

الباب الثالث عشر

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and logarithmic functions

١٣-١ :- عام

وقد سبق لنا دراسة القوانين التالية فى الجبر الأولى ،

$$1 - a^m a^n = a^{m+n}$$

$$4 - (a^m)^n = a^{mn}$$

$$2 - \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$5 - (ab)^m = a^m b^m$$

$$3 - \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$6 - a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

وللتحدث عن الأسس الكسرية فإنه يلزم التعرض لجذور الأعداد ومن ثم يجب معرفة ما هو جذر العدد .

فإذا كان لدينا عددين a , b بحيث أن الأس النونى (n) للعدد a [عدد موجب] أى a^n يساوى b

فإنه يقال أن a هى الجذر النونى للعدد b أى أنه :-

$$\text{if } a^n = b$$

$$\therefore a = \sqrt[n]{b}$$

وكما نعلم فإن أى عدد لا صفري *nonzero number* ، يكون له جذران تريعيين وثلاثة جذور تكعيبية وأربعة جذور من الدرجة الرابعة وهكذا ؛ وتشتمل جذور الأعداد على قيم حقيقية وتخيلىة .

فإذا فرضنا أن عدداً له جذر نونى واحد حقيقى فإنه يُطلق على هذا الجذر بالجذر النونى الرئيسى .

وعليه فإن الجذر التكعيبي الرئيسى للعدد ٢٧- هو ٣- بينما الجذران الآخرا هما تخيليان والجذر الرئيسى الرابع للعدد ١٦ هو ٢

كما وأن الجذور الزوجية الرتبة للأعداد السالبة تكون كلها تخيلية .

مثل : $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-256}$ ، وفي هذه الحالات فإنه لا يمكننا أخذ وتحديد أحد الجذور كجذر رئيسي للعدد السالب .

وعموماً فإن $\sqrt[n]{a}$ يرمز للجذر الرئيسي النوني للعدد a فإذا ما افترضنا أن m عدداً موجباً أو سالباً وأن n عدداً موجباً .
وأن a عدداً موجباً ، عندما تكون n عدداً زوجياً .

فإذا كانت a عدداً موجباً أو سالباً وكانت n عدداً فردياً . فإنه :-
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

وبعد هذا التقديم السريع للأسس ، فإن الطريق يصبح مفتوحاً أمامنا ، لدراسة اللوغاريتمات والتعرف على خواصها .

تعريف :- إذا كانت b عدداً موجباً بخلاف الواحد ، وأن y عدد حقيقي في المعادلة :-
$$x = b^y$$

فإن y تُعرف بأنها لوغاريتم x للأسس b

أى أن لوغاريتم العدد x ، هو الأس الذى يرفع له عدد ما (الأساس) لكى يصبح مساوياً للعدد x

أى أن y وهى اللوغاريتم للعدد x هى الأس الذى يرفع إليه العدد y لكى تصبح النتيجة هى العدد x .

وتكتب : $y = \text{Log}_b x$ أى أنه يتم التعبير عن معنى y هذا بكتابة $\text{Log}_b x$

وبذلك فإن :-
$$b^y = x , y = \text{Log}_b x$$

تُعبّر عن نفس العلاقات الرابطة بين x , y , والصورة $b^y = x$ هى معادلة فى الصورة الأسية بينما $y = \text{Log}_b x$ هى معادلة فى الصورة اللوغاريتمية .

ونذكر هنا ثلاثة قوانين هامة للوغاريتمات والتي يتم استنتاجها من قوانين الأسس :-

$$\text{Log}_b MN = \text{Log}_b M + \text{Log}_b N$$

$$, \text{Log}_b \frac{M}{N} = \text{Log}_b M - \text{Log}_b N$$

$$, \text{Log} M^p = p \text{Log}_b M$$

ويوجد نظامان للوغاريتمات يستخدمان بكثرة فى الرياضيات ؛

فى النظام الأول (اللوغاريتمات العددية) الأساس هو العدد ١٠ وتستخدم فى الحسابات .
 أما فى الأعمال النظرية وحساب التفاضل فإنه يفضل استعمال أساس آخر خلاف الرقم ١٠
 وهو ما يرمز له بالرمز e وهو عدد تقريبي ويرمز لهذه اللوغاريتمات باللوغاريتمات الطبيعية
 كما سيرد بالتفصيل فيما بعد ؛

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

سبق لنا دراسة قانون الفائدة البسيطة والفائدة المركبة وفى نظام استثمار الأموال بالفائدة
 البسيطة فإن رأس المال يبقى ثابتاً من عام لآخر دون أى زيادة .

إلا أنه فى نظام الاستثمار بالفائدة المركبة فإن الأرباح تضاف إلى رأس المال فى نهاية العام
 (أو كل فترة متفق عليها) ويصبح رأس المال للعام التالى عبارة عن رأس المال السابق مضافاً
 إليه ربح العام (أو الفترة) وهكذا ، .

فإذا افترضنا أن :- رأس المال المستثمر p

النسبة المئوية للربح فى العام r

وبذلك يكون الربح المضاف عند نهاية السنة الأولى $p \times \frac{r}{100}$

∴ رأس المال عند نهاية السنة الأولى $p + \frac{pr}{100}$

$$p \left(1 + \frac{r}{100} \right) =$$

ويعتبر هذا المبلغ رأس المال الجديد للعام التالى وبنفس الطريقة كما اتبعنا فى العام الأول :-

∴ رأس المال عند نهاية السنة الثانية $p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^2$

، رأس المال عند نهاية السنة الثالثة $p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3$

، رأس المال عند نهاية السنة t $p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^t$

فإذا افترضنا أن الفائدة تضاف عند نهاية كل نصف عام بدلاً من عند نهاية العام :-

∴ رأس المال المستثمر عند نهاية نصف العام الأول $p \left(1 + \frac{r}{2 \times 100} \right)$

$$p \left(1 + \frac{r}{2 \times 100} \right)^2 = \text{رأس المال المستثمر عند نهاية العام الأول} ،$$

$$p \left(1 + \frac{r}{2 \times 100} \right)^4 = \text{رأس المال المستثمر عند نهاية العام الثاني} ،$$

$$p \left(1 + \frac{r}{2 \times 100} \right)^{2t} = \text{رأس المال المستثمر عند نهاية العام } t ،$$

أما إذا أضيفت الأرباح بمعدل ٤ مرات سنوياً :-

$$p \left(1 + \frac{r}{4 \times 100} \right)^4 = \text{رأس المال المستثمر في نهاية العام الأول} \therefore$$

$$p \left(1 + \frac{r}{4 \times 100} \right)^{4t} = \text{رأس المال المستثمر في نهاية العام } t ،$$

وبالمثل إذا ما أضفنا الفائدة بمعدل ١٢ مرة سنوياً أى مرة كل شهر :-

$$p \left(1 + \frac{r}{12 \times 100} \right)^{12t} = \text{رأس المال المستثمر في نهاية العام } t \therefore$$

وإذا أضفنا الأرباح m من المرات في العام :-

$$p \left(1 + \frac{r}{m \times 100} \right)^{mt} = \text{فإن رأس المال المستثمر في نهاية العام } t$$

ولنفترض أن :-

$$\frac{r}{m \times 100} = \frac{1}{h}$$

$$\therefore m = \frac{nr}{100}$$

$$p \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{nr}{100}} = \text{رأس المال المستثمر في نهاية العام } t \therefore$$

$$p \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{rt}{100}} =$$

فيذا ما افترضنا أن n أصبحت كبيرة جداً جداً أى أن الفائدة تُضاف عند نهاية فترات زمنية صغيرة جداً جداً بحيث أن عملية نمو رأس المال تبدو كما لو كانت متصلة (بعكس الوضع

السابق فهي ساكنة طوال العام أو الفترة ثم تزيد فجأة في نهايتها) .

وعليه فإن الكمية التي يصل لها رأس المال تصبح عبارة عن نهاية المقدار :-

$$p \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{100}$$

وذلك عندما تصبح n كبيرة جداً .

ولإيجاد ذلك فإنه يلزم إيجاد نهاية $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ عندما تقترب n من ∞ أى $n \rightarrow \infty$

$$p \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{100} = \text{المقدار} \therefore$$

وسنبدأ فيما يلي فى إيجاد نهاية المقدار $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ عندما $n \rightarrow \infty$

$$\text{٢-١٣ :- قيمة } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

نقوم بفك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين Binomial theorem :-

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots$$

ثم نختصر بحذف n^5 فى البسط مع n^5 فى المقام :-

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= 1 + 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)}{2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right)}{3} + \dots \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{r-1}{n} \right)}{r} + \dots \end{aligned}$$

ونهاية المقدار $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ هى بلا شك عبارة عن مجموع نهايات هذه الحدود مجتمعة ،

وذلك كالتالى :-

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{r-1}{n})}{\lfloor r \rfloor} = \frac{1}{\lfloor r \rfloor}$$

وهكذا .

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

وبذلك فإن النهاية عبارة عن متوالية لا نهائية ، إلا أنه يمكن إثبات أنه إذا زاد عدد الحدود بدون حد (زيادة لا نهائية)

فإن مجموع كل من الحدود يقترب من نهاية محددة . أى أن المتوالية تقاربية ، وقد تم حساب قيمتها بدرجة بالغة الدقة ويمكن حسابها بدرجة الدقة المطلوبة (تزداد الدقة كلما جمعنا عدداً أكبر من الحدود) .

ويمكن حسابها بحساب كل حد على حدة وذلك بقسمة البسط على المقام .

	١,٠٠٠٠٠٠	= الحد الأول
	١,٠٠٠٠٠٠	= الحد الثاني
(بقسمة الحد الثاني ÷ ٢)	٠,٥٠٠٠٠٠	= الحد الثالث
(بقسمة الحد الثالث ÷ ٣)	٠,١٦٦٦٦٧	= الحد الرابع
	٠,٠٤١٦٦٧	= الحد الخامس
	٠,٠٠٨٣٣٣	= الحد السادس
	٠,٠٠١٣٨٩	= الحد السابع
	٠,٠٠٠١٩٨	= الحد الثامن
	٠,٠٠٠٠٢٥	= الحد التاسع
	٠,٠٠٠٠٠٣	= الحد العاشر
	٢,٧١٨٢٨٣	∴ مجموع عشرة حدود =

وبذلك فإن قيمتها لأقرب خمسة أرقام عشرية : ٢,٧١٨٢٨

وهذا الرقم الثابت يرمز له بالحرف e (أو "هـ")

وتعرف بالقيمة التقريبية ؛

$$i.e: e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

فيذا رمزنا لقيمة المقدار $p \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\frac{rt}{100}}$ بالمقدار A باعتبار أن إضافة الربح

مستمرة على فترات صغيرة جداً ، بعد t من السنوات وبأن n تصبح كبيرة جداً :-

$$\therefore A = p \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore A = p e^{\frac{rt}{100}}$$

$$x = \frac{rt}{100} \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore A = p e^x$$

وتُعرف e^x بالدالة الأسية الطبيعية وذلك لأن الأس هو المقدار المتغير في الدالة ($e =$ ثابت) وهنا يلزم أن نفرق بين الدوال العادية التي سبق التعرض لها في هذا الكتاب وبين الدوال الأسية واللوغاريتمية التي هي أساس هذا الباب .

فالدوال العادية مثل :- $y = x^5$, المتغير التابع ، x هي المتغير المستقل [والأساس هو x متغير والأس $5 =$ ثابت]

وعند دراسة القوى في هذه الحالة ، نلاحظ الأساس (x) فعندما يكون الأساس واحداً فإنه يتم جمع القوى عند الضرب وطرحها عند القسمة وضربها عند الرفع إلى قوى أعلى كالتالي:-

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$, x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$, [x^m]^n = x^{mn}$$

أى أن الدوال الأسية العادية هي تلك الدوال التي يكون الأساس فيها متغير والقوة أو الأس ثابت ؛ $[y = x^5]$ فيها x الأساس متغير والقوة 5 ثابتة . أى أن x يمكن أن تتغير بينما

$$\text{القوة ثابتة ومثل } y = 5 (\sin x)^2$$

بينما الدوال الأسية الطبيعية أو موضوع هذا الباب ، فهي الدوال التي تكون قيمة الأساس فيها ثابتة بينما القوة أو الأس متغيرة .

$$\text{مثل } y = e^x \text{ [} e \text{ ثابت ، } x \text{ متغير]}$$

$$\text{ومثل } y = a^{(x^2 - 5x)}$$

وتبين هذه الدوال النمو في ظاهرة معينة في فترات زمنية متتالية سنة ، سنتين ، أو شهر وشهران

ويمثل هذا النوع من الدوال معدلات نمو ظاهرة معينة بصورة منتظمة ومستمرة أى تلك التي يكون فيها النمو جارياً بصورة مستمرة وليس في فترات غير متصلة كسنوات أو شهور أو أسابيع مثل حسابات البنوك .

والنمو المتواصل المستمر وليس المتقطع على فترات يكون مثل ظاهرة تآكل الشواطئ ونمو السكان في مجتمع ما وزيادة وزن الحيوانات مع زيادة التغذية .

وفي كثير من الظواهر الكيميائية والفيزيائية وفي الهندسة الكهربائية نجد أن القيمة التقريبية $[e = 2,71828]$ ذات أهمية كبيرة رياضياً ، لأن هذه الظواهر كثيراً ما تربطها علاقات تحتوى على دوال أسية .

ويمكننا الآن التعبير عن الدالة e^x كمتسلسلة تحتوى على قوة متزايدة تصاعدياً في x ، لأنها تبين أن القيمة التقريبية e إذا رفعت لأى قوة x مثلاً فإن الناتج يكون عبارة عن متسلسلة تقاربية convergent

ولهذا تستخدم e كأس للوغاريتمات الطبيعية كما سيرد فيما بعد ، .

$$\therefore e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\therefore e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

وبفك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين :-

$$\begin{aligned} \therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} &= 1 + nx \cdot \frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &\quad + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)}{2} + \frac{x\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{2}{n}\right)}{3} + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$i.e \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

وكما هو واضح فهي متسلسلة تقاربية ، فإذا ما وضعنا $(-x)$ بدلاً من (x) :-

$$\therefore e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$$

وبالمثل فإن :-

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^3 x^3}{3} + \frac{a^4 x^4}{4} + \dots$$

$$, e^{-ax} = 1 - ax + \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{a^3 x^3}{3} + \frac{a^4 x^4}{4} + \dots$$

١٣-٣ :- تفاضل e^x :-

يمكن إجراء وإيجاد تفاضل e^x بسهولة وذلك بوضع مفكوك e^x ثم نفاضله حدًا حدًا :-

$$\therefore e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dx} e^x &= 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{6} + \frac{4x^3}{24} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

وهي نفسها مفكوك e^x

$$\therefore \frac{d}{dx} (e^x) = e^x$$

وهذه الخاصية أى أن المعامل التفاضلى للمقدار e^x يساوى نفس المقدار أى e^x لا تتوفر فى أى دالة أخرى فى x

وبالمثل فإنه إذا كانت $y = e^{-x}$

$$\therefore \frac{d}{dx} (e^{-x}) = -e^{-x}$$

وكذلك إذا كانت $y = e^{ax}$

$$\therefore \dot{y} = a e^{ax}$$

وإذا كانت $y = e^{-ax}$

$$\therefore \dot{y} = -a e^{-ax}$$

كما وأنه يمكن إيجاد تفاضل e^x باستخدام المبادئ الأولية .

$$\therefore y = \text{Log}_b x$$

$$\therefore y + \Delta y = \text{Log}_b (x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \text{Log}_b (x + \Delta x) - \text{Log}_b x$$

$$= \text{Log}_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \text{Log}_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \text{Log}_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \text{Log}_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

ويلاحظ أن $\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ في الصورة $(1+h)^{\frac{1}{h}}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \quad \text{- عليه فإن :-}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow u} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \text{Log}_b e$$

إذا ما كانت u دالة قابلة للتفاضل في x فيمكننا كتابة :-

$$\frac{d}{dx} (\text{Log}_b u) = \frac{1}{u} \text{Log}_b e \cdot \frac{du}{dx}$$

وإذا ما وضعنا $b = e$ فإن $\text{Log}_e e = 1$ ، وسوف نستخدم الرمز Ln بدلاً من Log والرمز Ln هنا يعنى الأساس e

$$\therefore \frac{d}{dx} (\text{Ln } u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

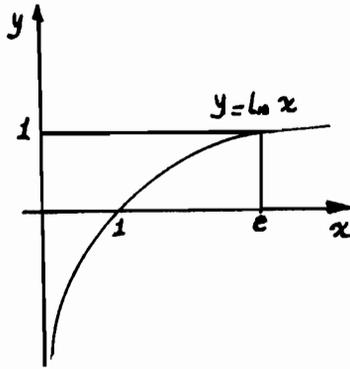
ويمكننا بيان أن ميل المنحنى $y = \text{Ln } x$ ، يكون موجباً دائماً وأن المنحنى مُقعّر للأسفل ، ويجراء التفاضل للدالة :-

$$y = \text{Ln } x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

وحيث أن مدى أو مجال $y = \text{Ln } x$ دائماً أكبر من الصفر ($x > 0$) ، فإن المشتقة الأولى وبالتالي ميل المنحنى يكون موجباً دائماً

كما أن الإشارة السالبة للمشتقة الثانية تؤكد أن التقعر للأسفل ويوضح هذا الشكل (١-١٣) .



شكل (١٣-١)

١٣-٤ : رسم منحنى e^x , e^{-x} :-

إذا كانت

$$y = e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x \quad ,$$

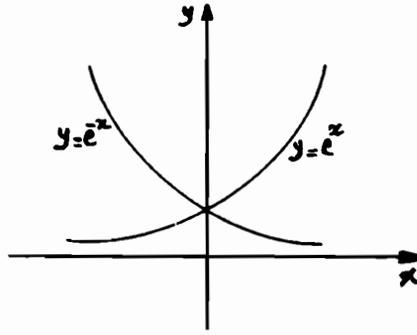
وحيث أن $\frac{dy}{dx}$ دائماً موجبة فإن منحنى الدالة e^x يكون موجباً وفى زيادة دائمة وبذلك فليس عليه نقط تحول .

وحيث أنه كذلك $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2}$ لا تتلاش أبداً عند أى قيم محددة لـ x وعليه فإنه لا توجد نقط انقلاب على المنحنى وبالمثل :

$$y = e^{-x}$$

$$y' = -e^{-x} \quad , \quad y'' = e^{-x}$$

وبذلك فإن y' دائماً متناقصة وبالتالي فإن المنحنى يكون سالباً (متناقصاً) ولا توجد نقط تحول ، كما أنه لا توجد نقط انقلاب .
ويوضح الشكل منحنى كل من e^x , e^{-x} .
انظر الرسم شكل (١٣-٢) .



شكل (١٣-٢)

ويوضح شكل e^x الزيادة المستمرة في الدالة (كما في حالة الفائدة المركبة) بينما يوضح شكل e^{-x} التناقص المستمر في الدالة مثلما يحدث في التفاعلات الكيميائية وفي الفيزياء ، مثلما يحدث في حالة فقد الحرارة المستمر عند تبريد جسم (كمثال)

١٣-٥ :- " اللوغاريتمات النابيرية ، اللوغاريتمات الزائدية " أو اللوغاريتمات

الطبيعية

' Napierian , Hyperbolic ' or Natural Logarithms

اللوغاريتم هو القوة التي نرفع لها أساس معين لنحصل على عدد معين فمثلاً

$$4^2 = 16$$

الأساس المعين = ٤ ، القوة هي ٢ والعدد المعين = ١٦

ولذلك تعرف ٢ بأنها لوغاريتم العدد ١٦ للأساس ٤

وبالمثل : ٣ هي لوغاريتم $[5^3 = 125]$ للأساس ٥

، ٦ هي لوغاريتم $[2^6 = 64]$ للأساس ٢

إلا أنه من المتعارف عليه تثبيت الأساس وجعله ١٠ وتُعرف اللوغاريتمات للأساس ١٠

باللوغاريتمات العادية

وحيث أنه قد تم التعارف على جعل الأساس ١٠ ، لذلك لا يتم كتابته عند استخدام هذه

اللوغاريتمات العادية .

فمثلاً : عند أخذ لوغاريتم ١٠٠ للأساس ١٠ ، تكتب هكذا $\text{Log } 100 = 2$

أى أن ٢ هى أس المقدار ١٠ (الأساس) لكى يصبح المقدار = ١٠٠

$$\text{Log } 10 = 1 \quad , \quad \text{Log } 1 = 0$$

ولما كان $\text{Log } 10 = 1$ ، $\text{Log } 100 = 2$ لذلك فإن لوغاريتم أى عدد يقع بين ١٠٠ ،

١٠ ينحصر فيما بين ١ ، ٢ ،

ولوغاريتم أى عدد ينحصر فيما بين ١٠٠٠ ، ١٠٠ ينحصر بين ٣ ، ٢ ، وهكذا ؛ وقد سبق

للقارئ دراسة هذه اللوغاريتمات العادية .

أما موضوعنا فى هذا الكتاب فهو اللوغاريتمات الطبيعية التى أتفق على أن يكون أساسها

العدد التقريبى (e) وقد تعرف أحياناً بلوغاريتمات نايبير نسبة إلى عالم الرياضيات الذى

وضعها عام 1614 ميلادية .

ولما كانت $e = 2.718281$ ، فإن تركيب اللوغاريتمات الطبيعية يُصبح معقداً جداً ،

وتوجد جداول رياضية تعطينا لوغاريتمات الأعداد الطبيعية من صفر حتى ٩٩٩ تبسيطاً

لهذا التعقيد .

وقواعد اللوغاريتمات الطبيعية هى نفس قواعد اللوغاريتمات العادية فى عمليات الضرب

والقسمة والرفع لقوى .

$$\text{Log}_{10} 10 = \text{Log } 10 = 1 \quad : \text{ ومثلما}$$

$$\text{Log}_e e = 1 \quad : \text{ فكذلك}$$

وتُعرف هذه اللوغاريتمات كذلك باللوغاريتمات الزائدية Hyperbolic logs

١٣-٦ :- تفاضل $\text{Log}_e x$:-

$$\text{Let } y = \text{Log}_e x$$

أى أن y هى القوة للأساس e لكى نحصل على العدد x

$$i, e \quad x = e^y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} [\text{Log}_e x] = \frac{1}{x}$$

أما إذا كان اللوغاريتم لأساس آخر غير e وليكن الأساس a مثلاً فإنه يمكن تحويله إلى
لوغاريتم للأساس e ببساطة

$$y = \text{Log}_a x \quad \text{إذا كانت}$$

$$\therefore y = \text{Log}_e x \times \text{Log}_a e$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{Log}_a e$$

وإذا كانت $y = \text{Log}_{10} x$ [الأساس ١٠]

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{Log}_{10} e = \frac{1}{x} \times 0.4343$$

١٣-٧ :- تفاضل الدوال الأسية في الصورة العامة :-

$$y = a^x \quad \text{لتكن}$$

$$\therefore \text{Log}_e y = \text{Log}_e a^x = x \text{Log}_e a$$

$$\therefore x = \frac{\text{Log}_e y}{\text{Log}_e a} = \text{Log}_e y \times \frac{1}{\text{Log}_e a}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \times \frac{1}{\text{Log}_e a}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \times \text{Log}_e a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^x \times \text{Log}_e a$$

$$y = 5^x \quad \text{فمثلاً :}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5^x \cdot \text{Log}_e 5 \cong 1.609 \times 5^x$$

وكحالة خاصة :-

$$y = 10^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 10^x \text{Log}_e 10 = 2.303 \times 10^x$$

ويمكن إيجاز ما سبق في الجدول التالي -

الدالة	معاملها التفاضلي
e^x	e^x
e^{-x}	$-e^{-x}$
a^x	$a^x \text{Log}_e a$
$\text{Log}_e x$	$\frac{1}{x}$

١٣-٨ :- أمثلة محلولة :-

$$y = e^{4x^2}$$

(١) إجـر التفاضل للدالة :-

الحـل :- بتطبيق قاعدة الدالة .

$$\therefore y = e^{4x^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= e^{4x^2} \times \frac{d}{dx} (4x^2) \\ &= 8x \times e^{4x^2} \end{aligned}$$

$$y = \text{Log } x^7$$

(٢) إجـر تفاضل

الحـل :-

$$\therefore y = \text{Log } x^7$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x^7} \frac{d}{dx} x^7 \\ &= \frac{7x^6}{x^7} = \frac{7}{x} \end{aligned}$$

أو يمكننا إيجادها بمعرفة أن $\text{Log } x^7 = 7 \text{Log } x$

$$\therefore y = 7 \text{Log } x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7 \times \frac{1}{x} = \frac{7}{x}$$

$$y = \text{Log } \frac{x^3}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

(٣) فاضل

الحـل :-

$$\therefore \text{Log} \frac{a}{b} = \text{Log} a - \text{Log} b$$

$$\therefore y = \text{Log} x^3 - \text{Log}(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x^3} \times 3x^2 - \frac{1}{(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{d}{dx} (x^3 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{3}{x} - \frac{1}{(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2(x^3 - 1)^{\frac{1}{2}}} \times 3x^2 \\ &= \frac{3}{x} - \frac{3x^2}{2(x^3 - 1)} = \frac{6(x^3 - 1) - 3x^3}{2x(x^3 - 1)} \\ &= \frac{3(x^3 - 2)}{2x(x^3 - 1)} \end{aligned}$$

$$y = e^{-ax} \sin(bx + c) \quad \text{: فاضل (٤)}$$

الحل :-

وهي مسألة ذات أهمية في الفيزياء والهندسة الكهربائية

$$\therefore y = e^{-ax} \times \sin(bx + c)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= [e^{-ax} \times \cos(bx + c) \times b] + [\sin(bx + c) \times -e^{-ax} \times a] \\ &= e^{-ax} [b \cos(bx + c) - a \sin(bx + c)] \end{aligned}$$

$$y = \text{Ln}(3x + 5) \quad \text{: إذا كانت ، } \frac{dy}{dx} \text{ أوجد (٥)}$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x + 5} \times \frac{d}{dx} (3x + 5) = \frac{3}{3x + 5}$$

$$y = \text{Ln} \sqrt{5 + 7x} \quad \text{: إذا كانت ، } \frac{dy}{dx} \text{ أوجد (٦)}$$

الحل :-

$$y = \text{Ln} (5 + 7x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Ln} (5 + 7x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{5 + 7x} \times \frac{d}{dx} (5 + 7x) \\ &= \frac{7}{2(5 + 7x)} \end{aligned}$$

$$y = \text{Ln} \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{x^2 + 3} \quad \text{إذا علمت أن : } \frac{dy}{dx} \text{ أوجد (٧)}$$

الحل :-

$$\begin{aligned} y &= \text{Ln} x^2 \sqrt{x^2 - 1} - \text{Ln} (x^2 + 3) \\ &= \text{Ln} x^2 + \text{Ln} \sqrt{x^2 - 1} - \text{Ln} (x^2 + 3) \\ &= 2 \text{Ln} x + \text{Ln} (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - \text{Ln} (x^2 + 3) \\ &= 2 \text{Ln} x + \frac{1}{2} \text{Ln} (x^2 - 1) - \text{Ln} (x^2 + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{x} + \frac{1 \times 2x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1 \times 2x}{x^2 + 3} \\ &= \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 3} \end{aligned}$$

$$y = a^{3x^2}$$

(٨) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} a^u = a^u \frac{du}{dx} \text{Ln} a$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x^2, \quad u = 3x^2 \quad \text{نضع :-}$$

$$\therefore y = a^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a^{3x^2} \times \text{Ln} a \times 6x^2$$

$$y = 3^{5x}$$

(٩) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} a^u = a^u \operatorname{Ln} a \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} 3^{5x} = 3^{5x} \times \operatorname{Ln} 3 \times 5 = 5 \times 3^{5x} \operatorname{Ln} 3$$

$$y = x^x$$

(١٠) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\operatorname{Ln} y = \operatorname{Ln} x^x = x \operatorname{Ln} x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \operatorname{Ln} x \times 1$$

$$= 1 + \operatorname{Ln} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (1 + \operatorname{Ln} x) x^x$$

$$y = e^{x^{\frac{1}{2}}}$$

(١١) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\frac{du}{dx} = \frac{-2}{x^3}$$

$$\therefore u = \frac{1}{x^2} \text{ بوضع}$$

$$, y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \times \frac{du}{dx}$$

$$= e^{\frac{1}{x^2}} \times \frac{-2}{x^3} = \frac{-2 e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

$$y = a e^{b^2+x^2}$$

(١٢) فاضل :

الحل :-

$$u = b^2 + x^2 \text{ بوضع}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2x$$

$$, y = a e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a e^u \frac{du}{dx} = a e^{b^2+x^2} \times 2x$$

$$= 2 a x e^{b^2+x^2}$$

$$y = e^{\sqrt{x^4+a}} \quad (13) \text{ أوجد تفاضل :}$$

الحل :-

$$u = \sqrt{(x^4 + a)} \text{ نضع}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1 \times 4x^3}{2\sqrt{x^4+a}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+a}}$$

$$, y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x^4+a}} \times \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+a}}$$

$$y = x e^{\tan x} \quad (14) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

$$d(uv) = v du + u dv$$

نستخدم هنا القاعدة :-

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= x [e^{\tan x} \times \sec^2 x] + e^{\tan x} \\ &= e^{\tan x} [x \sec^2 x + 1] \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ إذا كانت } y = \text{Log } 9x \text{ فأوجد}$$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Log}_a u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} \text{Log}_a e$$

$$\frac{du}{dx} = 9 \quad \therefore \quad u = 9x \text{ وبوضع}$$

وبوضع $a = 10$ وفي هذه الحالة لا تكتب ١٠

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{9x} \times 9 \text{Log } e$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \text{Log } e = \frac{0.4343}{x} [\text{log } e = 0.4343]$$

$$y = \text{Log} \frac{5x}{3+2x^2}$$

(16) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Log}_a u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} \text{Log}_a e$$

$$u = \frac{5x}{3 + 2x^2} \text{ وبوضع}$$

ومن الواضح هنا أن $a = 10$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 + 2x^2}{5x} \times \frac{(3 + 2x^2)(5) - (5x)(4x)}{(3 + 2x^2)^2} \times \text{Log } e$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{(3 - 2x^2)}{(3 + 2x^2)} \times \text{Log } e .$$

$$y = \text{Ln } 4x^3 \quad (17) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Ln } u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 12x^2 \quad \therefore \quad u = 4x^3 \text{ وبوضع}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^3} \times 12x^2 = \frac{3}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ فاوجد } y = \text{Ln}(a + x^5) \text{ إذا كانت } (18)$$

الحل :-

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 \quad \therefore \quad , u = (a + x^5) \text{ بوضع}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(a + x^5)} \times 5x^4 = \frac{5x^4}{(a + x^5)}$$

$$y = \text{Ln}(2 - 3x^2)^3 \quad (19) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

يمكن إعادة كتابة الدالة كالتالي :-

$$y = 3 \text{Ln}(2 - 3x^2)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Ln } u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = -6x \quad \therefore \quad , \quad u = (2 - 3x^2) \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 \times 1}{(2 - 3x^2)} \times -6x = \frac{-18x}{(2 - 3x^2)}$$

$$y = \text{Ln } \sqrt{3 - 4x^2} \quad (٢٠) \quad \text{أوجد تفاضل}$$

الحل :-

يمكن كتابة المسألة في صورة خالية من الجذور كالتالي :-

$$y = \text{Ln}(3 - 4x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Ln}(3 - 4x^2)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Ln } u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = -8x \quad \therefore \quad , \quad u = 3 - 4x^2 \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 - 4x^2} \times -8x = \frac{-4x}{(3 - 4x^2)}$$

$$= \frac{4x}{(4x^2 - 3)}$$

$$y = \text{Ln } \tan x \quad (٢١) \quad \text{أوجد تفاضل}$$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Ln } u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \quad \therefore \quad , \quad u = \tan x \quad \text{وبوضع}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \times \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \text{cosec } x \sec x$$

$$y = \frac{1}{\text{Ln } x} \quad (٢٢) \quad \text{أوجد تفاضل}$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Ln } x \times 0 - 1 \times \left(\frac{1}{x}\right)}{[\text{Ln } x]^2} = \frac{-1}{x (\text{Ln } x)^2}$$

$$y = \text{Ln} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \quad \text{-(٢٣) أوجد تفاضل}$$

الحل :-

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Ln } u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{نضع}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)}} \times \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)^2}$$

-(٢٤) أوجد تفاضل الدالة :-

$$f(x) = \text{Ln} [3x^2 + 2 \text{Ln } x]$$

الحل :-

$$u = 3x^2 + 2 \text{Ln } x \quad \text{نضع}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Ln } u = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6x + \frac{2}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(3x^2 + 2 \text{Ln } x)} \times \frac{(6x^2 + 2)}{x}$$

$$= \frac{2}{x} \times \frac{(3x^2 + 1)}{(3x^2 + 2 \text{Ln } x)}$$

$$y = \text{Ln} [\sin e^{3x}]$$

(٢٥) أوجد تفاضل

الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin e^{3x}} \times [\cos e^{3x}] [e^{3x}] [3] \\ &= 3e^{3x} \cot e^{3x}\end{aligned}$$

$$y = x^{e^x} \quad (26) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

يمكن تبسيط هذه المسألة بأخذ لوغاريتمات الطرفين :

$$\therefore \text{Ln } y = \text{Ln } x^{e^x} = e^x \text{Ln } x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = e^x \times \frac{1}{x} + \text{Ln } x \times e^x$$

$$= e^x \left[\frac{1}{x} + \text{Ln } x \right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \times e^x \left[\frac{1}{x} + \text{Ln } x \right]$$

$$= x^{e^x} \times e^x \left[\frac{1}{x} + \text{Ln } x \right]$$

$$y = (2x + 5)^2 \sqrt{x^2 - 4} \quad (27) \text{ إذا كانت}$$

فاوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام اللوغاريتمات

الحل :-

بأخذ اللوغاريتمات لطرفي المعادلة :-

$$\therefore \text{Ln } y = 2 \text{Ln } (2x + 5) + \frac{1}{2} \text{Ln } (x^2 - 4)$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{2x+5} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x^2-4)} \times 2x$$

$$= \frac{4}{2x+5} + \frac{x}{(x^2-4)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= (2x+5)^2 (x^2-4)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4(x^2-4) + x(2x+5)}{(2x+5)(x^2-4)} \right] \\ &= \frac{(2x+5)}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}} [6x^2 + 5x - 16] \\ &= \frac{12x^3 + 40x^2 - 7x - 80}{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(٢٨) إذا كانت $y = \left[\frac{1}{a^{2x}} \right]^{2ax}$ فاوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل :-

بأخذ اللوغاريتمات لطرفي المعادلة :-

$$\therefore \text{Ln } y = 2ax \text{ Ln } \frac{1}{a^{2x}}$$

$$\begin{aligned} \text{, Ln } \frac{1}{a^{2x}} &= \text{Ln } 1 - \text{Ln } a^{2x} \\ &= 0 - \text{Ln } a^{2x} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Ln } \frac{1}{a^{2x}} = -2x \text{ Ln } a$$

$$\therefore \text{Ln } y = 2ax \times -2x \text{ Ln } a = -4ax^2 \text{ Ln } a$$

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -8ax \text{ Ln } a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y (-8ax \text{ Ln } a)$$

$$= \left[\frac{1}{a^{2x}} \right]^{2ax} \times [-8ax \text{ Ln } a]$$

$$= \frac{1}{4ax^2} \times -8ax \text{ Ln } a$$

$$= -8x a^{1-4ax^2} \text{ Ln } b$$

$$y = (3x^2 - 5)^{4+\sqrt{2x^3+3}} \quad (٢٩) \text{ أوجد تفاضل}$$

الحل :-

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين :-

$$\therefore \text{Ln } y = 4 + \sqrt{2x^3 + 3} \times \text{Ln } (3x^2 - 5)$$

ثم نفاضل كلا الطرفين بالنسبة إلى x باستخدام قاعدة الضرب .

$$\therefore \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \left(4 + \sqrt{2x^3 + 3}\right) \times \left[\frac{1}{(3x^2 - 5)} \times 6x\right] +$$

$$+ \text{Ln } (3x^2 - 5) \times \left[\frac{1}{2} (2x^3 + 3)^{-\frac{1}{2}} \times 6x^2\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \left[4 + \sqrt{2x^3 + 3} \times \frac{6x}{(3x^2 - 5)} + \text{Ln } (3x^2 - 5) \times \frac{3x^2}{(2x^3 + 3)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$= (3x^2 - 5)^{4+\sqrt{2x^3+3}} \left[\frac{6x(4 + \sqrt{2x^3 + 3})}{(3x^2 - 5)} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 3}} \cdot \text{Ln } (3x^2 - 5)\right]$$

$$\text{Ln } (x + y) = \tan^{-1} \left(\frac{x}{y}\right) \quad (٣٠) \text{ اوجد } \frac{dy}{dx} \text{ إذا علمت أن :-}$$

الحل :-

هذه دالة ضمنية في x, y لذلك نفاضل ضمناً بالنسبة إلى x كلاً من الطرفين :

$$\therefore \frac{1}{x + y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \times \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين cross - multiplying

$$\therefore y^2 + x^2 + (y^2 + x^2) \frac{dy}{dx} = xy + y^2 - (x^2 + xy) \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} [y^2 + x^2 + (x^2 + xy)] = xy + y^2 - y^2 - x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} [2x^2 + xy + y^2] = x(y - x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x(y - x)}{(2x^2 + xy + y^2)}$$

قاعدة :

وإذا كانت a أى عدد موجب ومطلوب إيجاد a^u حيث u دالة قابلة للتفاضل فى x فإن :

$$\therefore \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} \dots\dots\dots (1)$$

$$, \text{Ln } a^u = u \text{Ln } a$$

$$\therefore a^u = e^{u \text{Ln } a}$$

$$, \frac{d}{dx} a^u = \frac{d}{dx} (e^{u \text{Ln } a}) = e^{u \text{Ln } a} \times \text{Ln } a \frac{du}{dx}$$

ومنها نصل لصيغة عامة :-

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \text{Ln } a \frac{du}{dx} \dots\dots\dots (2)$$

$$y = e^{2x^2} \text{ -- إذا علمت أن } \frac{dy}{dx} \text{ (31) أوجد}$$

الحل :-

باستخدام القاعدة (1) السابقة :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{2x^2} \frac{d}{dx} (2x^2) = 4x e^{2x^2}$$

$$y = e^{-x} \text{Ln } x \text{ -- إذا كانت } \frac{dy}{dx} \text{ (32) أوجد}$$

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \frac{d}{dx} (\text{Ln } x) + \text{Ln}(x) \frac{d}{dx} (e^{-x})$$

$$= \frac{e^{-x}}{x} + -e^{-x} \text{Ln}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} \text{ (33) إذا كانت } y = 3^{2x-3} \text{ فأوجد}$$

الحل :-

باستخدام الصيغة العامة السابقة رقم (٢)

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dy}{dx} &= 3^{2x-3} \text{Ln } 3 \times \frac{d}{dx} (2x - 3) \\ &= 3^{2x-3} (\text{Ln } 3) (2)\end{aligned}$$

Exercise . 14

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من المسائل التالية :-

$$y = e^{\frac{x}{3}} \quad (٢)$$

$$y = e^{6x} \quad (١)$$

$$y = e^{-3x} \quad (٤)$$

$$y = e^{\sqrt{x}} \quad (٣)$$

$$y = e^{(4-3x)} \quad (٦)$$

$$y = e^{\frac{7}{3}x} \quad (٥)$$

$$y = e^{\frac{x}{a}} \quad (٨)$$

$$y = e^{-ax} \quad (٧)$$

$$y = e^{-9x} \quad (١٠)$$

$$y = e^{ax+c} \quad (٩)$$

$$y = x^2 e^x \quad (١٢)$$

$$y = e^{\sin x} \quad (١١)$$

$$y = e^{-2x} \sin x \quad (١٤)$$

$$y = \text{Ln} (e^x - 1) \quad (١٣)$$

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (١٦)$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (١٥)$$

$$y = x e^x \quad (١٨)$$

$$y = e^{x^2} \quad (١٧)$$

$$y = x^2 e^{-x} \quad (٢٠)$$

$$y = x e^{-x} \quad (١٩)$$

$$y = \sin^{-1} e^x \quad (٢٢)$$

$$y = (x + 4) e^x \quad (٢١)$$

$$y = x^3 e^{\frac{1}{x}} \quad (٢٤)$$

$$y = 2^x \quad (٢٣)$$

$$y = 10 e^x \quad (٢٦)$$

$$y = e^x \sin x \quad (٢٥)$$

$$y = x^n \cdot a^x \quad (٢٨)$$

$$y = 10 \cdot 2^x \quad (٢٧)$$

$$y = e^{\cos x} \quad (٣٠)$$

$$y = a^{2x+1} \quad (٢٩)$$

$$y = (a + b)^x \quad (٣٢)$$

$$y = a^{bx^2} \quad (٣١)$$

$$y = \text{Ln} (x^3 e^{-3x}) \quad (٣٤)$$

$$y = e^{\tan x} \quad (٣٣)$$

$$e^x \sin y - e^y \cos x = 1 \quad (٣٦)$$

$$x^2 e^y + y^2 e^x = 2 \quad (٣٥)$$

$$y = \text{Log} (ax^2 + bx + c) \quad (٣٨)$$

$$y = \text{Log} \frac{x}{a} \quad (٣٧)$$

$$y = \text{Log} \sin x \quad (٤٠)$$

$$y = x \text{Log} x \quad (٣٩)$$

$$y = \text{Log} (e^x + e^{-x}) \quad (٤٢)$$

$$y = \text{Log} \frac{a+x}{a-x} \quad (٤١)$$

$$y = \text{Log} \tan \frac{x}{2} \quad (٤٤)$$

$$y = \text{Log} (x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (٤٣)$$

$$y = ae^{-bx} \sin bx \quad (٤٦)$$

$$y = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \quad (٤٥)$$

$$y = \text{Log} \frac{e^x}{e^x + 1} \quad (٤٨)$$

$$y = \text{Log} [\sqrt{(x-1)} + \sqrt{(x+1)}] \quad (٤٧)$$

$$y = \cos^{-1} e^{-x} \quad (٥٠)$$

$$y = \text{Log} \frac{\sqrt{b} + \sqrt{x}}{\sqrt{b} - \sqrt{x}} \quad (٤٩)$$

$$y = \sin^{-1} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (٥٢)$$

$$y = \text{Log} \frac{x}{b - \sqrt{b^2 - x^2}} \quad (٥١)$$

أوجد المشتقة الثانية والثالثة والرابعة والمشتقة النونية للآتي :-

$$y = e^{ax} \quad (٥٣)$$

$$y = e^{-ax} \quad (٥٤)$$

$$y = \text{Log} x \quad (٥٥)$$

فاضل كل من الدوال التالية باستخدام طريقة اللوغاريتمات :-

$$y = x^{-x} \quad (٥٧)$$

$$y = x(x-1)^{\frac{3}{2}} \quad (٥٦)$$

$$y = x^{\text{Ln} x} \quad (٥٩)$$

$$y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x\sqrt{4+x^2}} \quad (٥٨)$$

$$y = e^{-x^2} \sin^2 3x \quad (٦١)$$

$$y = (\sin^{-1} x)^x \quad (٦٠)$$

(٦٢) إذا كانت $y = u^v$ حيث كل من u, v دوال في x فبين أن :-

$$\frac{dy}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \text{Ln} u \frac{dv}{dx}$$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :-

$$y = e^{-x^2} \quad (٦٤)$$

$$y = x^2 + 3^x \quad (٦٣)$$

$$y = (e^{ax} - e^{-ax})^2 \quad (٦٦)$$

$$y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \quad (٦٥)$$

$$y = x^2 \cdot 2^x \quad (٦٨)$$

$$y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \text{Log} \left(\tan \frac{x}{2} \right) \quad (٦٧)$$

$$y = a^{\sin x} \quad (٧٠)$$

$$y = e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a} \quad (٦٩)$$

$$y = x^2 e^{-2x} \quad (٧٢)$$

$$y = \text{Log} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] \quad (٧١)$$

$$y = \text{Log} \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}} \quad (٧٤)$$

$$y = \text{Log} (\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) \quad (٧٣)$$

عين مشتقات الدوال التالية بعد أخذ اللوغاريتم للطرفين :-

$$y = \text{Log} \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (٧٦)$$

$$y = \text{Log} \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \quad (٧٥)$$

$$y = \cos^{-1} (1 - 2x) \quad (٧٨)$$

$$y = x^{\frac{1}{x}} \quad (٧٧)$$

$$y = x \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \text{Log} (x^2 + a^2) \quad (٧٩)$$

$$y = \sin^{-1} \sqrt{1-4x} \quad (٨٠)$$

$$y = \frac{1}{2} \text{Log} \tan x + \text{Log} \cos x \quad (٨١)$$

$$y = \sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x \quad (٨٢)$$

$$y = x \sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x \quad (٨٣)$$

$$y = e^x \sqrt{1-e^{2x}} + \sin^{-1} e^x \quad (٨٤)$$

$$y = \sin^{-1} e^{3x} \quad (٨٦) \quad y = \text{Log} [e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}] \quad (٨٥)$$

$$y = \cos^{-1} \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x+4x^2} \quad (٨٧)$$

$$y = \tan^{-1} e^{2x} + \text{Log} \sqrt{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}} \quad (٨٨)$$