

الباب الخامس عشر

التفاضل الجزئى

Partial Differential .

١٥-١ - عام

يجب أن لا يغيب عن الذهن فى كل ما درسناه سابقاً أن عمليات إيجاد المشتقة الأولى كانت للدوال ذات المتغير المستقل الواحد أى أن : $y = f(x)$ إلا أنه فى كثير من الحالات تكون الكمية y مرتبطة بأكثر من متغير مستقل (إثنين أو أكثر) .

وفى هذه الحالة فإن عملية إيجاد المشتقات الجزئية تكون بنفس أسلوب إيجاد مشتقات الدوال ذات المتغير الواحد مع الاختلاف فى طريقة التعامل مع باقى المتغيرات المستقلة عند إجراء التفاضل أو الاشتقاق لأحد هذه المتغيرات .

فمثلاً إذا كانت $y = f(x, z)$ فإنه عند حساب المعامل التفاضلى الجزئى لها بالنسبة للمتغير x فإن المتغير الآخر z يعامل معاملة المقدار الثابت طبقاً لقواعد التفاضل المعتادة. وعند إجراء التفاضل بالنسبة إلى المتغير z ، فإنه وبالمثل ، يُعامل x معاملة المقدار الثابت .

وعموماً فإنه إذا كانت y دالة فى أكثر من متغيرين فإنه عند إيجاد المشتقة الجزئية لأحد هذه المتغيرات ، فإن بقية المتغيرات تُعامل معاملة المقدار الثابت .

١٥-٢ :- التفاضل الجزئى للدوال ذات المتغيرين :-

(١) المشتقة الجزئية الأولى :-

وفى الدوال ذات المتغير الواحد مثل $y = f(x)$

فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة y بالنسبة للمتغير المستقل x تعبر عن معدل التغير اللحظى فى المتغير التابع y والذى يحدث نتيجة لتغير طفيف فى المتغير المستقل x .

والآن ماذا تعنى المشتقة الأولى لدالة فى متغيرين مستقلين مثل x, z أى أن :-

$$y = f(x, z)$$

سنجد أن المشتقة الأولى الجزئية عبارة عن معدل التغير في المتغير التابع "y" الذى يحدث نتيجة لتغير طفيف في المتغيرين المستقلين x, z ولكن كل منهما على حدة .
ولنعتبر الحالة التالية :-

حجم الغاز يعتمد على كل من الضغط ودرجة الحرارة المعرض لها فإذا فرضنا أن :-

V = حجم الغاز

P = ضغط الغاز

t = درجة حرارة الغاز

ويُعبر عن العلاقة هذه فى الصيغة التالية :-

$$V = k \frac{t}{p}$$

حيث k ثابت " حجم الغاز يتناسب طردياً مع درجة حرارته بينما يتناسب عكسياً مع الضغط المعرض له فإذا زادت الحرارة زاد الحجم والعكس بالعكس وإذا زاد الضغط قل الحجم والعكس بالعكس " .

(١) ولنفترض أن الحرارة متغيرة وأن الضغط يبقى ثابتاً .

$$\therefore \frac{dv}{dt} = k \times \frac{1}{p} \quad \dots\dots\dots (١)$$

(٢) ولنفترض أن الضغط يتغير مع بقاء درجة الحرارة ثابتة .

$$\therefore \frac{dv}{dp} = k \cdot \frac{t}{-p^2} = -k \frac{t}{p^2} \quad \dots\dots\dots (٢)$$

ومن ذلك نلاحظ فى هذه الحالة أنه لما كان هنالك متغيران فقد تكونت لنا مشتقتان

$$(١) ، (٢) \text{ أى } \frac{dv}{dp} ، \frac{dv}{dt}$$

ويطلق على هذه المشتقات بالمشتقات الجزئية

Partial derivatives or Partial differential coefficients

وقد اختيرت رموز خاصة للتعبير عن هذه المشتقات الجزئية . فبدلاً من الحرف d (كما

فى $\frac{dy}{dx}$) نضع الرمز "∂" ويُقرأ [التفاضل الجزئى] Partial differential

وبذلك فإن المشتقات الجزئية السابقة في (١) ، (٢) يُعبر عنها كالتالي :-

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{1}{p} \quad \dots\dots\dots (٣)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{kt}{p^2} \quad \dots\dots\dots (٤)$$

وتعنى (٣) أن الحجم V قد تم تفاضله بالنسبة إلى t مع بقاء p ثابتة في حين تعنى (٤) أن الحجم V قد تم تفاضله بالنسبة إلى p مع بقاء t ثابتة .

وعموماً إذا كانت z دالة في x, y أى $z = f(x, y)$ فإن :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{عندما } x \text{ متغيرة ، } y \text{ ثابتة}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{عندما } y \text{ متغيرة ، } x \text{ ثابتة}$$

ويمكن تعريف المعامل التفاضلى الجزئى كالتالى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(y + \Delta y, x) - f(x, y)}{\Delta y}$$

أمثلة :-

(١) اوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :

$$y = 5x^2 + 6z^3$$

الحل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 10x + 0 = 10x$$

" ثابت = $6z^3$ "

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 + 18z^2 = 18z^2$$

" ثابت = $5x^3$ "

(٢) اوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$y = 8x^2z + 4x^3z^2 - 5z^3x$$

الحل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (8z) \times 2x + (4z^2) \times 3x^2 - (5z^3) \times 1$$

$$= 16xz + 12x^2z^2 - 5z^3 \quad (z = \text{ثابت})$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = (8x^2) \times 1 + (4x^3) \times 2z - (5x) \times 3z^2$$

$$= 8x^2 + 8x^3z - 15xz^2 \quad (x = \text{ثابت})$$

(٣) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 + y^3$$

الحل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 10xy + y^2 + 0 \quad (y = \text{ثابت})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 5x^2 \times 1 + 2xy + 3y^2 \quad (x = \text{ثابت})$$

(٤) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = \sin x + y^2 \cos x + e^{2y}$$

الحل :-

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos x + 2e^{2y} \quad (x = \text{ثابت})$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - y^2 \sin x \quad (y = \text{ثابت})$$

(٥) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

الحل :-

باستخدام قواعد تفاضل الدالة الأسية فإن :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \times 2x = 2x e^{x^2+y^2} \quad (y = \text{ثابت})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \times 2y = 2y e^{x^2+y^2} \quad (x = \text{ثابت})$$

(٦) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$y = (4x^2 - 3z^3)^4$$

الحل :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4(4x^2 - 3z^3)^3 \times 8x$$

$$= 32x(4x^2 - 3z^3)^3, (z = \text{constant})$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 4(4x^2 - 3z^3)^3 \times -6z$$

$$= -24z(4x^2 - 3z^3)^3, (x = \text{constant})$$

(٧) فى دراسة لخطة تسويق منتجات أحد المصانع وُجد أن عدد الوحدات التى يبيعها المصنع سنوياً تعتمد على تطوير الأبحاث والإنفاق عليها وعلى تطوير الماكينات كذلك . وكانت العلاقة بين كمية المبيعات "y" ومصاريف الأبحاث "x" بالآلاف جنيه " ومصاريف تطوير الماكينات " z بالآلاف جنيه " كالتالى :-

$$y = f(x, z) = 1200x + 5000z - 10x^2 - 7z^3 - 30xz$$

فإذا افترضنا أن الشركة تنفق ما مقداره وحدة واحدة على الأبحاث (أى ألف جنيه) وخمس وحدات على تطوير الماكينات (خمسة آلاف جنيه) فإنه من المتوقع أن يكون عدد الوحدات المباعة كالتالى :-

$$y_{(1,5)} = 1200 \times 1 + 5000 \times 5 - 10 \times 1^2 - 7 \times 5^3 - 30 \times 1 \times 5$$

$$= 1200 + 25000 - 10 - 7 \times 125 - 150$$

$$= 26200 - 1035$$

$$= 25165 \quad \text{وحدة}$$

فإذا ما فرضنا أن المصنع يرغب فى زيادة المبالغ المخصصة على الأبحاث وتطويرها مما يساعد بالتبعية على رفعة جودة المنتج وسرعة بيعه .

ونريد أن نعرف مدى تأثير الزيادة المخصصة للأبحاث هذه على عدد الوحدات المتوقع بيعها .

فإنه بالتفاضل الجزئي الأول للدالة y بالنسبة إلى x يمكن الحصول على رقم تقديري (قريباً من الواقع) كما يلي :-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 1200 - 20x - 30z$$

ولما كان المطلوب هو حساب معدل التغير اللحظي عندما :- $x = 1$, $z = 5$

$$\begin{aligned} \therefore \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{(1,5)} &= 1200 - 20 \times 1 - 30 \times 5 \\ &= 1200 - 170 \\ &= 1030 \end{aligned}$$

وهذا يعنى أن زيادة الأبحاث بمقدار وحدة واحدة (ألف جنيه) تؤدي إلى زيادة متوقعة في كمية الوحدات المباعة قدرها 1030 وحدة .

ولكن كيف يمكننا معرفة مدى دقة هذا التوقع

لذلك ، يلزم إيجاد قيمة y عندما : $x = 2$, $z = 5$

أى عندما تزيد x من 1 وحدة إلى 2 وحدة نقدية .

$$\begin{aligned} \therefore y_{(2,5)} &= 1200 \times 2 + 5000 \times 5 - 10 \times 2^2 - 7 \times 5^3 - 30 \times 2 \times 5 \\ &= 2400 + 25000 - 40 - 7 \times 125 - 300 \\ &= 27400 - 1215 \\ &= 26185 \quad \text{وحدة} \end{aligned}$$

فإذا ما قارنا $y_{2,5}$ وهى تساوى 26185 وحدة بـ (1030 + 25165) أى 26185

ب : 26195

سنجد أن الفرق ضئيل جداً ومن هنا نجد أن المشتقة الجزئية قد أعطت نتائج قريبة جداً من المتوقع وبنسبة لا تتعدى 10 وحدات .

$$\text{أى } \frac{10}{26185} \text{ أى حوالى } \% 38 \times 10^{-5} \text{ أقل من } \% 0.04$$

والآن إذا ما رغبتنا في زيادة المبالغ المخصصة لتطوير المعدات والآلات بهذا المصنع بمقدار وحدة نقدية واحدة (1000 جنيه) أى أن Z ستزيد بمقدار واحد ، فإنه يمكن حساب

الزيادة المتوقعة في عدد الوحدات المباعة بحساب معدل التغير في y نتيجة لتغير z بمقدار وحدة واحدة .
 \therefore معدل التغير اللحظى :-

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 5000 - 21z^2 - 30x$$

$$\begin{aligned} \therefore \left[\frac{\partial y}{\partial z} \right]_{(1,5)} &= 5000 - 21 \times 5^2 - 30 \times 1 \\ &= 5000 - 525 - 30 \\ &= 4445 \quad \text{وحدة} \end{aligned}$$

بمعنى أن زيادة المبالغ المخصصة بمقدار وحدة واحدة في تطوير الماكينات قد أدى إلى زيادة في المبيعات بحوالى 4445 وحدة .

والآن يراد معرفة مدى الدقة في تقدير المبيعات المتوقعة عندما تكون مصاريف الأبحاث ١ وحدة . بينما تزداد مصاريف تطوير المعدات بمقدار وحدة واحدة لتصبح 6 وحدات .

$$\begin{aligned} \therefore y_{(1,6)} &= 1200 \times 1 + 5000 \times 6 - 10 \times 1^2 - 7 \times 6^3 - 30 \times 1 \times 6 \\ &= 1200 + 30000 - 10 - 1512 - 180 \\ &= 31200 - 1702 \\ &= 29498 \quad \text{وحدة} \end{aligned}$$

وبمقارنة هذه الكمية مع الكمية (29610 = 4445 + 25165)

نجد أن الفرق حوالى 112 وحدة وهو ليس كبيراً لأن نسبة الخطأ لا تتعدى

$$= \frac{112}{29498} = 37 \times 10^{-4} \text{ أقل من } 0.4\%$$

لاحظ أن الزيادة نشأت عن أن الدالة تربيعية في x بينما تكعيبية في z

وكلما زادت درجة أو قوة أحد المتغيرات ازداد الفرق المتوقع .

٢- المشتقة الجزئية الثانية :-

إن إيجاد المشتقة الثانية الجزئية للدوال ذات المتغيرين المستقلين لا يختلف فى حسابه عن

قواعد التفاضل المعروفة غير أنه يجب ملاحظة ما يلي :-

فى حالة $y = f(x)$ كان المتغير المستقل واحد وكانت المشتقة الأولى y واحدة وكذلك المشتقة الثانية واحدة فقط للدالة .

أما فى حالتنا هذه حيث يوجد متغيران مستقلان فإن المشتقة الجزئية الأولى عبارة عن

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ مشتقتين}$$

ومن هنا فإنه عند إيجاد المشتقة الجزئية الثانية سيكون لدينا الإشتقاقات التالية :-

$$Z = f(x, y) \quad \text{:- نفرض}$$

$$\left[\begin{array}{l} \therefore \frac{\partial z}{\partial x}, \quad y = \text{ثابت} \\ \frac{\partial z}{\partial y}, \quad x = \text{ثابت} \end{array} \right] \text{ هى المشتقة الجزئية الأولى}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]$$

وهذا يعنى أن الاشتقاق الجزئى الأول بالنسبة إلى x ، سيشتق جزئياً مرة ثانية

$$\text{بالنسبة إلى } x \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] \text{ ومرة ثانية بالنسبة إلى } y \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right]$$

كما وأن الاشتقاق الجزئى الأول بالنسبة إلى y ، سيشتق جزئياً مرة ثانية بالنسبة

إلى x $\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \right]$ ومرة ثانية بالنسبة إلى y أى $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]$ أى أن المشتقة الجزئية الثانية

لدالة فى متغيرين مستقلين عبارة عن أربعة اشتقاقات .

أمثلة :-

(٨) أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة :-

$$Z = f(x, y) = 6x^3 - 5x^2y + 10xy + 8y^3$$

الحل :-

المشتقات الجزئية الأولى كالتالى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2 - 10xy + 10y \quad (, y = \text{constant})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -5x^2 + 10x + 24y^2 \quad (, x = \text{constant})$$

والمشتقات الجزئية الثانية تكون كالتالي :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36x - 10y \quad (, y = \text{constant})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -10x + 10 \quad (, x = \text{constant})$$

بالإضافة إلى :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10x + 10 \quad (, y = \text{constant})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y \quad (, x = \text{constant})$$

ولاحظ أن عددها أربعة مشتقات جزئية

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10x + 10 \right] \text{ ولاحظ كذلك أن}$$

(٩) أوجد المشتقة الجزئية الأولى والثانية للدالة :-

$$Z = f(x, y) = -3x^3 + 5y^4 - 3x^2y^2$$

الحل :-

المشتقات الجزئية الأولى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -9x^2 - 6xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 20y^3 - 6x^2y$$

والمشتقات الجزئية الثانية :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -18x - 6y^2 \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12xy \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 60y^2 - 6x^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

لاحظ أن (3) تساوى (4) وقد لاحظنا هذا فى المثال السابق وتعرف هذه بالمشتقات

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
 الجزئية الثانية المتقاطعة

وهى متساوية لكل الدوال التى ستعرض لها هنا .

وتساعد هذه الملاحظة فى التأكد من صحة كل المشتقات الجزئية الأولى والثانية المتقاطعة.

١٥-٣ :- التفاضل الجزئى للدوال فى أكثر من متغيرين :-

نفترض أن الدالة : $G(x, y, z) = (G)$ فى ثلاث متغيرات مستقلة هى x, y, z

سنجد أن عدد المشتقات الجزئية الأولى = ٣ مشتقات

بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية = ٩ مشتقات

١- المشتقات الجزئية الأولى فى ثلاث متغيرات :-

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$$

٢- المشتقات الجزئية الثانية فى ثلاث متغيرات :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x}$$

بالإضافة إلى :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}$$

وأخيراً :-

تفاضل جزئى بالنسبة إلى x للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى y للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}$$

تفاضل جزئى بالنسبة إلى z للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة إلى z

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$$

وهكذا الأمر فى حالة دالة فى أربعة متغيرات مستقلة ، سنجد أن :-

المشتقات الجزئية الأولى عددها ٤ بينما المشتقات الجزئية الثانية عددها ١٦ (كل واحدة

من الأربعة اشتقاقاً بالأولى تُشتق أربع مرات للمرة الثانية) .

وعموماً :-

عدد المشتقات الجزئية الأولى لأى دالة = عدد المتغيرات المستقلة فى هذه الدالة

بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية لهذه الدالة = مربع عدد المتغيرات المستقلة بها

أى أنه إذا كانت : $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

فإن عدد المشتقات الجزئية الأولى $n =$

، عدد المشتقات الجزئية الثانية $n^2 =$

أمثلة :-

(١٠) إذا كانت :

$$G = \text{func.}(x, y, z) = 5x^3 + 12x^2y^3 + 8yz^3 + 7y^4$$

فأوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية لهذه الدالة :

الحل :-

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 15x^2 + 24xy^3 \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 36x^2y^2 + 8z^3 + 28y^3 \quad \dots\dots\dots (B)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 24yz^2 \quad \dots\dots\dots (C)$$

ولإيجاد المشتقات الجزئية الثانية :-

نفاضل المعادلة " A " ثلاث مرات بالنسبة إلى " x , y , z "

، نفاضل المعادلة " B " ثلاث مرات بالنسبة إلى " x , y , z "

، نفاضل المعادلة " C " ثلاث مرات بالنسبة إلى " x , y , z "

∴ بالنسبة إلى A :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 30x + 24y^3 \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = 72xy^2 \quad \dots\dots\dots (٢)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = 0 \text{ (zero)} \quad \dots\dots\dots (٣)$$

، بالنسبة إلى (B) :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 72xy^2 \quad \dots\dots\dots (٤)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 72x^2y \quad \dots\dots\dots (٥)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} = 24z^2 \quad \dots\dots\dots (٦)$$

وبالنسبة إلى (C) :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} = 0 \text{ (zero)} \quad \dots\dots\dots (٧)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = 24z^2 \quad \dots\dots\dots (٨)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial G}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 48yz \quad \dots\dots\dots (٩)$$

لاحظ أن عددها ٩ مشتقات جزئية ولاحظ التالي أيضاً :-

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = 72xy^2 \quad = \text{رقم (٢) = رقم (٤)}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = 0 \text{ (zero)} \quad = \text{رقم (٣) = رقم (٧)}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} = 24z^2 \quad = \text{رقم (٦) = رقم (٨)}$$

٤-١٥ :- مصفوفة هيس والمحدد الهيسى Hessian matrix and determinant

قام هيس بوضع التفاضلات الجزئية الثانية للدالة في مصفوفة مربعة ومحدد المصفوفة المربعة هذه يُطلق عليه بالمحدد الهيسى .

وقد علمنا مما سبق أن عدد المشتقات الجزئية الأولى للدالة في متغيرين هو ٢ بينما المشتقات الجزئية الثانية = 4 = 2² وفي حالة ٣ متغيرات مستقلة فإن المشتقات الجزئية

الثانية = 3² = ٩ وفي حالة n متغير مستقل فإن المشتقات الجزئية الثانية n × n = n²

وتكون مصفوفة هيس كالتالي :-

$$Z = f(x, y) \text{ : في حالة متغيرين (١)}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \end{bmatrix} = \text{مصفوفة هيس } 2 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

ويمكن اختصارها هكذا :

حيث :-

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = z_{12} , z_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} , z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = z_{21} , z_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} , z_2 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

بينما تكون مصفوفة هيس في حالة دالة في ثلاثة متغيرات كالتالي :-

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة هيس " } 3 \times 3 \text{ "$$

وفي حالة n متغير مستقل فإن مصفوفة هيس تكون كالتالي :-

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{مصفوفة هيس } n \times n$$

أى أن الصف الأول عناصره عبارة عن :-

$$\text{مشتقات } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ بالنسبة إلى كل المتغيرات على الترتيب } (x, y, \dots)$$

، عناصر الصف الثاني عبارة عن :-

$$\text{مشتقات } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ بالنسبة إلى جميع المتغيرات على الترتيب } (x, y, \dots)$$

بينما عناصر الصف الثالث فهي عبارة عن :-

مشتقات $\frac{\partial z}{\partial m}$ (m هي المتغير المستقل الثالث مثلاً في الدالة Z خلاف ... , y , x)
 بالنسبة إلى جميع المتغيرات على الترتيب (... , m , y , x)
 أمثلة :-

(١١) كون مصفوفة هيس ومن ثم احسب قيمة المحدد الهيسى لكل من الدوال
 التالية :-

$$Z = f(x, y) = 6x^3 - 5x^2y + 10xy + 8y^2 \quad (\text{أ})$$

$$Z = f(x, y) = -3x^3 + 5y^4 - 3x^2y^2 \quad (\text{ب})$$

الحل :-

الدالة (أ) هي المثال رقم ٨ السابق حله
 وسوف نجد أن :-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = Z_{11} = 36x - 10y$$

$$Z_{12} = -10x + 10$$

$$Z_{21} = -10x + 10$$

$$Z_{22} = 48y$$

∴ مصفوفة هيس لهذه المسألة :-

$$\begin{bmatrix} (36x - 10y) & (-10x + 10) \\ (-10x + 10) & (48y) \end{bmatrix}$$

وقيمة المحدد الهيسى :-

$$\begin{vmatrix} 36x - 10y & -10x + 10 \\ -10x + 10 & 48y \end{vmatrix} = \Delta$$

$$= [(36x - 10y)(48y)] - [(-10x + 10)(-10x + 10)]$$

$$= 1728xy - 480y^2 - [100x^2 - 200x + 100]$$

$$= 1728xy - 480y^2 - 100x^2 + 200x - 100$$

، الدالة (ب) هي المثال رقم (٩) السابق حله :-

وسوف نجد أن :-

$$Z_{11} = -18x - 6y^2$$

$$Z_{12} = -12xy$$

$$Z_{21} = -12xy$$

$$Z_{22} = 60y^2 - 6x^2$$

∴ مصفوفة هيس في هذه الحالة :-

$$\begin{bmatrix} -18x - 6y^2 & -12xy \\ -12xy & 60y^2 - 6x^2 \end{bmatrix}$$

، قيمة المحدد الهيسى $\Delta =$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} -18x - 6y^2 & -12xy \\ -12xy & 60y^2 - 6x^2 \end{bmatrix} \\ &= [(-18x - 6y^2)(60y^2 - 6x^2)] - [+144x^2y^2] \\ &= -1080xy^2 + 108x^3 - 360y^4 + 36x^2y^2 - 144x^2y^2 \\ &= -360y^4 + 108x^3 - 1080xy^2 - 108x^2y^2 \end{aligned}$$

١٥-٥ :- توضيح معنى التفاضل الجزئي بيانياً وهندسياً

Graphical and Geometrical illustration of partial derivatives

نعلم أن الدالة $y = f(x)$ يمثلها مستقيم عندما تكون x من الدرجة الأولى ويقع هذا

المستقيم في المستوى $X O Y$

بينما يمثلها منحنى مستوى يقع في المستوى $X O Y$ كذلك (أو في أى مستوى آخر) إذا كانت درجتها أى x من الثانية فأكثر .

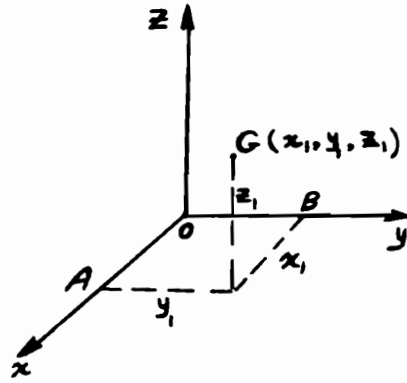
هذا الكلام عندما يكون هنالك متغير واحد مستقل وهو x

ولكن في حالة الدالة $Z = f(x, y)$ ، فهناك متغيرين مستقلين x, y ومتغير تابع

وهو Z ويمكن تمثيل هذه الدالة بواسطة سطح Surface أى إحداثيات فراغية (ثلاثية

الأبعاد) ، كالتالى :

أنظر الرسم شكل (١-١٥).



شكل (١٥-١)

نعتبر المحورين OX , OY المتعامدين على بعضهما ويمثلهما المستوى (الأفقى) XOY ، ويمكننا تمثيل متغيرين مستقلين x , y على المحورين OY , OX وسوف نطلق عليه المستوى xy .

فإذا ما أقمنا العمود OZ على هذا المستوى من O فسينشأ لدينا مستويان XOZ , YOZ عموديان على المستوى xy ومتعامدان مع بعضهما في نفس الوقت ويطلق عليهما بالمستويان xz , yz

ويمثل المحور OZ قيم Z المناظرة لقيم كل من x , y .

فإذا افترضنا أن النقطة p (point = p) في المستوى xy والتي إحداثياتها هي : (x_1, y_1)

حيث نوقع على المحور ox النقطة B التي إحداثياتها x_1 على المحور OX ونوقع على المحور oy النقطة A التي إحداثياتها y_1 على المحور OY وبذلك فإن p التي تقع في المستوى " $xy = XOY$ " وإحداثياتها هما (x_1, y_1)

فإذا ما رسمنا من p عموداً على المستوى XOY وموازياً للمحور OZ وبحيث يكون طوله مساوياً لقيمة Z أى يساوى Z_1 المناظرة لقيمتي (x_1, y_1) .

وبذلك سنجد أن النقطة C تمثل وضع النقطة فى الفراغ عندما تكون المحاور

$$Z_1, Y_1, X_1 \text{ و } OZ, OY, OX \text{ والإحداثيات هي}$$

فإذا ما تغيرت قيم x, y وأوجدنا قيم Z المناظرة لهما، سنجد أنه يمثلها نقطة أخرى على السطح ذاته الذى تقع عليه C.

أولاً: - نعتبر y ثابتة وقيمتها هي y_1 :-

سنجد أن المنحنى GCE يمثل التغيرات فى Z بالنسبة إلى x مع ثبوت y

وبالتبعية فإن المشتقة الجزئية الأولى للدالة بالنسبة إلى x أى :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \text{ تمثل ميل المماس للمنحنى GCE}$$

المناظرة لأى قيمة محددة لـ x

فمثلاً عندما $x = x_1$ فإن نقطة C هي النقطة المناظرة على المنحنى GCE وتكون قيمة

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ ميل المماس لهذا المنحنى عند نقطة C التى إحداثيها } x = x_1 \text{ هو}$$

ثانياً: - نعتبر x ثابتة وقيمتها هي x_1 :-

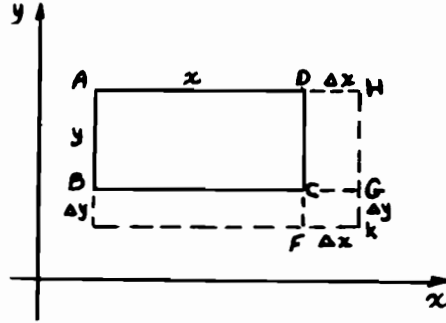
سنجد أن المنحنى FCD يمثل التغيرات فى Z بالنسبة إلى y مع ثبوت قيمة x ويكون

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ للمماس لهذا المنحنى FCD عند أى نقطة عليه مساوياً أو معبراً عن قيم } y, z$$

والآن: - نريد أن نوضح كذلك معنى المشتقة الجزئية الأولى لدالة فى متغيرين هندسياً.

لنعتبر أن لدينا مستطيلاً، بالطبع مساحته دالة فى متغيرين وهما طوله وعرضه غير المتساويين.

ويوضح شكل (١٥-٢) مستطيل بعده y, x ومساحته A.



شكل (١٥-٢)

$$\therefore A = xy$$

فإذا اعتبرنا ثبوت y مع تغير x بمقدار ضئيل قدره Δx

$$\therefore A + \Delta A = (x + \Delta x) \times y$$

$$\therefore \Delta A = y \cdot \Delta x$$

ويعملها بالشكل المساحة CGHD

ومعدل زيادة A بالنسبة إلى x مع بقاء y ثابتة يعنى التفاضل الجزئى

$$\frac{\partial A}{\partial x} \text{ أى } \frac{\partial}{\partial x}(xy) \text{ وهى تساوى } y$$

وبالمثل إذا اعتبرنا ثبوت x مع تغير y فإن التغير فى المساحة يمثله الشكل المستطيل

$$x \Delta y = BEFC$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

ومعدل الزيادة فى المساحة :-

أما إذا تغيرت كل من x, y فإن :-

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot dy$$

$$= y dx + x dy$$

ومقارنة هذا بالشكل (١٥-٢) يتضح أن الزيادة الكلية فى المساحة نتيجة لتغير كل من

x, y بمقدار ضئيل ؛ عبارة عن :-

المستطيل BEFC ، والمستطيل CGHD والمستطيل الصغير CFKG

أى :- $y dx + x dy + dx dy$

وحيث أن $dx dy$ هي حاصل ضرب مقدارين متناهيين في الصغر . لذلك فإن قيمتها النهائية تكون أكثر تناهياً في الصغر .

وبذلك فإنه يمكن اعتبار الزيادة الفعلية في المساحة نتيجة لتغير كل من x , y هي :-
 $y dx + x dy$

فإذا ما افترضنا أن $y = 8m$ ؛ وأنه عند لحظة معينة كانت y تزداد بمعدل $2m/sec$

ونفترض كذلك أن $x = 5m$ وأنه عند نفس اللحظة كانت x تزداد بمعدل $3m/sec$

والمطلوب هو حساب معدل زيادة A عند نفس اللحظة :

فإذا ما أدخلنا في هذه المسألة عنصراً متغيراً آخرأ وهو الزمن "t" فسوف نجد أنه يمرور الزمن (أى تغير t) فإن قيم كل من x , y , A تتغير مع الزمن كذلك .

وعليه فإن معدل زيادة A يكون عبارة عن مجموع المعاملات التفاضلية كالتالى :-

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial x} = y = 8$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = x = 5$$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = 8 \times 3 + 5 \times 2 = 34 m^2 / sec$$

١٥-٦ :- التفاضل الجزئى والدوال الضمنية :-

نعتبر $Z = f(x, y)$ وتساوى ثابت وليكن قدره C

$$i.e \quad Z = f(x, y) = C$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{تفاضل الثابت = صفر})$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

أمثلة محلولة :-

$$(١٢) \text{ إذا كانت } Z = \tan^{-1} \frac{y}{x} \text{ فأوجد } dz$$

الحل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \times \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

$$= \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

(١٣) إذا كانت :-

$$Z = 4x^3 - xy^2 + y^3 = 0$$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \div \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$, \frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - y^2$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 3y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (12x^2 - y^2) \div (-2xy + 3y^2)$$

$$Z = 4x^2 - 3y^2 + 5xy$$

(١٤) إذا كانت

فاوجد $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$

الحل :-

عند إيجاد المشتقة الجزئية $\frac{\partial z}{\partial x}$ فإننا نفاضل بالنسبة إلى x ونتعامل مع y كما لو كانت ثابتاً .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 8x + 5y$$

وعند إيجاد المشتقة الجزئية $\frac{\partial z}{\partial y}$ فإننا نفاضل بالنسبة إلى y ونتعامل مع x كما لو كانت ثابتاً .

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -6y + 5x$$

(١٥) أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة :-

$$Z = 2x^2 + 5xy + 4y^2$$

الحل :-

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 5y$$

$$, \frac{\partial z}{\partial y} = 5x + 8y$$

$$(١٦) \text{ إذا كانت } xy = 5Z^2 \text{ فأوجد } \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$$

الحل :-

$$\therefore xy = 5Z^2$$

$$\therefore y = \frac{5Z^2}{x}$$

ولإيجاد $\frac{\partial y}{\partial x}$ ، نفاضل بالنسبة إلى x ونتعامل مع Z كثابت

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-5Z^2}{x^2}$$

ولإيجاد $\frac{\partial y}{\partial z}$ نفاضل بالنسبة إلى Z ونعتبر x ثابت .

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{10}{x} Z$$

(١٧) المطلوب إيجاد المشتقات الجزئية Z_{yx}, Z_{xy} للدالة .

$$Z = x^2y + 2xe^{\frac{1}{y}}$$

وبين أن $Z_{yx} = Z_{xy}$

الحل :-

لإيجاد المشتقة الجزئية الثانية ، يلزم إيجاد المشتقة الجزئية الأولى وهي Z_y, Z_x

$$, Z_x = 2xy + 2e^{\frac{1}{y}} \quad (\text{ثابت } y)$$

$$, Z_y = x^2 - \frac{2xe^{\frac{1}{y}}}{y^2} \quad (\text{ثابت } x)$$

والمشتقات الجزئية الثانية عددها = ٤ لأن عدد المتغيرات = ٢ متغير .

والمطلوب منها اثنتين فقط وهما Z_{xy} أى المشتقة الجزئية الثانية بالنسبة إلى x

للمقدار Z_y .

$$\therefore Z_{xy} = 2x - \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{y^2} \quad (١) \dots\dots\dots$$

ولإيجاد Z_{yx} ، نفاضل Z_x بالنسبة إلى y

$$\therefore Z_{yx} = 2x - \frac{2e^{\frac{1}{y}}}{y^2} \dots\dots\dots (2)$$

ويلاحظ أن : (1) = (2) مما يعني أن $Z_{xy} = Z_{yx}$

(18) أوجد :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \text{ and } \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$$

علماً بأن $y = e^{xt}$

الحل :-

لإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ نوجد أولاً $\frac{\partial y}{\partial x}$ ونعتبر $t =$ ثابت للمقدار $y = e^{xt}$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = te^{xt}$$

ثم نفاضل $\frac{\partial y}{\partial x}$ مرة ثانية بالنسبة إلى x ونعتبر $t =$ ثابت

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = t^2 e^{xt}$$

ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ نوجد أولاً المشتقة الجزئية الأولى للمقدار بالنسبة إلى t ونعتبر $x =$ ثابت

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial t} = x e^{xt} \dots\dots\dots , (x = \text{ثابت})$$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = x^2 e^{xt} \dots\dots\dots , (x = \text{ثابت})$$

ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$ نفاضل $\frac{\partial y}{\partial x}$ بالنسبة إلى t مع بقاء $x =$ ثابت ولإيجاد $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}$ نفاضل

$\frac{\partial y}{\partial t}$ بالنسبة إلى x مع بقاء $t =$ ثابت

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial t \cdot \partial x} = e^{xt} + xt e^{xt}$$

$$= e^{xt} (1 + xt)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial t} = e^{xt} + xt e^{xt}$$

$$= e^{xt} (1 + xt)$$

وعليه فإن لأى دالة y فى متغيرين x, t فإن كلاً من $\frac{\partial^2 y}{\partial t \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial t}$ دائماً ،

(١٩) أوجد المشتقات الجزئية للدالة :-

$$A = 2x^2 + 2y^2 - 5xy \cos \theta$$

حيث كل من θ, y, x متغيرات مستقلة

الحل :-

لإيجاد المشتقة الجزئية A_x أى $\frac{\partial A}{\partial x}$ مع بقاء θ, y كثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial x} = 4x - 5y \cos \theta$$

ولإيجاد A_y أى $\frac{\partial A}{\partial y}$ نفاضل بالنسبة إلى y مع بقاء θ, x ثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial y} = 4y - 5x \cos \theta$$

وبالمثل لإيجاد A_θ أى $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ نفاضل بالنسبة إلى θ مع بقاء كل من x, y ثوابت .

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial \theta} = 5xy \sin \theta$$

$$G = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

(٢٠) إذا كانت :

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{فبين أن :}$$

الحل :-

لإثبات هذا يلزم إيجاد المشتقات الجزئية الأولى التالية :-

$$\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}$$

ثم نعوض بقيمها في المعادلة المطلوب إثباتها مساوية للصفر :-

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{y} + z \left(\frac{-1}{x^2} \right) = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = x \left(\frac{-1}{y^2} \right) + \frac{1}{z} = \frac{-x}{y^2} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = y \left(\frac{-1}{z^2} \right) + \frac{1}{x} = \frac{-y}{z^2} + \frac{1}{x}$$

وبالتعويض نجد أن :-

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{x}{y} - \frac{z}{x} - \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 0$$

(٢١) إذا كانت $f(x, y) = x^2y + y^2$ فأوجد $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ باستخدام طريقة Δ

الحل :-

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ لإيجاد}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x + \Delta x, y) - f(x, y) &= [(x + \Delta x)^2 y + y^2] - (x^2 y + y^2) \\ &= (x + \Delta x)^2 y + y^2 - x^2 y - y^2 \end{aligned}$$

وبالفك والاختصار :

$$\therefore 2xy \Delta x + y (\Delta x)^2$$

$$\therefore f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

وبالتعويض عن قيمة البسط في النهاية بالمقدار $2xy \Delta x + y (\Delta x)^2$:

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (2xy + y \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2xy + y \Delta x = 2xy$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = x^2 \Delta y + 2y \Delta y + (\Delta y)^2 \quad \text{وبالمثل فإن :-}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = x^2 + 2y$$

(٢٢) إذا اعتبرنا الرقم ١٨ ممثلاً لمجموع ثلاثة أرقام موجبة . فأوجد هذه الأرقام (الأعداد) بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل :-

نفترض أن أجزاء العدد ١٨ هي $x, y, x - y$ وحاصل ضربها P

$$P = xy(18 - x - y)$$

ولجعل حاصل الضرب أكبر ما يمكن ، نوجد المشتقات الجزئية الأولى ونساويها بالصفر ونحل المعادلتين الناتجتين آنياً بالنسبة إلى x, y ، بعد ذلك نوجد المشتقات الجزئية الثانية ونحسب قيمها المناظرة لقيم x, y السابق الحصول عليها من حل المعادلتين .

$$C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, B = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}, A = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad \text{نعتبر}$$

ثم نوجد المقدار $[AC - B^2]$ فإذا كان أكبر من الصفر عندما A أصغر من الصفر فيكون لدينا نهاية عظيمة وبذلك :-

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 18y - 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 18x - x^2 - 2xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{ثم نضع كل من :}$$

$$\therefore 18y - 2xy - y^2 = 0$$

$$, 18x - 2xy - x^2 = 0$$

وبحلها

$$\therefore 18 - 2x - y = 0$$

$$, 18 - 2y - x = 0$$

$$\therefore 2x + y = 18$$

$$, 2y + x = 18$$

$$\therefore y = x = 6$$

$$, A = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -2y$$

$$, B = \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (18x - x^2 - 2xy) = 18 - 2x - 2y$$

$$, C = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2x$$

, at (6, 6)

$$\therefore A = -2 \times 6 = -12$$

$$, B = 18 - 2 \times 6 - 2 \times 6 = -6$$

$$, C = -2 \times 6 = -12$$

$$\begin{aligned} \therefore AC - B^2 &= -12 \times -12 - (-6)^2 \\ &= 144 - 36 = 108 > 0 \end{aligned}$$

وحيث أن $A < 0$ ، " - 12 " ، $AC - B^2 > 0$ فإن P يكون لها نهاية عظمى عند

(6, 6)

∴ العدد ١٨ يُجزأ إلى ثلاثة أعداد 6, 6, 6 للحصول على أكبر حاصل ضرب .

Exercise 16

أوجد المعاملات التفاضلية الجزئية $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ في المسائل التالية :-

$$Z = \sin^{-1} \frac{x}{y} \quad (١)$$

$$Z = \frac{ax}{y^2} \quad (٢)$$

$$Z = x^y \quad (٣)$$

$$Z = \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad (٤)$$

$$Z = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (٥)$$

$$Z = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3 \quad (٦)$$

$$Z = \cos(x^2 + y^2) \quad (٧)$$

في المسائل التالية احسب التفاضلات الكلية :-

$$Z = x^2y + xy^3 \quad (٨)$$

$$Z = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (٩)$$

$$Z = \frac{x}{y} \quad (١٠)$$

$$Z = \text{Log } x^y \quad (١١)$$

$$Z = e^{xy} \quad (١٢)$$

$$Z = a^x e^y \quad (١٣)$$

$$(١٤) \text{ إذا كانت } Z = 2x^2 + 3y^2$$

فأوجد dz عندما $x=1$, $y=3$, $dx=0.01$, $dy=0.02$

$$(١٥) \text{ إذا كانت } Z = x^5y - \sin y \text{ فأوجد } \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} \text{ وبين أنها تساوى } \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$$

(١٦) اسطوانة دائرية قائمة يزيد نصف قطر قاعدتها عند لحظة معينة بمقدار 1m/sec

في حين يزداد الارتفاع بمعدل 2m/sec .

فاحسب معدل زيادة حجم الاسطوانة عندما يكون الارتفاع 10 m ونصف القطر 5 m
 (١٧) سطح تمثله العلاقة : $Z = a^2 - x^2 - 2y^2$. فما هو مقدار الميل عند نقطة
 على السطح المنحني عند مقطعه بمستوى بحيث تكون y ثابتة وما هو مقدار الميل عند
 نقطة على السطح المنحني عند مقطعه بمستوى بحيث تكون x ثابتة .

$$(١٨) \text{ إذا كانت } Z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ فأوجد } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ للدالة :-}$$

$$x^2z^2 + y \sin x z = 2$$

$$(١٩) \text{ إذا كانت } x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \text{ فأوجد قيمة } \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$(٢٠) \text{ بمعلومية أن : } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \text{ فأوجد } \frac{dy}{dx} \text{ للدالة :-}$$

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 = 1$$

(٢١) إذا كان :

$$W = u^2v + uv^2 + 2u - 3v$$

$$u = \sin(x + y + z)$$

$$, v = \cos(x + 2y - z)$$

فأوجد $\frac{\partial w}{\partial x}$ عندما :-

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$$

(٢٢) إذا كانت :- ثابت $a + b + c =$ في حين أن كل العناصر موجبة فمتى تكون:
 $a \times b \times c$ ذات أكبر قيمة ؟

أجوبة التمارين

ANSWERS

Exercise (1)

(1) a) 0 , b) لقيم x الأقل من ١

c) $0.5, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 2, 5, 10, -2, -1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}$

d) infinity

e) المنحنى على شكل قطع زائد

(2) a) 4.1, 4.01, 4.001 4.000001

b) 4

(3) a) 5 , b) infinity

(4) a) 11 , 5 , 3 , 2.5 , 2.1 , 2.01 b) 2

(5) 2 (6) 2 (7) $3x^2$

(8) $\frac{1}{3}$ (9) $\frac{1}{2}$ (10) $\frac{-1}{3}$

(11) $\frac{-5}{2}$ (12) $\frac{-1}{2\sqrt{x}}$ (13) 7 (14) $\frac{2}{3}$

(15) $\frac{1}{4}$ (16) a) -0.6 b) 1 (17) 1

(18) $\frac{3}{2}$ (19) $\frac{1}{2}$ (20) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (21) $\frac{2}{3}$

(22) $\frac{m}{3}$ (23) $\frac{-1}{2}$ at $a > 0$, ∞ at $a < 0$

(24) $\frac{2}{3}$ (25) 1 (26) $\frac{-1}{2}$ (27) $\frac{2}{3}$

(28) -2.5 (29) 0 (30) -2 (31) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(32) ∞ (33) $\frac{-3}{2}$ (34) $\frac{1}{6}$ (35) $\frac{1}{4}$

(36) 2.5 (37) -4 (38) -12 (39) $\sqrt{3}$

- (40) -1 (41) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (42) 2 (43) $\frac{-1}{56}$
- (44) $-\sqrt{2}$ (45) 6 (46) $\frac{1}{3}$ (47) $6\sqrt{2}$
- (48) 2 (49) 1 (50) $\frac{1}{9}$
- (51) $2 \cos x$ (52) $\frac{1}{2}$ (53) $\frac{1}{2}$ (54) 1
- (55) $\frac{1}{2}$ (56) $\frac{1}{3}$ (57) $\frac{m^2}{2}$ (58) 3
- (59) $-\sqrt{2}$ (60) 8 (61) 4 (62) $-2 \sin x$
- (63) 1 (64) $\frac{1}{20}$ (65) $2 [1 + 2x = n^4 \text{ ضع }]$
- (66) 2 (67) $\frac{1}{2}$ (68) $\frac{3}{2}$ (69) 3
- (70) 0.2

Exercise (2)

- (1) 1.5 , 1.2
- (2) $a) \frac{5}{3}$, $b) \frac{-3}{4}$, $c) \frac{-b}{2a}$, $d) \frac{2}{3}$
- (3) $y = 1.5x + 1$
- (4) $\Delta s = 9.8t \times (\Delta t) + 4.9 (\Delta t)^2$
 $\frac{s}{t} = 9.8t + 4.9(\Delta t)$
 , 1) 20.58 , 2) 20.09 , 3) $19,649$
 , 4) 19.6049 , 19.6 ms^{-1} السرعة هي
- (5) 6
- (6) $\Delta y = 3x^2 (\Delta x) + 3x (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
 $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x (\Delta x) + (\Delta x)^2$
 $\therefore 12$

$$(7) \Delta y = \frac{-\Delta x}{x^2 + \Delta x} \quad , \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x^2 + x \cdot \Delta x}$$

$135^\circ =$ الزاوية $\quad , \quad -1 =$ الميل $\quad ,$

$$(8) \underline{a) 6} \quad \underline{b) 4} \quad , \underline{c) 3}$$

$$(9) \underline{a) 6} \quad \underline{b) 18} \quad , \underline{c) 10}$$

Exercise (3)

$$(1) 8x^7 \quad , \quad 7 \quad , \quad \frac{1}{5} \quad , \quad 0.007 \quad , \quad \frac{5}{3} \cdot x^4 \quad , \quad 48x^3 \quad , \quad 12x^{13}$$

$$(2) 5c x^4 \quad , \quad \frac{7ab}{c} x^6 \quad , \quad 3b x^{3b-1} \quad , \quad 2(4a+1)x^{4a} \quad , \quad 6\pi x$$

$$(3) 5 \quad , \quad \frac{2}{3} \quad , \quad -5 \quad , \quad a$$

$$(4) \frac{x^2}{2} \quad , \quad x^2 \quad , \quad \frac{x^3}{3} \quad , \quad \frac{x^3}{12} \quad , \quad \frac{x^8}{8} \quad , \quad \frac{1}{4a+1} \cdot x^{4a+1}$$

$$\quad , \quad \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad , \quad x^5 \quad , \quad \frac{3}{20} x^5$$

$$(5) 2at$$

$$(6) 30t$$

$$(7) 2\pi r$$

$$(8) 4\pi r^2 \quad , \quad 144\pi$$

$$(9) \frac{3}{2\sqrt{x}} \quad , \quad \frac{-2}{x^2} \quad , \quad \frac{-3}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} \quad , \quad \sqrt[4]{3} \times \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}}$$

$$(10) \frac{0.6}{x^{0.4}} \quad , \quad \frac{1.05}{x^{0.85}} \quad , \quad -\frac{3.2}{x^{1.4}} \quad , \quad \frac{-9}{x^2} \quad , \quad \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$(11) 7.5 x^{1.5} \quad , \quad -\frac{5.2}{x^{2.3}} \quad , \quad \frac{5.6}{x^{-0.3}} \quad , \quad \frac{-5}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$(12) \frac{-60}{V^3}$$

$$(13) 20.25 \quad , \quad 0$$

$$(14) \frac{4}{3}$$

$$(15) -0.02 \quad , \quad -0.5 \quad , \quad -2 \quad , \quad -8$$

$$(16) \frac{-2}{x^3}$$

$$(17) x = 1$$

$$(18) x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(19) x = \frac{1}{16}$$

$$(20) x = \frac{1}{2}$$

Exercise (4)

$$(1) 18x^2 + 10x$$

$$(2) \frac{-3}{x^2} + 2$$

$$(3) 9x^2 + 1$$

$$(4) \frac{-4}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4}{x^2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$$

$$(5) 16x^3 + 6x - 2$$

$$(6) x + \frac{1}{8}$$

$$(7) 3 - 4x + 6x^2$$

$$(8) \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$(9) 10x - \frac{1}{3\sqrt{x^3}}$$

$$(10) \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(11) 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$(12) 2x^2 + x - \frac{10}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$(13) \frac{-21}{x^4} + \frac{10}{x^3} - \frac{3}{x^2}$$

$$(14) x^4 - x^3 + x^2 - x$$

$$(15) \frac{-1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 2$$

$$(16) u + at$$

$$(17) 5 + 16t$$

$$(18) 4t - 3$$

$$(19) 3a x^2 + 2b x + c$$

$$(20) 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(21) \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$(22) 3(1+x)^2$$

$$(23) 3n x^{3n-1} - 3n x^2$$

$$(24) \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^2}$$

$$(25) \frac{dy}{dx} = \left| 4x - 3 \right|_{x=1.5} = 3, \quad x = \frac{3}{4}$$

$$(26) \frac{dy}{dx} = 6x, \quad x = 0$$

$$(27) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x - 5 \quad , -10 \quad , -9 \quad , -2$$

$$(28) \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \quad , x = \pm 1 \quad , (1, 2), (-1, -2)$$

Exercise (5)

$$(1) 20x + 9 \qquad (2) \frac{3x^2}{2} + 2x + 1$$

$$(3) (2x - 3)(2x + 3) + 2(x^2 + 3) = 3(x^2 - 1)$$

$$(4) 6x(x^2 + 2) + 2x(3x^2 - 1) = 2x(6x^2 + 5)$$

$$(5) (x^2 - 2x)(6x - 1) + (3x^2 - x)(2x - 1) = 3x(4x^2 - 6x + 1)$$

$$(6) (x^2 + x - 1) + (x + 1)(2x + 1) = x(3x + 4)$$

$$(7) (x^2 - x + 1) + (x - 1)(2x - 1) = 3x^2 - 4x + 2$$

$$(8) 2x(x^2 + 3x - 2) + (x^2 - 3)(2x + 3) = 4x^3 + 9x^2 - 10x - 9$$

$$(9) 2x(x^2 - 2) + 2x(x^2 + 2) = 4x^3$$

$$(10) 2(2x^3 - x + 1) \qquad (11) 3(x^2 - 7)$$

$$(12) 6x^4 + 16x^3 - 7x^2 - 24x - 3$$

$$(13) 4x(x^2 - 1)$$

$$(14) 6(3x^2 + 5x + 2)$$

$$(15) (ax^2 + bx + c) \times u + (ux + 5v)(2ax + b)$$

$$(16) \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x + 1)(x^2 - 2x + 3) + 2\sqrt{x}(x^2 - 2x + 3) \\ + \sqrt{x}(2x - 2)(2x + 1)$$

$$(17) \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}(\sqrt{x} - 2) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x+1}) + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 2)$$

$$(18) \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(\sqrt[4]{x^3})(\sqrt[5]{x^2}) + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}(\sqrt[3]{x})(\sqrt[5]{x^2}) +$$

$$+ \frac{2}{5\sqrt{x^3}} \left(\sqrt[4]{x^3}\right) (3\sqrt{x})$$

$$(19) 2a bx \cdot c\sqrt{x^3} + \frac{3c}{2} \sqrt{x} \cdot ab x^2 = 3.5 abc \sqrt{x^5}$$

Exercise (6)

$$(1) \frac{-6}{(3x-1)^2}$$

$$(2) \frac{4x}{(1-2x^2)^2}$$

$$(3) \frac{-4}{(x-4)^2}$$

$$(4) \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$(5) \frac{11}{(2x+3)^2}$$

$$(6) \frac{-2b}{(x-b)^2}$$

$$(7) \frac{2b}{(x+b)^2}$$

$$(8) \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$$

$$(9) \frac{-6x}{(x^2-3)^2}$$

$$(10) \frac{-\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-1)^2}$$

$$(11) \frac{\left[\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]}{2}$$

$$(12) \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$(13) \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$(14) \frac{2(x^2-x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$(15) \frac{(7x^2-11x)}{(3x^2+x-1)^2}$$

$$(16) \frac{(x^2-1)}{x^2}$$

$$(17) \frac{6b^2 x}{(b^2-x^2)^2}$$

$$(18) \text{zero}$$

$$(19) \frac{3x^2-2}{(x+2)^2}$$

$$(20) \frac{-(x+\sqrt{3}x)}{x^3}$$

Exercise (7)

$$(1) \quad 6(3x+2), -12(1-3x)^3, \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$(2) \quad \frac{3}{(1-3x)^2}, -6(2-3x), \frac{1}{\sqrt{(1-2x)^3}}$$

$$(3) \quad 10x(x^2-3)^4, -3x\sqrt{1-x^2}, \frac{2x}{\sqrt{2x^2-5}}$$

$$(4) \quad \frac{6x}{(1-3x^2)^2}, \frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}, \frac{-2x^2}{\sqrt{1-2x^2}} + \sqrt{1-2x^2}$$

$$(5) \quad \frac{1}{(4-x)^2}, \frac{1}{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2}{(4-x)^3}$$

$$(6) \quad \frac{-2x}{(x^2-1)^2}, \frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(7) \quad \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)^3}}, \frac{-1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(8) \quad \frac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}, \frac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$(9) \quad \frac{x}{\sqrt{c^2+x^2}}, \frac{-x}{(c^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(10) \quad \frac{4x-1}{2\sqrt{1-x-2x^2}}, -6nx(1-3x^2)^{n-1}$$

$$(11) \quad \frac{x(2c^2-x^2)}{(c^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}, 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$(12) \quad \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\left[\frac{2x}{\sqrt{1+4x}} - \sqrt{1+4x}\right]}{x^2}$$

$$(13) \frac{-2x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2\sqrt{1+x^2}}{4x^2}$$

$$(14) \left[\frac{-x^2}{2\sqrt{2-x}} + 2x\sqrt{2-x} \right], \frac{5-6x}{2\sqrt{3x^2-5x+2}}$$

$$(15) \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}, \frac{3x}{2\sqrt{3x+2}} + \sqrt{3x+2}$$

$$(16) \frac{-(4x+5y)}{(5x+14y)}$$

$$(17) -\frac{2x(x^2+y^2)-x}{2y(x^2+y^2)+y}$$

$$(18) -\frac{x^2-y}{y^2-x}$$

$$(19) -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$$

$$(20) \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3}{2y+4} = \frac{1}{6} \text{ at } (1,1)$$

Exercise (8)

$$(1) 6x(x-1), 6(2x-1), 12$$

$$(2) 2ax^{2a-1}, 2a(2a-1) \cdot x^{2a-2}, 2a(2a-1)(2a-2) \cdot x^{2a-3}$$

$$(3) (12x^3 - 12x^2 + 4x - 7), (36x^2 - 24x + 4), 72x - 24$$

$$(4) 10x^4 - 9x^2 + 4, 40x^3 - 18x, 120x^2 - 18$$

$$(5) \frac{-1}{x^2}, \frac{2}{x^3}, \frac{-6}{x^4}$$

$$(6) \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}, \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}, \frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}$$

$$(7) \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \frac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}}, \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$$

$$(8) \frac{-2}{x^3}, \frac{6}{x^4}, \frac{-24}{x^5}$$

$$(9) \frac{n}{2a} \left[\frac{1}{(a-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a+x)^{n+1}} \right]$$

$$(10) -5, \frac{5}{12}, \text{ أسفل نقطة على المنحنى}$$

$$(11) x=3, x=2, 2.5 = 0.25 \quad (\text{أسفل نقطة على المنحنى})$$

$$(12) -7, 2, 0, \frac{10}{3}$$

Exercise (9)

$$(1) \frac{dy}{dx} = 2x - 2, -4, -2, 2, 4, x=1, \frac{d^2y}{dx^2} = +ve, (\text{min. pt})$$

$$(2) \text{max value} = 4, x=0, \text{min. value} = 0, x=2$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = 3 - 2x, 3, 1, -1, -3, 1.5, -ve, \text{max.}$$

$$(4) \text{max. value} = -4, x = -\frac{1}{2}, \text{min. value} = 4, x = \frac{1}{2}$$

$$(5) a) \text{min. value} = -16, x=2, \text{max. value} = 16, x=-2$$

$$b) \text{max. value} = 2, x=3, \text{min. value} = -2, x=1$$

$$c) \text{max. value} = 12, x=0, \text{min. value} = -20, x=4$$

$$d) \text{max. value} = 5, x=1, \text{min. value} = 4, x=2$$

$$e) \text{max. value} = 41, x=-2, \text{min. value} = 9\frac{3}{4}, x = \frac{1}{2}$$

$$(6) a) x = \frac{1}{4}, \text{min}$$

$$b) -\frac{1}{4}, \text{min}$$

$$c) x = \frac{1}{3}, \text{max}$$

$$d) x = -2, \text{min}$$

$$(7) a) (-5, 120)\text{max}, (1, 12)\text{min}, (-2, 66)\text{infl}$$

$$b) (-1, 37)\text{max}, (6, -306)\text{min}, \left(\frac{5}{2}, -\frac{269}{2}\right)\text{infl}$$

c) $(-1, 40)$ max , $(-2, 33)$ and $(2, -95)$ min , infl. at: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$

d) No max , No min , $(1, -1)$ infl

e) $(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{6}}{9})$ max , $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{4\sqrt{6}}{9})$ min

f) No max , No min , $(0, 5)$ infl

(8) 5 , 5 : هما العددان (9) $x = -3, x = 2, x = \frac{-1}{2}$

(10) $x = 0$ (11) max "0.385", min "-0.385", gradient = -1

(12) (A) 6 , 6 , (B) 6 , 6 , (C) 4 , 8 , (D) 3 , 9

(13) $12\sqrt{2} \times 12\sqrt{2}$ (14) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (15) $\frac{1}{2} = \frac{\text{القطر}}{\text{العرض}}$

(16) $\frac{1}{\pi} = \frac{\text{القطر}}{\text{الطول}}$ (17) $3a$ (18) 20 cm

(19) $R^2 \text{ at height} = \frac{R}{\sqrt{2}}$

(20) $r = 2 \text{ inch}, h = 4 \text{ inch}$ (21) $\text{decr. at } \frac{35}{\sqrt{29}} \text{ km/h}$

(22) $86.4 \text{ cm}^2 / \text{min}$ (23) 8 m/sec

(24) 60° (25) $\cong 2.42 \text{ cm}$ (26) $\text{القطر} = \text{الإرتفاع}$

(27) 1 (28) $\text{الطول} = \text{العرض}$ (29) $\text{نصف القطر} = \text{العمق}$

(30) $\sqrt{3}$ مرة (31) $\frac{x}{2} \text{ km} = \text{بعد } 2v \text{ ساعة ويكون أقل بعد}$

(32) $2.52 \text{ m}, 1.26 \text{ m}$ (33) $10 \text{ cm}^2 / \text{sec}$

(34) $\frac{\pi}{8} \text{ m/min}$ (35) 33.2 ft/sec

(36) 50 km/h (37) $5\frac{5}{7} \text{ ft/sec}, 1\frac{5}{7} \text{ ft/sec}$

(38) $\frac{5}{18} \pi \text{ ft/min}$

(39) $L = 5.6 \text{ m}$

$$L = \frac{2.4}{\sin \alpha} + \frac{1.6}{\cos \alpha} :$$

ويتم تحديده باعتبار النهاية العظمى للدالة

$$(40) 4 \times 4 \times 2m$$

$$(41) 6 \times 6 \times 3 \text{ ft}$$

$$(42) 4 \text{ cm} , \sqrt{3} = 1.732$$

$$(43) x = 1.5$$

$$(44) 75 \times 100 , 75 \times 100 \text{ i.e } 150 \times 100 \text{ or } 3 \times 100 + 2 \times 150$$

$$(45) 1 , 2\sqrt{2}$$

$$(46) 2\sqrt{5} \text{ mile}$$

$$(47) 2(1 + \sqrt{6}) \times 3(1 + \sqrt{6}) \text{ inch} .$$

$$(48) \alpha = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ؛ زاوية نصف قطرية ؛}$$

$$(49) \frac{18}{\pi + 4} \cong 2.52$$

$$(50) \text{ على بعد } 18m \text{ من مصدر الضوء الأقوى}$$

$$(51) V_{\max} \frac{128}{9} \times 1000 \text{ cm}^3$$

عند ارتفاع 20 cm

$$(52) \frac{1}{m} \leq \frac{a}{AB} \text{ ولكن بشرط أن يكون } , \frac{1}{m} = \cos \alpha$$

حيث a مسقط AB على اتجاه الخط الحديدى .

Exercise (10)

$$(1) \tan^{-1} 3$$

$$(2) 40^\circ 54' \text{ or } 139^\circ 6'$$

$$(3) x - y + 2 , x + y + 2 = 0$$

$$(4) (-2 , -4)$$

$$(5) 18x - y = 27 , x + 18y = 489$$

$$(6) 3y - 5x + 16 = 0$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} y + 2x + 7 = 0 \text{ معادلة العماس} \\ x - 2y + 1 = 0 \text{ معادلة العمودى} \end{array} \right\}$$

$$(8) \tan^{-1} \frac{4}{3}$$

$$(9) 45^\circ , 135^\circ$$

$$(10) y = 3 - x , y = x - 1$$

$$(11) 16$$

$$(12) \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right), x = \frac{5}{2}, (1, 13), x = 1$$

$$(13) 2x + 9y = 20$$

$$(14) y = x^2 - 3x + 4$$

ثم نحدد "b" من الشرط : $y' = 2x + b = 4 + b = 1$
 وتُعين "c" من الشرط : أن النقطة (٢ , ٢) هي نقطة التماس

$$(15) b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 1$$

$$(16) -\frac{b}{a^2}$$

$$(17) 2y + x + 3 = 0, 2y - x - 1 = 0$$

$$(18) (-6, 10, 15)$$

$$(19) y - 1 = \frac{-3}{2}(x - 1)$$

$$(20) y - \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$(21) 3x - y - 1 = 0, x + 3y - 17 = 0$$

$$(22) m = \tan \theta = \pm 4$$

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} y = -4x + 8 \\ y = -\frac{x}{4} - 2 \end{array} \right\}, \Phi = \tan^{-1} \frac{15}{8} \cong 62^\circ$$

$$(24) x + 2y = 4\sqrt{2}$$

$$(25) [n\pi, n = 0, 1, 2, \dots]$$

$$(26) y = 8 - 4x, x - 4y = 2$$

$$(27) (3, 2), (-3, -2)$$

قيم x تخيلية فلا يوجد مماس (٢٨)

$$(29) 34^\circ, 36^\circ$$

$$(30) 83^\circ, 14^\circ$$

$$(31) 53^\circ, 0^\circ$$

$$(32) 90^\circ$$

$$(33) y = 4x,$$

$$y = -4(x - 4)$$

$$(34) x = \pm 4, y = 8$$

$$(35) y = \pm 3x + 8, y = 0$$

$$(36) y = \pi - x$$

$$(37) y = x + \frac{2}{3}$$

$$(38) y = \frac{-x}{2} + 2$$

$$(39) y = 0, y = \pm \frac{1}{2}(3x - 1)$$

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} 9x - 11y + 38 = 0 \\ 11x - 9y + 24 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} 4x + y = 16 \\ x - 4y = 4 \end{array} \right\}$$

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 10 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right\}$$

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} 8x - y = 4 \\ x + 8y = 32 \end{array} \right\}$$

$$(44) \text{ at } t = 0, s = 3, v = 1, a = 0$$

$$(45) \text{ at } t = 0, s = -7, v = 6, a = 2$$

$$(46) \text{ at } t = 0, s = -3, v = 2, a = 2$$

$$(47) \text{ at } t = 0, s = -5, v = 3, a = -6 \text{ [at } v = 0, s = -4, a = 0 \text{]}$$

$$(48) \text{ at } t = 0, s = 0, v = 80, a = -32$$

$$\text{at } v = 0, s = 100, a = -32$$

$$(49) \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}, \frac{u^2 \sin 2\theta}{2g}$$

$$(50) [a = 2 - 10t], \frac{5}{2} = \text{الزمن بين لحظتي السكون}$$

$$(51) s = \frac{4}{3}, t = 3, t = 1 \text{ تتوقف عند}$$

$$(52) 2 \text{ sec}, 2 \text{ sec}, 64 \text{ ft}$$

$$(53) h \cong 734.7, t \cong 12.2 \text{ sec}$$

$$(54) v = 3$$

$$(55) 87 \text{ m/sec}, 60 \text{ m/sec}, 18 \text{ m/sec}^2$$

$$(56) 144 \text{ ft}, 96 \text{ ft/sec}$$

$$(57) v = 12.58, a = 3.904$$

$$(58) s = 87, a = 48$$

$$(59) v = -1, a = 8$$

$$(60) v = 53, a = 44$$

$$(61) v = 24, a = 44$$

$$(62) t = 2 \text{ sec}, a = -12 \text{ m/sec}^2$$

وفى اتجاه مضاد لاتجاه بدء الحركة

(٦٣) تنعدم السرعة مرة واحدة عند $t = 4$ ، العجلة تساوى

$$t = \frac{2}{3}, t = 2 \text{ عندما } 5 \text{ m/sec}^2$$

$$, [V]_{t=2} = -120 \text{ m/sec}, [V]_{t=2/3} = -57.8 \text{ m/sec}$$

Exercise (11)

(1) $\frac{1}{3} \text{ rad} , 60^\circ / \pi$

(2) $\frac{1}{4} \text{ rad} , 45^\circ / \pi$

(3) $4 \text{ rad} , 720^\circ / \pi$

(4) $\frac{\pi}{5} \text{ rad} , 36^\circ$

(5) $1 \text{ rad} , 180^\circ / \pi$

(6) $5 \cos 5x$

(7) $5 \cos x$

(8) $\frac{-1}{3} \sin \frac{x}{3}$

(9) $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$

(10) $0.6 \sec 0.6x \cdot \tan 0.6x$

(11) $\frac{-1}{6} \operatorname{cosec} \left(\frac{x}{6}\right) \cot \left(\frac{x}{6}\right)$

(12) $3(\cos 3x - \sin 3x)$

(13) $2(\cos 2x + \sin 2x)$

(14) $\sec x (\tan x + \sec x)$

(15) $4 \cos 4x - 5 \sin 5x$

(16) $\frac{-1}{3} \sin \frac{\theta}{3} + \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{4}$

(17) $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

(18) $\sin (3\pi - x)$

(19) $\frac{7}{2} \operatorname{cosec} \left(A - \frac{7}{2}x\right) \cot \left(A - \frac{7}{2}x\right)$

(20) $4 \sin^3 x \cos x$

(21) $6x^5 \cos x^6$

(22) $-12 \cos^2 4x - \sin 4x$

(23) $2x \sec^2 x \tan x^2$

(24) $-\frac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$

(25) $n(a \cos nx - b \sin nx)$

(26) $B \sin x$

(27) $\sec^3 \frac{x}{3}$

(28) $-3 \sin \left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

(29) $3 \sec^2 3x - 3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x$

(30) $3x^2 + \frac{3}{4} \cos \frac{x}{4}$

(31) $\frac{a}{x^2} \sin \frac{a}{x}$

(32) $2(x \cos x + \sin x)$

(33) $\frac{\sin x - x \cos x}{2 \sin^2 x}$

$$(34) 6 \sin^2 x \cos x^2$$

$$(35) 2x \cdot \sec^2 x = 2 \tan x$$

$$(36) \frac{\tan x - x \sec^2 x}{3 \tan^2 x}$$

$$(37) \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

$$(38) 3 \cos 3x + \cos(3x)^2 \times 18x$$

$$(39) -6 \sin x^2 \cos^2 x^2$$

$$(40) 2x \tan x + x^2 \sec^2 x$$

$$(41) -4 \operatorname{cosec}(4x + 1)$$

$$(42) \frac{\sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x} \sin^2 x}$$

$$(43) x^3 - \sin(2x) \times 2 + 3x^2 \cos 2x$$

$$(44) \frac{2 \sin x}{(2 + \cos x)^2}$$

$$(45) \frac{-\sin x(1 - \sin x) - (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$(46) 2 \cot 3x - 3 \operatorname{cosec}^2 3x$$

$$(47) \frac{-\sin x}{3\sqrt{(\cos x)^2}}$$

$$(48) 2(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$(49) 4 \sin x \cos x$$

$$(50) \text{zero}$$

$$(51) 2x \frac{(\cos 2x + x \sin 2x)}{\cos^2 2x}$$

$$(52) \frac{\sin x \cos x (2 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$(53) \sin x + \cos x$$

$$(54) \frac{2 \sin x + x \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$(55) 6\pi \cos(2\pi x)$$

$$(56) \sec x (2 \sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)$$

$$(57) \frac{2 \sec^2 x}{(2 - \tan x)^2}$$

$$(58) 5 \cos 5x$$

$$(59) -4 \sin 4x$$

$$(60) 2x \cos x^2$$

$$(61) -4 \cos^3 x \times \sin x$$

$$(62) \frac{3 \cos x}{2\sqrt{\sin 3x}}$$

$$(63) -2t^2 \cos t \sin t + 2t \cos^2 t$$

$$(64) \cos(2t + 2)$$

$$(65) \frac{2t \cos 2t - \sin 2t}{2t^2}$$

$$(66) \frac{-2a \sin t}{(a - \cos t)^2}$$

$$(67) \frac{-2a \sec^2 z}{(a + \tan z)^2}$$

$$(68) 5 \sec 5z \cdot \tan 5z$$

$$(69) \operatorname{cosec}(1 - z) \cdot \cot(1 - z)$$

$$(70) z^3 \sec z \tan z + 3z^2 \sec z$$

$$(71) \frac{\sec z \tan z}{(1 + \sec z)^2}$$

$$(72) -\frac{1}{x^2} \sin^2(1 - x^2) \left[6x^2 \cos(1 - x^2) + \sin(1 - x^2) \right]$$

$$(73) \frac{\sin(x + y) - y \cos x}{\sin x - \sin(x + y)}$$

$$(74) \frac{2x \tan y + y \sec^2 x}{x^2 \sec^2 y + \tan x}$$

$$(75) \frac{2x \sin x^2 - y^2 \sec x \tan x}{2y \sec x}$$

$$(76) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(77) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(78) x(2 \sin x + x \cos x)$$

$$(79) x \left(\frac{\sin 2x + x}{\cos^2 x} \right)$$

$$(80) \frac{\cos x - 2x \sin}{2\sqrt{x}}$$

$$(81) \frac{2 + \sin x}{(1 + 2 \sin x)^2}$$

$$(82) \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$$

$$(83) \frac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}$$

$$(84) \frac{-\cot^2 \frac{x}{3}}{\sin^2 \frac{x}{3}}$$

$$(85) \frac{2 \sin^2 2\theta}{\sqrt{2\theta + \cos^2 (2\theta + \frac{\pi}{4})}}$$

$$(86) \sec^6 x$$

$$(87) \frac{1}{2} \cos \theta$$

Exercise (12)

$$x = -\frac{\pi}{6} ، \text{ صغرى } ، x = \frac{\pi}{6} ، \text{ عظمى (1)}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ عند عظمى (2)}$$

$$90^\circ \text{ عند صغرى } ، 165^\circ 31' \text{ عند } ، 14^\circ 29' \text{ عند عظمى (3)}$$

$$x = \frac{\pi}{3} ، \text{ عظمى (4)}$$

$$x = \frac{\pi}{4} ، \text{ عظمى (5)}$$

$$x = \tan^{-1} 2 ، \text{ عظمى (6)}$$

$$33^\circ 42' \text{ تقريباً (7)}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ عندما } -1 ، \text{ صغرى (8)}$$

Exercise (13)

$$(1) \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \frac{\pi}{3}$$

$$(3) \frac{-\pi}{4}$$

$$(4) 0$$

$$(5) \frac{\pi}{6}$$

$$(6) (231.6^\circ)$$

$$(7) 16.6^\circ$$

$$(8) 111.9^\circ$$

$$(9) 22.4^\circ$$

$$(10) -40.1^\circ$$

$$(11) 23.7^\circ$$

$$(12) (\pi - \cos^{-1} x) \quad (13) \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$$

$$(14) \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (15) \frac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$(16) \frac{-b}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(17) -[a] \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(17) -[b] \frac{a}{a^2+x^2}$$

$$(18) \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$(19) \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^4}}$$

$$(20) \frac{-1}{1+(a-x)^2}$$

$$(21) \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$(22) \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$(23) \sin^{-1} x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(24) \frac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}$$

$$(25) \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(26) \frac{-2}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$(27) \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2x \sin^{-1} x$$

$$(28) \frac{2}{x^2-2x+5}$$

$$(29) \frac{1}{1+x^2}$$

$$(30) \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(31) \frac{2}{\sqrt{a^2x^2-1}}$$

$$(32) \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$$

$$(33) \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(34) \frac{-2}{x^2+1}$$

$$(35) \frac{2}{1+x^2}$$

$$(36) \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(37) \frac{3}{2x^2+2x+5}$$

$$(38) \frac{-3x^2}{9+x^2} + 3x^2 \cot^{-1} \frac{x}{3}$$

$$(39) \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$$(40) \frac{1}{x\sqrt{25x^2-1}}$$

$$(41) \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{cosec} x}$$

$$(42) 2x \tan^{-1} x + 1$$

$$(43) \frac{-1}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$(44) \frac{-1}{x^2+1}$$

$$(45) \frac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} + 2x \cos^{-1}(1-x^2)$$

$$(46) \tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$(47) \sec^2 x \sin^{-1} x + \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(48) \frac{4x \sin^{-1}(x^2-2)}{\sqrt{4x^2-x^4-3}}$$

$$(49) \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(50) 4x \operatorname{arc} \cos x$$

Exercise (14)

$$(1) 6e^{6x}$$

$$(2) \frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}$$

$$(3) \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$(4) -3e^{-3x}$$

$$(5) \frac{-7}{3} \cdot e^{\frac{7}{3}x}$$

$$(6) -3 \cdot e^{(4-3x)}$$

$$(7) -a e^{-ax}$$

$$(8) \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}}$$

$$(9) a e^{ax+b}$$

$$(10) -9 e^{-9x}$$

$$(11) e^{\sin x} \cos x$$

$$(12) e^x(x^2+2x)$$

$$(13) \frac{e^x}{e^x-1}$$

$$(14) e^{-2x}(\cos x - 2 \sin x)$$

$$(15) \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(16) \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(17) 2x e^{x^2}$$

$$(18) (x+1) e^x$$

$$(19) (1-x)e^{-x}$$

$$(20) x e^{-x}(2-x)$$

$$(21) e^x(x+5)$$

$$(22) \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$(23) 2^x \ln 2$$

$$(24) e^{\frac{1}{x}}(3x^2-x)$$

$$(25) e^x(\sin x + \cos x)$$

$$(26) 10e^x$$

$$(27) \frac{2 \times 10^{2x}}{0.4343}$$

$$(28) x^{n-1} \cdot a^x \cdot (n+x \log a)$$

$$(29) 2a^{2x+1} \log a$$

$$(30) -\sin x e^{\cos x}$$

$$(31) 2bx a^{bx^2} \log a$$

$$(32) (a+b)^x \log(a+b)$$

$$(33) e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$$

$$(34) \frac{3}{x} - 3$$

$$(35) \frac{-y^2 e^x + 2x e^y}{x^2 e^y + 2y e^x}$$

$$(36) \frac{e^x \sin y + e^y \sin x}{e^y \cos x - e^x \cos y}$$

$$(37) \frac{1}{x}$$

$$(38) \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$$

$$(39) 1 + \log x$$

$$(40) \cot x$$

$$(41) \frac{2a}{a^2 - x^2}$$

$$(42) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$(43) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(44) \frac{1}{\sin x}$$

$$(45) \frac{e^x(2x-1)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$(46) -ab e^{-bx} (\sin bx - \cos bx)$$

$$(47) \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$(48) \frac{1}{1+e^x}$$

$$(49) \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x} \cdot (b-x)}$$

$$(50) \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$(51) \frac{-a}{x\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$(52) \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$(53) a^2 e^{ax}, a^3 e^{ax}, a^4 e^{ax}, a^n e^{ax}$$

$$(54) a^2 e^{-ax}, -a^3 e^{-ax}, a^4 e^{-ax}, (-1)^n a^n e^{-ax}$$

$$(55) \frac{-1}{x^2}, \frac{1 \times 2}{x^3}, \frac{-1 \times 2 \times 3}{x^4}, \frac{(-1)^{n-1} |n-1|}{x^n}$$

$$(56) \frac{(5x-2)\sqrt{x-1}}{2}$$

$$(57) -x^{-x}(1 + \ln x)$$

$$(58) \frac{x^4 - 8x^2 - 16}{(4x^2 + x^4)\sqrt{(16 - x^4)}}$$

$$(59) 2x^{\ln(x-1)} \cdot \ln x$$

$$(60) (\sin^{-1} x)^x \left[\frac{x}{\sin^{-1} x \sqrt{1-x^2}} + \ln(\sin^{-1} x) \right]$$

$$(61) e^{-x^2} \sin 3x [6 \cos 3x - 3x^2 \sin 3x]$$

$$(63) 2x + 3^x \log 3$$

$$(64) -2x e^{-x^2} \quad (65) e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$$

$$(66) 2a(e^{2ax} - e^{-2ax}) \quad (67) \frac{2 \cot^2 x}{\sin x}$$

$$(68) (2x + x^2 \log 2) \cdot 2^x \quad (69) \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} \left(\cos \frac{x}{a} - \sin \frac{x}{a} \right)$$

$$(70) a^{\sin x} \cos x \log a \quad (71) \frac{1}{\cos x}$$

$$(72) 2x(1-x)e^{-2x} \quad (73) \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$(74) \frac{2}{x-ax^5} \quad (75) -\tan x \sin^2 x$$

$$(76) \frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (77) x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\log x}{x^2}$$

$$(78) \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \quad (79) \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$(80) \frac{-1}{\sqrt{x-4x^2}} \quad (81) \cot 2x$$

$$(82) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (83) 2\sqrt{1-x^2}$$

$$(84) 2e^x \sqrt{1-e^{2x}} \quad (85) \frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}$$

$$(86) \frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}} \quad (87) \sqrt{\frac{2}{x}-4}$$

$$(88) \frac{4e^x}{1-e^{8x}}$$

Exercise (15)

$$(1) \frac{1}{4} \cosh \frac{x}{4}$$

$$(2) 3 \cosh 3x$$

$$(3) \frac{1}{3} \sinh \frac{x}{3}$$

$$(4) b \operatorname{sech}^2 bx$$

$$(5) \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2}$$

$$(6) b(\cosh bx + \sinh bx)$$

$$(7) \frac{-1}{x^2} \cosh \frac{1}{x}$$

$$(8) \sinh 2x$$

$$(9) 3 \cosh^2 x \sinh x \quad (10) a \cosh(ax + b)$$

$$(11) na \sinh^{-1}(ax) \cosh(ax)$$

$$(12) 2 \tanh x \operatorname{sech}^2 x$$

$$(13) x \cosh x$$

$$(14) 3x^2 \sinh 3x + 3x^3 \cosh 3x$$

$$(15) 1$$

$$(16) \operatorname{sech}^2 x e^{\tanh x}$$

$$(17) \frac{-2}{(1+x)\sqrt{2(1+x^2)}}$$

$$(18) \frac{2}{1-x^2}$$

$$(19) \frac{2}{1-x^4}$$

$$(20) \frac{1}{2} \operatorname{sech} x$$

$$(21) \tanh^2 x$$

$$(22) -\frac{4}{\sinh^2 2x}$$

$$(23) 4 \sinh 4x$$

$$(24) \operatorname{coth}^2 x$$

$$(25) \sqrt{\cosh x + 1}$$

$$(26) \frac{1}{\cosh x}$$

$$(27) \frac{2}{\sinh 2x}$$

Exercise (16)

$$(1) \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, \frac{-x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$(2) \frac{a}{y^2}, -\frac{2ax}{y^3}$$

$$(3) \quad yx^{y-1}, x^y \log x$$

$$(4) \quad \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$(5) \quad \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$(6) \quad 3x^2+6xy+6y^2, 3x^2+12xy+6y^2$$

$$(7) \quad -2x \sin(x^2+y^2), -2y \sin(x^2+y^2)$$

$$(8) \quad (2xy+y^3) dx + (x^2+3xy^2) dy$$

$$(9) \quad 2(ax+by) dx + 2(bx+cy) dy$$

$$(10) \quad \frac{ydx-xdy}{y^2}$$

$$(11) \quad \frac{y}{x} dx + \log x dy$$

$$(12) \quad e^{xy}(ydx+xdy)$$

$$(13) \quad a^x e^y (\log a dx + dy) \quad (14) \quad 0.04 \text{ تقريباً}$$

$$(15) \quad 5x^4 \text{ كل منهما تساوي}$$

$$(16) \quad 150\pi \Delta m^3 / \text{sec}$$

$$(17) \quad -2x, -4y$$

$$(18) \quad \frac{-x}{z}$$

$$(19) \quad \frac{dz}{dy} = \frac{-2y}{3z} \text{ (if } z \neq 0), \frac{dz}{dx} = \frac{-x}{3z}$$

$$(20) \quad \frac{-2xy+y^2}{x^2+2xy}$$

$$(21) \quad \frac{dw}{dx} = \left(2 + \cos^2 \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} \right) \left(-\sin \frac{5\pi}{12} \right) - \left(\cos^2 \frac{5\pi}{12} - 2 \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} - 3 \right) \left(\sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(22) \quad a=b=c \text{ ذات قيمة عظيمة عندما } a \times b \times c \text{ تكون}$$

وهذا ينطبق على أى عدد من العوامل أى $(a \times b \times c \times d \times \dots)$.