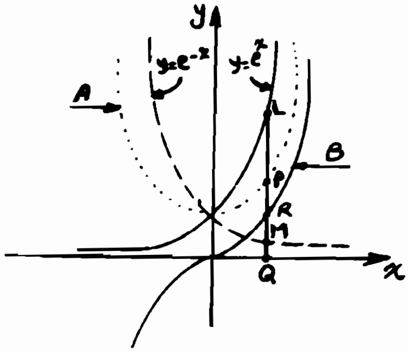
البـــاب الرابع عشر

الـدوال الزائدية Hyperbolic Functions

١٤-١ :- عـــام :-

يوضح شكل (١٤-١) ، كـلاً من منحنيى e^{-x} , e^{x} بالإضافة إلى منحنيين آخرين وهما B , A بالشكل .



شكل (١٤-١)

ويُلاحظ ما يلى على هذه المنحنيات :-

(١) الإحداثى الرأسى (الصادى) لأى نقطـة علـى المنحنـى A يعـادل نصـف مجمـوع الإحداثى الصادى للنقطتين المناظرتين للنقطة الأولى على منحنى e^{-x} , e^{x}

فمثـــلاً النقطـة P علـى المنحنـى A ، إحداثيهـــا الصـــادى PQ يعـــادل نصـــف مجموع كل من MQ , LQ

وعليه فإنه لأى نقطة على المنحنى A :-

$$\therefore y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

(٢) الإحداثى الصادى (الرأسى) لأى نقطة على المنحنى B ، يعادل نصـف الفرق بين الإحداثى الصادى لكل من المنحنيين الآخرين e^{-x} , e^{x}

$$RQ = \frac{1}{2}[LQ - MQ]$$

∴ لأى نقطة على المنحنى B :-

$$\therefore y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

وعليه فإن المنحنيين يمثلان دالتان فى x ومعادلتهما كالتالى :-

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad , \quad y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

وقد وجد أن خواص هاتين الدالتين تماثل خواص $y = \cos x$, $y = \sin x$ ويطلق على الدالة $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ ، بجيب التمام الزائدى Hyperbolic cosine

بينما يُطلق على الدالة $y = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ بالجيب الزائدى Hyperbolic sine

وقد اختصرت إلى $\cosh x$, $\sinh x$

وتعنى إضافة " h " بآخر الرمز إلى الزائدى (Hyp . cos , Hyp . sin)

$$\therefore \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

$$, \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

ومنها نصل إلى :-

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

وهنالك أربع دوال زائدية أُخرى :-

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$, \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$, \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$, \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

وفى الرسم (١٤-١) يوضح المنحنى A ، الذى يمثل أهمية كبيرة ويُطلق عليه منحنى الكتينه Catenary وهو يأخذ الشكل الذى تأخذه سلسلة منتظمة مرنة معلقة بحرية مع تثبيت نهايتيها .

ويمكن التعبير عن $\sinh x$, $\cosh x$ فى صورة متسلسلة باستخدام مفكوك e^x السابق ذكره فى الباب السابق .

$$, \because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots$$

$$, \because e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots$$

$$\therefore \cosh x = 1 + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \ldots$$

$$, \sinh x = x + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} \ldots$$

١٤-٢ :- بعض العلاقات للدوال الزائدية :-

هنالك تشابه كبير بين العلاقات التى تربط الدوال الزائدية وتلك التى تربط الدوال المثلثية ولنعتبر المثالين التاليين :-

$$1)\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2\right) - \left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right)\right] = 1$$

$$\therefore \left[\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\right]$$

وهى تشبه العلاقة المثلثية الشهيرة :- $\left[\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right]$

$$2)\ \cosh^2 x + \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh 2x$$

$$\therefore \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

وهى تشبه العلاقة المثلثية الشهيرة :- $\left[\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x\right]$

وبالمثل فإن أى علاقة مثلثية لها نظير فى الدوال الزائدية ويُلاحظ من الحالتين السابقتين أن هنالك اختلافاً فى الإشارات .

وهذا ينطبق فقط على $\sinh^2 x$

وقد وضعت قاعدة تُعرف بقاعدة أوسبورن Osborn's rule ، والتى عن طريقها يمكننا كتابة أى دالة زائدية مباشرة من الدوال المثلثية المناظرة لها ، حيث يتم تغيير إشارة أى عنصر فى الدوال المثلثية يحتوى على $\left[\sin^2 \text{ أو } \sin \times \sin\right]$ كما يلى :-

الدالة المثلثية :- $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

تُصبح :- $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$

وذلك لأن :- $\tanh^2 x = \dfrac{\sinh x \times \sinh x}{\cosh x \times \cosh x}$

وفيما يلى جدول يوضح أهم العلاقات فى الدوال الزائدية وما يقابلها من دوال مثلثية :

الـدوال المثلثية	الـدوال الزائـدية
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$	$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$
$\operatorname{cosec}^2 x = \cot^2 x + 1$	$\operatorname{cosech}^2 x = \coth^2 x - 1$
$\sin(x \pm y) = \sin x \,.\, \cos y \pm \cos x \sin y$	$\sinh(x \pm y) = \sinh x \,.\, \cosh y \pm \cosh x \,.\, \sinh y$
$\cos(x \pm y) = \cos x \,.\, \cos y \mp \sin x \,.\, \sin y$	$\cosh(x \pm y) = \cosh x \,.\, \cosh y \pm \sinh x \,.\, \sinh y$

جدول (١٤-١)

كما توجد بعض العلاقات بين مجموعتى الدوال المثلثية والزائدية :-

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right), \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right), \sin x = \frac{1}{2} i \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$, \sinh x = \frac{1}{i} \sin ix$$

$$, \cosh x = \cos ix$$

حيث : $i = \sqrt{-1}$

١٤-٣ :- تفــاضل الدوال الزائدية :-

(١) sinh x :-

لتكن :

$$y = \sinh x$$

$$= \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

(٢) cosh x :-

لتكن :-

$$y = \cosh x$$

$$= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

(٣) tanh x :-

يمكن إيجاد مشتقتها من التعريف بها فى الصورة الأسية :-

$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ ، أو كالتالى :-

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

وباستخدام قاعدة القسمة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cosh x \, . \cosh x-\sinh x \, . \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh^2 x}=\operatorname{sech}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tanh x)=\operatorname{sech}^2 x$$

وبالمثل فإنه يمكن إثبات التالى :-

$$y=\operatorname{cosech} x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosech} x \coth x$$

$$, y=\operatorname{sech} x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$, y=\coth x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosech}^2 x$$

ويجب على القارئ الرجوع إلى مُشتقة الدوال المُثلثية المشابهة للمقارنة .

(١٤) : منحنيات الدوال الزائدية :-

ارجع لشكل (١٤-١) الذى يوضح منحنى $y=\cosh x$, $y=\sinh x$

$$(1) \quad y=\cosh x \ , \ \frac{dy}{dx}=\sinh x \ , \ \frac{d^2y}{dx^2}=\cosh x$$

، $\frac{dy}{dx}$ ، تساوى الصفر فقط عندما $x=0$ ولذلك توجد نقطة تحول على المنحنى (A) وحيث أن $\sinh x$ ، سالبة قبل هذه النقطة وموجبة بعدها ، بينما $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، موجبة فتكون النقطة نهاية صغرى ولا توجد نقط تحول أُخرى أو نُقط انقلاب على المنحنى (A) .

$$(2) \quad y=\sinh x : \ \frac{dy}{dx}=\cosh x \ , \ \frac{d^2y}{dx^2}=\sinh x$$

، $\frac{dy}{dx}$ أى $\cosh x$ دائماً موجبة ولا تساوى الصفر أبداً وبالتالى فإن $\sinh x$ **تتزايد دائماً** وليس لها نقط تحول .

إلا أنه عندما $x=0$ ، فإن :- $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ وهى سالبة قبل O وموجبة بعدها

(O = نقطة الأصل) .

ولذلك فإنه **توجد نقطة إنقلاب** عندما $x = 0$

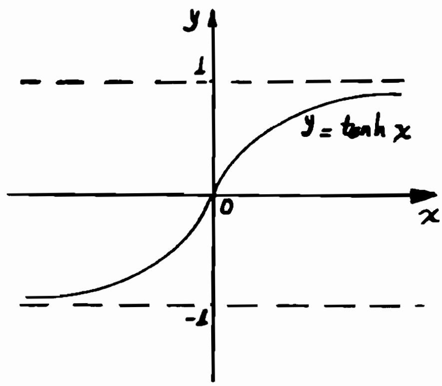
ويكون الميل عند نقطة O مساوياً للواحد والزاوية $= \frac{\pi}{4}$

$$(3) \quad y = \tanh x : \quad , \frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

وحيث أن $\operatorname{sech}^2 x$ دائماً موجبة فإن $\tanh x$ تتزايد دائماً فيما بين $-\infty$, $+\infty$

وحيث أن كلاً من $\sinh x$, $\cosh x$ مستمرة دائماً (متصلة) كمـا وأن $\cosh x$ لا تساوى الصفر أبداً ، لذلك فإن $\tanh x$ ، يجب أن تكون **دالة متصلة** .

ويوضح الشكل (١٤-٢) منحنى $\tanh x$.



شكل (١٤-٢)

كما يمكن كتابة $\tanh x$ فى الصورة :

$$\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

ويتضح من هذه الصورة أنه عندما تزداد x من $-\infty$ إلى $+\infty$ فإن e^{2x} تتزايدمن صفر إلى ١ .

$$\therefore 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

أو $\tanh x$ تتزايد من - ١ إلى صفر .

وبالمثل فإنه عندما تزيد x من صفر إلى $+\infty$ فإن $\tanh x$ تزيد من صفر إلى الواحد .

ولهذا فإن المنحنى له خطى تقارب asymptotes وهما $y = \pm 1$ وموضحين بالشكل .

١٤-٥ :- تفاضل الدوال الزائدية العكسية

تتشابه الدوال الزائدية العكسية مع نظيرتها (الدوال المثلثية)

ولذلك فإنه يتم استخراج المعادلات التفاضلية (للأولى) بطريقة مشابهة لما تم فى (الثانية) .

(١) تفاضل $\sinh^{-1} x$:

$$\because y = \sinh^{-1} x$$

$$\therefore x = \sinh y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \cosh y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sinh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(٢) تفاضل $\cosh^{-1} x$:

باستخدام نفس الطريقة كما سبق فإن :

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(٣) تفاضل $\tanh^{-1} x$:

$$\because y = \tanh^{-1} x$$

$$\therefore x = \tanh y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \operatorname{sech}^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

(٤) تفاضل $\coth^{-1} x$, $\operatorname{cosech}^{-1} x$, $\operatorname{sech}^{-1} x$:-

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \operatorname{cosech}^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}$$

$$y = \coth^{-1} x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

وفيما يلى صيغتان هامتان :-

$$\text{if} \qquad y = \sinh^{-1} \frac{x}{a} :-$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\text{if} \qquad y = \cosh^{-1} \frac{x}{a} :-$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

١٤-٦ :- المكافئ اللوغاريتمى للدوال الزائدية العكسية

$$\sinh^{-1} x = Log\left[x + \sqrt{\left(1 + x^2\right)}\right] \qquad (١)$$

لتكن $y = \sinh^{-1} x$

$$\therefore x = \sinh y$$

ولكن $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 y$

$$= 1 + x^2$$

و $\cosh y = + \sqrt{1 + x^2}$ ($\cosh y$ دائماً موجبة)

$$\therefore \sinh y + \cosh y = x + \sqrt{1 + x^2}$$

ولكن $\sinh y + \cosh y = e^y$

$$\therefore e^y = x + \sqrt{1 + x^2}$$

وبأخذ اللوغاريتمات للطرفين

$$\therefore y = Log\left[x + \sqrt{\left(1 + x^2\right)}\right]$$

$$\therefore \sinh^{-1} x = Log\left[x + \sqrt{x^2 + 1}\right]$$

(٢) $$\cosh^{-1} x = \pm Log\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right]$$

لتكن $$y = \cosh^{-1} x$$

$$\therefore x = \cosh y$$

ولكن $$\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$$

$$= x^2 - 1$$

$$\therefore \sinh y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

[ويمكن أخذ كل من الإشارتين $(\pm)$ لجذر المقدار $\left(x^2 - 1\right)$]

$$\because e^y = \sinh y + \cosh y$$

$$= \pm \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$= x \pm \sqrt{\left(x^2 - 1\right)}$$

وبأخذ اللوغاريتم للطرفين :-

$$\therefore y = Log\left[x \pm \sqrt{\left(x^2 - 1\right)}\right]$$

$$\therefore \cosh^{-1} x = Log\left[x \pm \sqrt{\left(x^2 - 1\right)}\right]$$

وبجمع هاتين الكميتين [$(\pm)$ مرة بالزائد ومرة بالناقص]

$$\therefore Log\left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right] + Log\left[x - \sqrt{x^2 - 1}\right]$$

$$= Log\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$$

$$= Log\left[x^2 - \left(x^2 - 1\right)\right] = Log\ 1 = 0$$

أى أن كلاً من قيمتى $\cosh^{-1} x$ متساويتين ومختلفتين فقط فى الإشارة

$$\therefore \cosh^{-1} x = \pm Log\left[x + \sqrt{\left(x^2 - 1\right)}\right]$$

[**ملحوظة** : x تقع بين 1 , $+\infty$]

(٣) $$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Log \frac{1 + x}{1 - x}$$

لتكن

$$y = \tanh^{-1} x$$

$$\therefore x = \tanh y$$

(x تقع بين ١- , ١+) كما ذكرنا سابقاً فى نهاية البند (١٤-٤)

$$\therefore x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\therefore x\left(e^{2y} + 1\right) = e^{2y} - 1$$

$$\therefore e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\therefore 2y = Log\,\frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\,Log\,\frac{1 + x}{1 - x}$$

$$i.e \quad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\,Log\,\frac{1 + x}{1 - x}$$

١٤-٧ :- موجز لتفاضل الدوال الزائدية العكسية :-

الــدالة	تفــاضلها
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1 - x^2}$
$\operatorname{cosech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1 + x^2}}$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$
$\coth^{-1} x$	$\frac{-1}{x^2 - 1}$

كما وأن الصيغ التالية ذات أهمية ، كذلك ؛

when $\quad y=\sinh^{-1}\dfrac{x}{a} \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$, y=\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$, y=\tanh^{-1}\dfrac{x}{a} \qquad \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{a^2-x^2}$

وفيما يلى المكافئ اللوغاريتمى للثلاث دوال العكسية السابقة :-

$$\sinh^{-1}\frac{x}{a}=Log\left[\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right]$$

$$\cosh^{-1}\frac{x}{a}=\pm Log\left[\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right]$$

$$\tanh^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{2}Log\left[\frac{a+x}{a-x}\right]$$

١٤-٨ :- أمثلـــة محلولة :-

(١) إذا علمت أن :-

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$, \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$, \tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$, \operatorname{sech} x=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

فبين أن :-

$$\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x$$

$$, \frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x$$

$$, \frac{d}{dx}\tanh x=\operatorname{sech}^2 x$$

الحــــــــل :-

$$a)\quad \because \sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sinh x = \frac{2\left(e^{x} + e^{-x}\right) - \left(e^{x} - e^{-x}\right)\times 0}{2^{2}}$$

$$= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$b)\quad \because \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cosh x = \frac{2\left(e^{x} - e^{-x}\right) - \left(e^{x} + e^{-x}\right)\times 0}{2^{2}}$$

$$= \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$c)\quad \because \tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tanh x = \frac{\left(e^{x} + e^{-x}\right)\left(e^{x} + e^{-x}\right) - \left(e^{x} - e^{-x}\right)\left(e^{x} - e^{-x}\right)}{\left[e^{x} + e^{-x}\right]^{2}}$$

$$= \frac{\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{\left[e^{x} + e^{-x}\right]^{2}}$$

$$= \frac{4}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)^{2}} = \left[\frac{2}{\left(e^{x} + e^{-x}\right)}\right]^{2}$$

ولكن لـدينا :-

$$\frac{2}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x} = \text{sech } x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tanh x = \text{sech}^{2} x$$

(٢) إذا علمت أن :-

$$\sinh^{-1} x = Ln\left[x + \sqrt{1 + x^{2}}\right]$$

$$, \cosh^{-1} x = \pm Ln\left[x + \sqrt{x^{2} + 1}\right]$$

$$, \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Ln\left[\frac{1 + x}{1 - x}\right]$$

فاثبت أن :-

1) $\dfrac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3) $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}$

الحـــــــل :-

1) $\because \sinh^{-1} x = Ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$

$$\therefore \frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{d}{dx} Ln\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\tfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}} \times 2x\right]$$

$$= \left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right] \times \left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \left[\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]\left[\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2) $\because \cosh^{-1} x = \pm\, Ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{d}{dx}\left[\pm\, Ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]$$

$$= \pm\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \times \left[1+\tfrac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{\frac{-1}{2}} \times 2x\right]$$

$$= \pm\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \pm \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \pm \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3) $\because \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} Ln \frac{1 + x}{1 - x}$

$$\therefore \frac{d}{dx} \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \times \frac{d}{dx}\left[Ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)\left[\frac{(1 - x)(1) - (1 + x)(-1)}{(1 - x)^2}\right]$$

$$= \frac{(1 - x)\left[(1 - x) + (1 + x)\right]}{2\,(1 + x)(1 - x)^2} = \frac{2\,(1 - x)}{2\,(1 + x)(1 - x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1 + x)\,(1 - x)} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Exercise 15

فــاضل كل من الدوال التالية :-

(١) $\sinh \frac{x}{4}$

(٢) $\sinh 3x$

(٣) $\cosh \frac{x}{3}$

(٤) $\tanh bx$

(٥) $\tanh \frac{x}{2}$

(٦) $\sinh bx + \cosh bx$

(٧) $\sinh \frac{1}{x}$

(٨) $\sinh^2 x$

(٩) $\cosh^3 x$

(١٠) $\sinh (ax + b)$

(١١) $\sinh'' ax$

(١٢) $\tanh^2 x$

(١٣) $x \sinh x - \cosh x$

(١٤) $x^3 \sinh 3x$

(١٥) $Log (\sinh x + \cosh x)$

(١٦) $e^{\tanh x}$

(١٧) $\sinh^{-1} \dfrac{1-x}{1+x}$

(١٨) $\tanh^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$

(١٩) $\tan^{-1} x + \tanh^{-1} x$

(٢٠) $\tan^{-1} \left(\tanh \dfrac{x}{2} \right)$

(٢١) $y = x - \tanh x$

(٢٢) $y = \tanh x + \coth x$

(٢٣) $y = \sqrt{1 + \sinh^2 4x}$

(٢٤) $y = x - \coth x$

(٢٥) $y = 2\sqrt{\coth x - 1}$

(٢٦) $y = \sin^{-1} (\tanh x)$

(٢٧) $y = Log\,(\tanh x)$