Cm أى أن مساحة كل منهما = وحدة المساحات = 1 Cm^2 ثم نقوم بتقسيم كل مربع إلى قسمين فى اتجاه القطر ونلون كل جزء منهما أو نميزه ، ثم نقوم بتجميعها مرة ثانية " 4 أجزاء " لعمل مربع واحد كبير وستكون مساحة هذا المربع 2 Cm^2 وطول ضلع كل

$$a = \sqrt{2} = \sqrt{1+1} = \text{طول قطر المربع الصغير}$$

$$\therefore a^2 = 2 \text{ Cm}^2 \quad \text{مساحة المربع}$$



شكل (١-١)

وقد برهن الرياضيون القدامى منذ حوالى 2000 عام أن هذا القياس لـ : a لا ينتمى إلى المجموعة Q وسموه عدداً لا جذرياً ، لا قياسياً أو أصم وكان هذا أول مثال لعدد لا جذرى . وحيث أن $\sqrt{9} = 3$ لأن $9 = 3^2$ فإننا نسمى العدد a الذى مربعه $2 =$ بالجذر التربيعى للعدد 2 ونكتبه $\sqrt{2}$

وهناك أمثلة كثيرة للأعداد اللاجذرية مثل : $\sqrt{3} , \sqrt{5} , \sqrt{6} , \sqrt{7} , \sqrt{8} , \sqrt{10}$ وعلمنا مما سبق أن أى عدد أو كل عدد قياسى " جذرى " يمكن أن يكتب فى الصورة

$$\frac{a}{b} \quad \text{حيث } a \in \mathbb{Z} , b \in \mathbb{N} , b \neq 0$$

وقد برهن الرياضيون أن $\sqrt{2}$ وبالمثل $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، لا يمكن أن تكتب على

الصورة $\frac{a}{b}$ وبالمثل جميع الأعداد اللاجذرية (اللاقياسية)

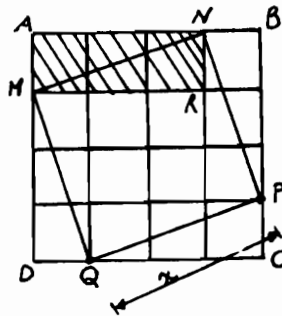
وإذا كان لدينا مكعب حجمه 8 Cm^3 فإن طول ضلعه 2 Cm لأن $2^3 = 8$ هي الجذر التكعيبي للعدد 8 وتكتب $2 = \sqrt[3]{8}$ ولكن إذا كان لدينا مكعب حجمه 2 Cm^3 ، فهل سيكون قياس طول ضلعه عدد جذري موجب ؟

وقد أجاب الرياضيون عن هذا التساؤل بالبرهان بأن هذا القياس لا ينتمى هو الآخر للمجموعة Q وكتبوه $\sqrt[3]{2}$

ومن أمثلة هذا الكثير مثل : $\sqrt[3]{4}$ ، $\sqrt[3]{9}$ ، $\sqrt[3]{100}$

وهذا يوصلنا إلى الحقيقة التي ذكرناها سابقا ، أن الأعداد الجذرية الموجبة ، غير كافية للقياس ولنعتبر عدداً أصم أو لا مُنطق أو لا قياسي أو لا جذري ، آخر مثل $\sqrt{10}$.

ولنعتبر مربعاً $ABCD$ طول ضلعه 4 Cm ، قُم بتجزئته إلى عدد 16 مربعاً متساوياً ، فإذا أخذنا النقط M على AD ، Q على DC ، P على CB ، N على AB ، ثم AB كما بالشكل بحيث يكون كل من : DM ، QC ، PB ، NA مساوياً 3 Cm ، ثم ننشئ المستطيل $AMRN$ ومساحته 3 Cm^2 ويمكننا برهان أن الشكل $MQPN$ مربع ومساحته 10 Cm^2 وقياس أو طول ضلع هذا المربع $= \sqrt{10}$ ، فالمساحة : $x^2 = 10 \text{ Cm}^2$



شكل (٢-١)

وسوف نحاول إيجاد بعض القيم لـ x

وتقل بقيمة صغيرة جداً عن 10 ، $3^2 = 9$

وتزيد بقيمة كبيرة جداً عن 10 . $4^2 = 16$

$$\therefore 3 < x < 4$$

وتقل بقيمة صغيرة جداً كذلك $(3.1)^2 = 9.61$

وتقل بقيمة صغيرة كذلك $(3.16)^2 = 9.9856$

وتزيد بقيمة صغيرة عن 10 $(3.17)^2 = 10.0489$

$$\therefore 3.16 < x < 3.17$$

ويمكن أن نستمر بهذه الطريقة لمحاولة إيجاد قيمة أقرب ما تكون وعلى حسب درجة الدقة المطلوبة إلا أن العملية لن تنتهى أبداً ولن يمكننا الحصول على عدد قياسي جذرى مربعه $= 10$ تماماً وفي الحقيقة فإن $\sqrt{10}$ لا يمكن التعبير عنه كعدد جذرى

قياسى فى الصورة $\frac{a}{b}$ ولذلك يطلق عليه عدداً لا قياسياً

والجذور التربيعية لمعظم الأعداد هي لا قياسية (معدداً $\sqrt{4}$ ، $\sqrt{9}$ ، $\sqrt{16}$ مثلاً) ، π هي أيضاً عدداً لا قياسياً ويجب أن لا ننسى أن 3.14 ، $\frac{22}{7}$ هي مجرد قيمة تقريبية للعدد π

$$\sqrt{10} \equiv 3.1622777 \quad \text{ويلاحظ أن}$$

مقرباً إلى جزء من عشرة من المليون ، إلا أن مربع هذا العدد لا يزال أقل من 10 ولا يعطى 10 تماماً ، أبداً .

٤-١ :- التمثيل الهندسى للأعداد الحقيقية :-

يمكن تمثيل أى عدد حقيقى x ينتمى إلى فئة الأعداد الحقيقية R ، $x \in R$ على خط مستقيم يُعرف بالمحور الحقيقى أو بخط الأعداد الحقيقية $Real\ line$ أو بمحور الأعداد . وكل عدد حقيقى تناظره نقطة واحدة فقط على الخط المستقيم وبنفس الطريقة فإنه يوجد عنصر واحد فقط من فئات الأعداد الحقيقية يناظر عنصراً واحداً فقط من فئات النقط على الخط المستقيم فالأعداد التى على يمين نقطة الأصل 0 هي فئة الأعداد الموجبة بينما الأعداد التى على يسار 0 هي فئة الأعداد السالبة ونقطة 0 ذاتها ليست موجبة ولا سالبة .

٥-١ :- العمليات الجبرية على الأعداد الحقيقية :-

إذا كانت R هي فئة الأعداد الحقيقية ، $\{a, b, c\}$ هي فئة جزئية منها :

$$\{a, b, c\} \subset R$$

فإن .:

(١) كل من حاصل $a+b$ ، $a.b$ ينتميان لفئة الأعداد الحقيقية ويُعرف هذا بقانون الإقفال

$$b+a = a+b \quad (٢)$$

$$a+(b+c) = (a+b)+c \quad (٣)$$

$$a . b = b . a \quad (٤)$$

$$a.(bc) = (ab).c \quad (٥)$$

$$a.(b+c) = ab+ac \quad (٦)$$

$$a+0 = 0+a = a \quad (٧)$$

$$a . 1 = 1.a = a \quad (٨)$$

(٩) لأي عنصر a ينتمي إلى R يوجد عدد z بحيث أن :

$$z+a=0 \quad \text{وتعرف } z \text{ بمعكوس } a \text{ في عمليات الجمع ، } z=-a$$

(١٠) لأي مقدار $a \neq 0$ يوجد عدد z ينتمي إلى R بحيث أن $az=1$ وتُعرف z

$$\text{بمعكوس } a \text{ في عمليات الضرب ، } z = \frac{1}{a} \text{ or } a^{-1}$$

٦-١ :- القيمة المطلقة للعدد الحقيقي :-

يرمز للقيمة المطلقة للعدد الحقيقي a بالرمز $|a|$ وتُعرف بمقياس أو معيار a ، a قد تكون موجبة أو صفر أو سالبة . ، $|a|$ هي المسافة بين العددين a ، 0 أي أنها

$$S(a, 0) \text{ فمثلا : -}$$

$$|4|=4, |-4|=4, |-\sqrt{3}|=|\sqrt{3}|=\sqrt{3}$$

$$|1|=1, |0|=0, \left| \frac{-2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

أي أن القيمة المطلقة للعدد الحقيقي a هي عدد حقيقي غير سالب أي أن $|a| \geq 0$

ويلاحظ الآتى :-

$$|a \cdot b \cdot c| = |a| |b| |c| \quad (١)$$

$$|a \cdot b \cdot c \dots r| = |a| |b| |c| \dots |r| \quad \text{ومنها}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (٢)$$

$$|a + b + c \dots r| = |a| + |b| + |c| + \dots |r| \quad \text{ومنها}$$

$$|a - b| \geq |a| - |b| \quad (٣)$$

والمسافة بين النقطتين x_1 ، x_2 وهما من الأعداد الحقيقية على محور الأعداد الحقيقية

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1| \quad \text{هى :-}$$

٧-١ :- الأسس والجذور :-

إذا ضربنا x فى نفسها عدد n من المرات

أى $x \cdot x \cdot x \dots$ ، n من المرات

ويمكن أن نعبر رياضياً عن حاصل الضرب السابق كالتالى :-

x^n وتُعرف x بالأساس ، n بالأس .

القواعد الأساسية للوغاريتمات :

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad (١)$$

$$x^{-4} \cdot x^5 = x^9 \quad \text{فمثلاً :}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (٢)$$

$$\frac{x^8}{x^3} = x^{8-3} = x^5 \quad \text{فمثلاً :}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \quad (٣)$$

$$(x^2)^3 = x^6 \quad \text{فمثلاً :}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \quad (٤)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} \quad \text{فمثلاً :}$$

ومن القاعدة الثانية ، :- ،

$$x^{m-n} = x^0 = 1 \quad \text{فإن} \quad m = n \quad \text{إذا كانت}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m}{x^m} = \frac{x^n}{x^n} = x^{m-m} = x^{n-n} = x^0 = 1 \quad \text{وهذا منطقي لأن :}$$

وذلك طالما $m = n$ وكذلك إذا كان لدينا المقدار x^{m-n} وكانت $m = 0$ فإن :-

$x^{m-n} = x^{-n}$ ومنها $\therefore x^{-n} = 1/x^n$ وإذا كانت $x^n = M$ فإن x تُعرف بأنها

الجذر النوني (الذى رتبته n) للمقدار M وتكتب هكذا $x = \sqrt[n]{M}$ وأحيانا فإنه قد

يوجد أكثر من جذر حقيقى رتبته n للمقدار M فمثلا $3^2 = 9$ ، والعدد 9 له

جذران تربيعيان حقيقيان وهما -3 ، 3 وإذا كان لدينا m ، n عددين صحيحين

$$\text{موجبين فإن المقدار } x^{m/n} \text{ يُمكن وضعه على الصورة } \sqrt[n]{x^m}$$

٨-١ :- اللوغاريتمات :-

إذا كانت $x^m = N$ فإن m تُعرف بأنها لوغاريتم المقدار N للأساس x وتكتب

$$m = \log_x N \quad \text{كالتالى :}$$

$$\log_c a \cdot b = \log_c a + \log_c b \quad ،$$

$$\log \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b \quad ،$$

$$\log_c a^b = b \log_c a \quad ،$$

ويُستخدم عادة فى اللوغاريتمات أساسان وهما الأساس 10 ويُعرف بنظام بريجزيان

والأساس e ويُعرف بالنظام النابيريى حيث $e \cong 2.71828.....$

٩-١ :- التباينات (اللاتعادلية)

إذا كان لدينا $x - y =$ عددا موجباً فإنه يمكن أن نُعبر عن ذلك بأن x أكبر من y أو

y أصغر من x ويُعبر عنهما على الترتيب كالتالى $x > y$ أو $y < x$ وإذا كان من

الممكن أن يكون $x = y$ فإنه يمكن التعبير عن هذه الحالة كالتالى $x \geq y$ أو $y \leq x$

وتكون x على محور تمثيل الأعداد الحقيقية واقعة على يمين y

أمثلة :-

(١) $x \leq a$ يعني ذلك أن x عدد حقيقي من الممكن أن يكون مساويا للعدد a أو أقل من a

(٢) $-6 > -5$ ويمكن كتابتها $-6 < -5$

(٣) $6 < 7$ ويمكن كتابتها $7 > 6$

قواعد المتباينات الأساسية :-

إذا كان لدينا a, b, C أعداداً حقيقية فإنه :-

$$\text{" قانون الثلاثية " } \left\{ \begin{array}{ll} a > b & \text{إما} \\ b > a & \text{، أ} \\ a = b & \text{، أ} \end{array} \right.$$

٢- إذا كانت $a > b, b > c$ فإن $a > c$ " قانون الإنتقالية "

٣- إذا كانت $a > b$ فإن $a + h > b + h$

٤- إذا كانت $a > b, h > 0$ فإن $ah > bh$

٥- إذا كانت $a > b, h < 0$ فإن $ah < bh$

١٠-١ :- الفترات على خط الأعداد الحقيقي :-

(١) الفترة المفتوحة :- **Open interval**

إذا كان a, b عددين حقيقيين وبمبث أن $a < b$ فإن الفترة المفتوحة من a إلى b عبارة عن مجموعة الأعداد x التي تُحقق المتباينة $a < x < b$ ويرمز للفترة المفتوحة بالرمز (a, b) أو بالرمز $]a, b[$ $i.e (a, b) = \{a < x < b, x \in R\}$

(٢) الفترة المغلقة (المَقْفلة) :- **Closed interval**

إذا كان a, b عددين حقيقيين ، $a < b$ فإن الفترة المغلقة من a إلى b عبارة عن مجموعة الأعداد x التي تُحقق المتباينة $a \leq x \leq b$ ويرمز للفترة المغلقة بالرمز $[a, b]$ أي أن كل من النهايتين a, b قد أُضيفت لعناصر الفترة $a < x < b$

(٣) الفترة النصف مفتوحة :-

وهي مجموعة الأعداد التي تحقق المتباينة $a < x \leq b$ ويرمز لها بالرمز $(a, b]$

(٤) الفترة النصف مغلقة :-

وهي مجموعة الأعداد التي تحقق المتباينة $a \leq x < b$ ويرمز لها بالرمز $[a, b)$

(٥) فئة الأعداد الحقيقية R عبارة عن الفترة المفتوحة $(-\infty, \infty)$

$$i.e R = (-\infty, \infty) = \{x: -\infty < x < \infty\}$$

ومجموعة الأعداد التي أكبر من a تُسمى بالفترة (a, ∞)

بينما مجموعة الأعداد التي أصغر من a تُسمى بالفترة $(-\infty, a)$

ومن ذلك فإن مجموعة كل الأعداد الحقيقية هي الفترة $(-\infty, \infty)$ والفترة سواء كانت مفتوحة أو مغلقة يُطلق عليها بمصطلح واحد " الفترة " .

١-١١ :- المقادير المتغيرة والمقادير الثابتة **Variables and Constants** :-

المقدار المتغير هو المقدار الذي يمكن أن يأخذ قيماً مختلفة في المسألة المطروحة في حين أن المقدار الثابت يظل محتفظاً بنفس قيمته تحت نفس شروط المسألة وقد يكون المقدار الثابت في مسألة مطروحة هو مقدار متغير في مسألة أخرى وفي التعبيرات والصيغ الجبرية فإنه تُستعمل رموزاً للتعبير عن المقادير أو الأعداد ، بعضها يمثل مقدار متغير وبعضها يمثل مقدار ثابت .

مثال (١) : لنعتبر الصيغة الرياضية المثلثة لحجم الكرة V ، $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

حيث r = نصف القطر فإن :

(١) كل من V ، r متغيران بتغير حجم الكرة ويطلق عليهما بالمتغيرات

(٢) كل من π ، $\frac{4}{3}$ مقادير ثابتة مهما كان حجم الكرة

مثال (٢) : في حالة سقوط جسم من وضع السكون فإن العلاقة المعبرة عن المسافة

المقطوعة في أي لحظة هي :- $S = \frac{1}{2} g t^2$

حيث تُمثل S ؛ المسافة المقطوعة في الزمن t ، $g =$ عجلة الجاذبية الأرضية . فإن :

(١) كل من t ، S عبارة عن مُتغيرات

(٢) g ، $\frac{1}{2}$ مقادير ثابتة

١٢-١ :- المتغير التابع والمتغير المستقل

-: Dependent and independent variables

ويمكننا أن نلاحظ من المثالين السابقين أن هنالك نوعين من المتغيرات ففى حالة :

$V = \frac{4}{3} \pi r^3$ فإنه بزيادة أو نقص r ، فإن الحجم V يزيد أو ينقص على الترتيب أى

أن التغير فى V يعتمد على التغير فى r .

وفى حالة :- $S = \frac{1}{2} gt^2$ فإن مسافة السقوط S تعتمد على الزمن t وعموماً فإنه فى

كل الصيغ والعلاقات الرياضية ، هنالك نوعين من المتغيرات ، المتغير المستقل والمتغير

التابع :-

(١) فالمتغير الذى تعتمد قيمته على قيمة ومقدار متغير آخر يعرف بالمتغير التابع

dependent Variable مثل V فى مثالنا السابق عن الكرة .

(٢) والمتغير الذى يؤدي التغير فى قيمته إلى قيم مناظرة فى المتغير الآخر ، يُعرف بالمتغير

المستقل مثل t ، r فى الأمثلة السابقة .

وعند التعبير عن معادلة من الدرجة الثانية فى صورتها العامة فإن :- $y = ax^2 + bx + c$

فإن كل من a ، b ، c ثوابت تُستخدم لتحديد مدى العلاقة بين x ، y فى حين أن x

هى المتغير المستقل " الذى يبدأ فى التغير " وينتج عن هذا التغير ، تغير مناظر فى y .

ولذلك فإن y هى المتغير التابع .