

الباب العاشر

تطبيقات على المشتقة الأولى

تطبيقات هندسية ، وتطبيقات على السرعة والعجلة

١٠ - ١ : - موجز لأساسيات الهندسة التحليلية :

(١) ميل المستقيم هو ظل الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

$$m = \tan \theta$$

(٢) ميل المستقيم بدلالة نقطتين عليه إحداثياتهما $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(٣) يمكن إيجاد ميل المستقيم إذا كانت معادلته في الصورة :

$$ax + by + c = 0$$

$$\therefore m = -\frac{b}{a}$$

(٤) معادلة المستقيم بدلالة ميله m ونقطة معلوم إحداثياتها (x_1, y_1) تقع عليه :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(٥) معادلة المستقيم بدلالة نقطتين معلومتين واقعتين عليه $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(٦) تكون النقطة واقعة على المستقيم أو المنحنى إذا حققت معادلته .

(٧) للحصول على نقطة تقاطع مستقيمين نحلها معا أما نقطة أو نقط تقاطع منحنيين

فتكون محل معادلتها آنياً .

(٨) المقصود بميل منحنى عند نقطة ما هو ميل المماس لهذا المنحنى عند هذه النقطة .

(٩) زاوية تقاطع مستقيم ومنحنى عند نقطة ما هي الزاوية بين المستقيم والمماس

للمنحنى عند نقطة التقاطع .

(١٠) زاوية التقاطع بين منحنيين هي الزاوية بين مماسي المنحنين عند نقطة تقاطعهما .

(١١) المستقيم العمودي على منحنى ما عند نقطة معلومة عليه هو المستقيم الذى يكون عموديا على مماس المنحنى عند هذه النقطة .

(١٢) إذا تعامد مستقيمان فإن حاصل ضرب ميلهما = -1 .

وقد عرفنا فيما سبق من أبواب أنه إذا كانت $y=f(x)$ فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة y' or $f'(x)$ تعطينا ميل المماس لهذا المنحنى عند أى نقطة (x_1, y_1) تقع عليه .

$$\therefore y' = f'(x) = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1} = \tan \theta$$

وباستخدام المشتقة الأولى يمكننا وبالرجوع إلى النقاط السابقة ، أن نستخدمها وبسهولة فى إيجاد الميل عند أى نقطة كما يلي :-

(١٣) معادلة المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) :-

$$y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1} \times (x - x_1)$$

(١٤) معادلة العمودي على المنحنى $y=f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) :-

$$y - y_1 = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1}} \times (x - x_1)$$

١٠ - ٢ :- أمثلة محلولة على التطبيقات الهندسية للمشتقة الأولى

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

عند كل نقط تقاطعه مع محور السينات $X'OX$

الحل :-

عند نقط التقاطع مع محور السينات تكون $y = f(x) = 0$

$$\therefore f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

$$\therefore x(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1, x = 3$$

هى نقط التقاطع مع محور السينات .

، ميل المماس عند أى نقطة $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ،

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$$

$$[f'(x)]_{x=0} = 3 \times 0 - 8 \times 0 + 3 = 3$$

$$[f'(x)]_{x=1} = 3 \times 1 - 8 \times 1 + 3 = -2$$

$$[f'(x)]_{x=3} = 3 \times 3^2 - 8 \times 3 + 3 = 6$$

(٢) أوجد ميل منحنى الدالة : -

$$y = 4x^2 - 8x + 5$$

عند نقط تقاطعه مع المستقيم $y = 1$

الحل : - لإيجاد نقط تقاطع المستقيم مع منحنى الدالة نحل معادلتها سويا وذلك بوضع $y = 1$ فى معادلة الدالة .

$$\therefore 1 = 4x^2 - 8x + 5$$

$$\therefore 4x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 = 0$$

∴ هنالك نقطة تقاطع وحيدة عندما $x = 1$ ويمكن معرفة إحداثيها الصادى (y)

بالتعويض بقيمة $x = 1$ فى معادلة المنحنى الأسمى :

$$y = 4 \times 1^2 - 8 \times 1 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$$

∴ نقطة التقاطع هى (1,1) وواضح من معادلة المستقيم القاطع $y = 1$ أنه يمس المنحنى عند هذه النقطة (1,1) .

والميل : $\frac{dy}{dx}$: -

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 8$$

∴ ميل المماس عند النقطة $x = 1$

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 8 \times 1 - 8 = 0$$

أى أن المماس يوازي محور السينات وهو نفسه المستقيم $y = 1$
 (٣) إذا كان المماس للمنحنى :

$$y = x(a - x^3)$$

عند نقطة الأصل يصنع زاوية قياسها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور OX فاحسب
 قيمة a العددية

$$\therefore y = ax - x^4$$

الحل :-

$$\therefore \frac{dy}{dx} = a - 4x^3 = \text{ميل المماس}$$

ولما كان ميل المماس $(\tan \theta = \tan 45 = 1)$

$$\therefore a - 4x^3 = 1$$

وحيث أن المماس يمر بنقطة الأصل حيث $x = 0$

$$\therefore a - 4 \times 0 = 1$$

$$\therefore a = 1$$

$$y = x(1 - x^3)$$

وبذلك فإن معادلة المنحنى هي .

$$f(x) = x^3 - 27x + 60$$

(٤) أوجد نقطة على المنحنى $f(x)$:

يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات .

الحل :-

عندما يوازي المماس محور السينات فإن :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 27 = 0$$

$$\therefore 3x^2 = 27 \quad \therefore x^2 = 9 \quad \therefore x = \pm 3$$

وبالتعويض في $f(x)$ بقيم x

$$\therefore f(3) = 27 - 27 \times 3 + 60 = 6$$

$$f(-3) = -27 + 81 + 60 = 114$$

\therefore المماس لهذا المنحنى يكون موازيا لمحور السينات عند النقطتين .

$$(3, 6), (-3, 114)$$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى $f(x)$:-

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 1$$

عند نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x + 2$

الحل :-

$$y = x + 2 = x^2 - 3x + 1$$

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

وبالتعويض عن $x = 1$ فى معادلة المنحنى

$$\therefore y = x^2 - 3x + 1$$

$$= 1 - 3 \times 1 + 1 = -1$$

$(1, -1)$ \therefore نقطة تقاطع المستقيم مع المنحنى هى

$$, \frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

، معادلة المماس عند $(1, -1)$:

$$y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1} \times (x - x_1)$$

$$\therefore y - (-1) = (2x - 3)_{(1, -1)} \times [x - (1)]$$

$$\therefore y + 1 = (2 \times 1 - 3) \times (x - 1)$$

$$\therefore y + 1 = -1(x - 1)$$

$$\therefore y + 1 = -x + 1$$

$$\therefore y = -x \quad i.e \quad -x - y = 0 \quad \dots\dots\dots (١)$$

$$-1 = \frac{-(-1)}{-1} = \frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = \text{وميل هذا المستقيم}$$

$$+1 = \frac{-1}{-1} = \text{ميل العمودى عليه} \therefore$$

ومعادلة العمودى عليه :

$$y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x_1, y_1}^{-1} \times (x - x_1)$$

$$y - 1 = 1 \times (x - 1)$$

$$\therefore y = x$$

(٦) أوجد الآتي بالنسبة للمنحنى $y^2 = 2x$ عن النقطة $x=1$:-

أ) طول المماس للمنحنى

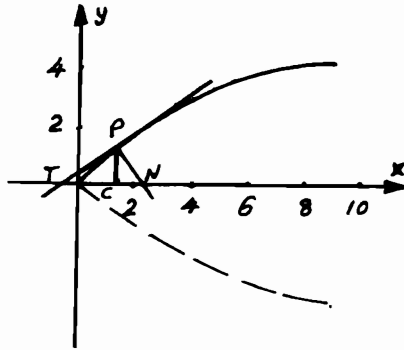
ب) طول العمودى

ج) طول تحت المماس subtangent

د) طول تحت العمودى subnormal

الحل :-

انظر الرسم شكل (١٠ - ١) .



شكل (١٠ - ١)

(a) طول المماس TP كما يتضح من الرسم هو المسافة بين نقطة التماس (P) وبين

نقطة تقاطع المماس مع محور ox (T)

$$\frac{PC}{\sin \theta} = TP = \text{طول المماس}$$

$$\therefore TP = PC \cdot \text{cosec} \theta$$

ولكن $cpc = y_1$

$$\therefore TP = y_1 \operatorname{cosec} \theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \sqrt{1 + \cot^2 \theta} = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{dy}{dx} = \text{الميل}$$

$$\therefore \operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$\therefore TP = y_1 \operatorname{cosec} \theta = y_1 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

وهي الصيغة العامة لطول المماس .

$$m = \frac{dy}{dx} \quad \text{وبوضع الميل}$$

$$\therefore TP = y_1 \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m} \quad \dots\dots\dots (1)$$

وبذلك فإنه يلزمنا إيجاد m ، y_1 وإيجاد y_1 نعوض في المعادلة $y^2 = 2x$ بقيمة $x = 1$

$$\therefore y_1^2 = 2 \times 1 = 2$$

$$\therefore y_1 = \sqrt{2} \quad \text{at } x = 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

وإيجاد m نفاضل الدالة الضمنية الأصلية :

$$y^2 = 2x$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = m = \frac{1}{y}$$

وبالتعويض عن $y = \sqrt{2}$ (عند $x = 1$)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} = m \quad \dots\dots\dots (3)$$

وبالتعويض عن قيمة y_1 ، m من المعادلتين (3)، (2) في المعادلة (1)

$$\therefore TP = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2.45$$

(b) من الشكل ، طول العمودي PN وهو المسافة بين نقطة التماس وحتى نقطة تقاطع العمودي مع محور $X'OX$

$$PN = \text{طول العمودي} = \frac{PC}{\cos \theta} = PC \sec \theta$$

ولكن $PC = y_1$

$$\therefore PN = y_1 \sec \theta .$$

$$\therefore \sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}, \tan \theta = \frac{dy}{dx} = m$$

$$\therefore \sec \theta = \sqrt{1 + m^2}$$

$$\therefore PN = y_1 \sec \theta = y_1 \sqrt{1 + m^2}$$

وبالتعويض عن قيم $y_1 = \sqrt{2}$ ، $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore PN = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} = 1.732$$

(c) ومن الشكل فإن طول ما تحت المماس TC وهو عبارة عن مسقط المماس TP على المحور $X'OX$

$$TC = \text{طول تحت المماس} = \frac{PC}{\tan \theta} = PC \cot \theta$$

وحيث أن : $\frac{dy}{dx} = \tan \theta = m$ ، $PC = y_1$

$$\therefore TC = \frac{y_1}{m} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2$$

(d) ومن الشكل فإن طول ما تحت العمودي CN

$$\therefore CN = \text{طول ما تحت العمودي}$$

$$= PC \tan \theta = y_1 \tan \theta = y_1 m$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

(V) اوجد الزاوية بين نقط تقاطع الدائرتين :-

$$x^2 + y^2 - 4x = 1 \quad \dots\dots\dots (A)$$

$$, x^2 + y^2 - 2y = 9 \quad \dots\dots\dots (B)$$

الحل :- المقصود بزاوية التقاطع بين الدائرتين ، أنها الزاوية بين المماسات لكل من الدائرتين عند نقط التقاطع

$$\therefore \tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

حيث :-

$m_1 =$ ميل المماس للدائرة A عند (x, y)

$m_2 =$ ميل المماس للدائرة B عند (x, y)

ولإيجاد نقط تقاطع الدائرتين نحلها معا آنيا فنحصل على نقاط التقاطع وهى $(3,2), (1,-2)$

ولإيجاد ميل المماسات عند هذه النقط فإننا يجب أن نحصل على $\frac{dy}{dx}$ لكل من المنحنيين وبالنسبة للدائرة الأولى A :-

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2-x}{y} \right)$$

، بالنسبة للدائرة الثانية B :-

$$\therefore m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1-y}$$

وبالتعويض عن إحداثيات النقطة الأولى $(3,2)$ أى :

$$x = 3, y = 2$$

$$\therefore m_1 = \frac{2-3}{2} = -0.5 \quad . \text{ وهو ميل المماس للمنحنى A عند } (3,2)$$

$$, m_2 = \frac{3}{1-2} = -3 \quad . \text{ وهو ميل المماس للدائرة B عند } (3,2)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\frac{-1}{2} + 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1 \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

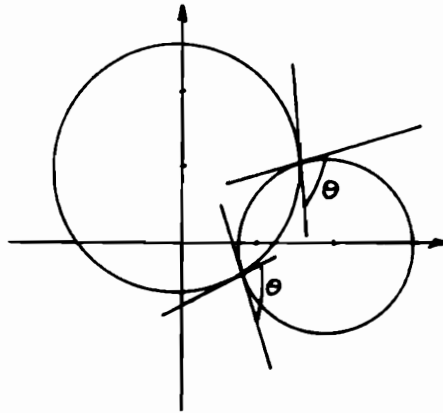
فإذا ما حسبنا زاوية التقاطع عند النقطة $(1, -2)$:-

$$m_1 = \frac{-1}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\frac{-1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = -1 \quad \therefore \theta = 135^\circ = 45^\circ$$

وهي نفس الزاوية السابقة .

انظر الرسم شكل (١٠ - ٢) .



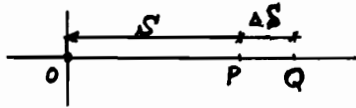
شكل (١٠ - ٢)

١٠ - ٣ : - السرعة والعجلة :-

هنالك العديد من التطبيقات التي تكون فيها الدوال المختلفة ، دوال في الزمن بمعنى أن الزمن هو المتغير المستقل بها وسوف نقدم هذا النوع من الأمثلة عن السرعة والعجلة كأحد النماذج للدوال التي تعتمد على الزمن .

فإذا اعتبرنا أن لدينا جسيم يتحرك فى خط مستقيم (rectilinear motion) واعتبرنا أبسط أنواع هذه الحركة (فى خط مستقيم) ، أى عندما يتحرك الجسيم مسافات متساوية وفى نفس الاتجاه وفى فترات زمنية متساوية . ففى مثل هذه الحركة فإن عدد وحدات المسافة المقطوعة فى وحدة الزمن تُعرف بالسرعة .

ويُطلق على السرعة فى هذه الحالة بالسرعة الثابتة أو المنتظمة constant or uniform فإذا اعتبرنا الجسيم يتحرك من نقطة البداية 0 فى الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن S هى المسافة المقطوعة للجسيم من نقطة البداية عند الزمن t ، فإن موضع الجسيم يكون دالة فى الزمن أى : $S = f(t)$ أنظر الرسم شكل (١٠ - ٣) .



شكل (١٠ - ٣)

والآن لنفترض أن الجسيم تحرك مسافة Δs من p إلى Q فى فترة زمنية قدرها Δt

فإن وضع الجسيم عند الزمن (t) وعند الزمن $(t + \Delta t)$ يكون $f(t)$ ، $f(t + \Delta t)$

$$\therefore \Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

وبالقسمة على Δt

$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ويُطلق على هذه النسبة بالسرعة المتوسطة للجسيم عند انتقاله من P إلى Q وعموماً فإن

هذه النسبة ، ليست متساوية لمختلف قيم Δt مما لا يساعد على تفهم الحركة بوضوح .

إلا أن نهاية هذه النسبة عندما تقترب Δt من الصفر ، تكون أكثر إيضاحاً وتحديداً للحركة .

تعريف: إذا كان وضع جسيم متحرك يتحدد بالعلاقة $S = f(t)$ فإن السرعة V عند أى لحظة t تُعرف بالآتي :-

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

أى أن السرعة هي مشتقة المسافة بالنسبة للزمن وهي تُفيد كثيراً في تفهم طبيعة الحركة ، فعند أى لحظة t ، فإن $f'(t)$ تبين لنا السرعة اللحظية instantaneous velocity وتحدد إشارة المشتقة اتجاه الحركة .

غير أن القيمة المطلقة للمشتقة $f'(t)$ تمثل السرعة اللحظية .

وعليه فإن S تزداد عندما $f'(t) > 0$ وتتناقص عندما $f'(t) < 0$ ويمكننا كتابة الآتي:-

(١) عندما $f'(t) > 0$ ، فإن الحركة تكون في الاتجاه الموجب .

(٢) عندما $f'(t) < 0$ ، فإن الحركة تكون في الاتجاه السالب .

(٣) عندما $f'(t) = 0$ ، فإن الجسم يكون ساكناً (السرعة = صفر) .

١٠ - ٤ أمثلة على السرعة والعجلة .

(١) العلاقة التالية تبين وضع جسيم متحرك في خط مستقيم :

$$S = t^2 + 1$$

فأوجد مكان وسرعة الجسيم عندما : $t = 0$ ، $t = 2$ ، $t = 5$

الحل :- بأخذ مشتقة الدالة نحصل على السرعة (وهي دالة في الزمن أيضاً) :-

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 2t$$

ثم نعوض بقيمة t المختلفة في كل من علاقتي المسافة والسرعة للحصول على موضع

وسرعة الجسيم ، كما هو موضح بالجدول التالي : (١٠-١)

t	0	2	5
s	1	5	26
V	0	4	10

جدول (١٠-١)

وكما يتضح من الجدول فإنه عند الزمن $t=0$ ، الجسم ساكن $V=0$ فإن $S=1$ وهذا يعنى أنه عند بداية الحركة كان الجسم يبعد بمقدار وحدة مسافة عن نقطة البداية . ثم بدأ الجسم حركته فى الاتجاه الموجب للحركة بحيث أن السرعة تزداد وبحيث تكون دائماً مساوية لضعف الزمن المنقضى فى الحركة .

$$[(0, 0), (2, 4), (5, 10)]$$

(٢) يسقط جسم من علو طبقاً للعلاقة :-

$$S = -16 t^2$$

حيث t مقاسة بالثوانى ، s بالأقدام ، فإذا وصل الجسم إلى الأرض فى 5 ثوانٍ فاحسب الارتفاع الذى سقط منه الجسم وكذلك السرعة التى يصطدم بها بالأرض .

الحل :- يلاحظ هنا أن نقطة البداية هى نقطة سقوط الجسم وأن الإشارة السالبة فى معادلة الهبوط تعنى أن المسافة مقاسة فى اتجاه الصعود (أى الاتجاه الموجب هو الصعود لأعلى) .

وبوضع $t=5$ فى المعادلة $S = f(t)$

$$\therefore S = -16 (5)^2 = -400 \text{ ft}$$

كما وأن السرعة عند أى لحظة أثناء الهبوط :

$$V = \frac{ds}{dt} = -32 t$$

فعندما $t=5$ تكون السرعة V

$$V = -32 \times 5 = -160 \text{ m/sec}$$

أى أن الجسم يسقط من ارتفاع 400 ft ويصل للأرض بسرعة تبلغ 160 ft/sec .

(٣) صف حركة نقطة تتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :-

$$S = 3 t^2 - 18 t$$

الحل :- يمكن إيجاد اتجاه الحركة عند أى زمن عن طريق دالة السرعة .

$$V = \frac{ds}{dt} = 6t - 18 = 6(t - 3)$$

ويلاحظ الآتى :-

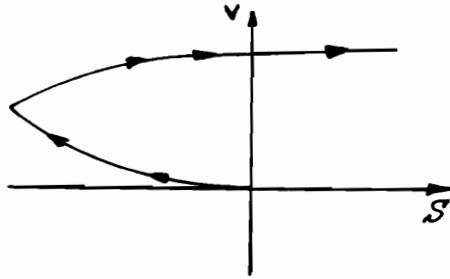
$$(1) \quad V < 0 \text{ عندما } 0 < t < 3$$

$$(2) \quad V = 0 \text{ عندما } t = 3$$

$$(3) \quad V > 0 \text{ عندما } t > 3$$

وبذلك فإن النقطة تتحرك لليسار أثناء الثلاث ثواني الأولى (باعتبار الحركة لليمين هى الموجبة) ، ثم تسكن عندما $t = 3$ ثم تصبح السرعة موجبة أى أنها تتحرك بعد الثلاث ثواني فى الاتجاه الموجب أى لليمين وبذلك فهى تعكس حركتها ويكون وضع النقطة عند $t = 0$ وعند $t = 3$ على الترتيب $0, -27$ والأسهم على الشكل توضح الحركة لليسار ثم لليمين فى خط مستقيم .

أنظر الرسم شكل (١٠-٤) .



شكل (١٠-٤)

وقد تعرضنا فى وصف حركة النقطة ، إلى حساب الفترات الموجبة والسالبة للسرعة والوضع الابتدائى للنقطة ووضع النقطة عند السرعة = صفر .

إلا أنه يمكننا الحصول على وصف أدق لطبيعة حركة النقطة السابقة باعتبار وحساب معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن وهو ما يدعونا إلى التحدث عن العجلة .

تعريف :- تُعرف العجلة بأنها مشتقة السرعة بالنسبة للزمن وبذلك فإن تعريف العجلة acceleration هو :-

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

كما أنه إذا كانت $V = f(S)$:-

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

ولتوضيح ذلك نعتبر جسماً يتحرك في خط مستقيم طبقاً للعلاقة :-

$$S = 3t + 4$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = V = 3 \quad , \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3) = a = 0$$

ويلاحظ أن السرعة لا تتغير فمقدارها $= 3$ ولذلك فإن العجلة وهي معدل تغير السرعة (الثابتة) = صفر

وعند $t = 0$ في وضع البداية فإن $S = 4$ تعنى أن الجسم يبعد بمقدار 4 وحدات مسافة من نقطة القياس ، كما أنه يتحرك في الاتجاه الموجب حيث أن $V = 3 > 0$ بسرعة ثابتة قدرها $V = 3$ (3 وحدات مسافة لكل وحدة زمن)

وفيما يلي يمكننا إيضاح ، فى أى وقت من الحركة تكون العجلة ثابتة ولا تساوى الصفر وهو ما يعرف بالعجلة المنتظمة uniformly accelerated .
فمثلاً إذا كانت

$$S = 3t^2 + 4t - 1$$

$$\therefore V = 6t + 4 \quad , \quad a = 6 (> 0)$$

وتعنى العجلة 6 بأن السرعة تزداد بمقدار 6 وحدات سرعة لكل وحدة زمن فإذا كانت وحدة السرعة m/sec فإن السرعة تزداد بمقدار $6 m/sec$ كل ثانية أو العجلة تساوى $6 m/sec/sec$

وباختصار تكتب العجلة a تساوى :-

$$a = 6 m/sec^2$$

وللعجلة المنتظمة أهمية كبيرة عند دراسة جسم يتحرك رأسياً (بالقرب) من سطح الكرة الأرضية . حيث تكون العجلة والناشئة من الجاذبية الأرضية (gravity) ، وبإهمال مقاومة الهواء ، عند التحرك رأسياً فإن :-

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

حيث V_0 هي السرعة الابتدائية ، g عجلة الجاذبية الأرضية فإذا اعتبرنا الوحدات بالتر والثانية وأن الاتجاه الموجب للحركة هو للأعلى فإن قيمة g تقريباً تعادل :-

$$g = -9.8 \text{ m/sec}^2 \quad (-32 \text{ ft/sec}^2)$$

(٤) قذف جسم إلى أعلى بسرعة ابتدائية 98 m/sec ، احسب زمن الصعود وأقصى ارتفاع يصل له الجسم
الحل :- حيث أن :-

$$S = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

وباعتبار $V_0 = 98$

$$\therefore S = 98t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2 = 98t - 4.9t^2$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 98 - 9.8t$$

وتكون السرعة مساوية للصفر $V = 0$ عندما :-

$$98 - 9.8t = 0 \quad \therefore t = \frac{98}{9.8} \cong 10 \text{ sec}$$

وهو زمن الوصول لأقصى ارتفاع ولحساب أقصى ارتفاع ، نعوض بقيمة الزمن $t = 10$ في معادلة المسافة :-

$$\begin{aligned} S &= 98t - 4.9t^2 \\ &= 98 \times 10 - 4.9 \times 100 \\ &= 980 - 490 = 490 \text{ mt} . \end{aligned}$$

وعليه فإن زمن الصعود $t = 10 \text{ sec}$ وأقصى ارتفاع $S = 490 \text{ mt}$

(٥) تتحرك نقطة في خط مستقيم بحيث أن المسافة بالأقدام مقاسة من نقطة البداية عند أى لحظة يمكن تمثيلها بالعلاقة :

$$S = t^3 - 6t^2 + 9t$$

صف الحركة أثناء الأربع ثواني الأولى من الحركة .

الحل :-

$$\therefore S = t^3 - 6t^2 + 9t \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$, a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 12 = 6(t-2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ويلاحظ من العلاقة (٢) أنه عندما تكون $0 < t < 1$ أى فى خلال الثانية الأولى فإن

$$V = 3(t-1)(t-3) \quad -:$$

$$\therefore V = 3(-ve)(-ve) = +ve \quad \text{أى موجبة}$$

بينما عندما $1 < t < 3$ أى فى خلال الثانية الثانية والثالثة فإن :

$$V = 3(+ve)(-ve) = -ve \quad \text{أى سالبة}$$

أما عندما تكون $t \geq 3$ أى خلال الثانية الرابعة (فأكثر) فإن :-

$$V = 3(+ve)(+ve) = +ve \quad \text{أى موجبة}$$

أى أن النقطة تتحرك أولاً لليمين ثم لليسار ثم لليمين ثانية ومن علاقة العجلة :-

$$a = 6(t-2)$$

فإنه عندما تكون $0 < t < 2$ فإن :

$$a = 6(-ve) = -ve \quad \text{أى سالبة}$$

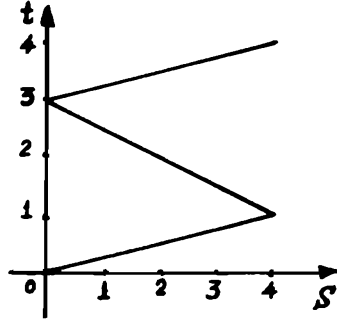
أى أن السرعة تتناقص (عجلة تقصيرية) .

بينما عندما تكون $2 < t \leq 4$ فإن :

$$a = 6(+ve) = +ve \quad \text{أى موجبة}$$

أى أن السرعة تزايد (عجلة تزايدية)

والشكل (١٠-٥) يوضح ذلك .



شكل (١٠ - ٥)

Exercise 10

(١) حدد زاوية تقاطع المنحنيين :-

$$x^2 + y^2 = 5 \quad , \quad y^2 = 4x$$

(٢) احسب الزاوية التي يقطع بها المستقيم : $2y = 1$ ؛ المنحنى ؛ $y = \cos x$

(٣) أوجد معادلتى المماس للمنحنى $y^2 = 8x$ المارين بالنقطة $(-2, 0)$ واثبت أنهما مُتعامدان .

(٤) حدد النقطة التي يكون فيها مماس المنحنى $y = x^2 + 4x$ موازياً للمحور

$X'OX$

(٥) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $y = 3x^2$ عند النقطة $x = 3$

(٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى $x^2 - y^2 = 16$ والذي يمر بالنقطة $(2, -2)$

(٧) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى $y = x^2 + 4x + 2$ عند النقطة التي

يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم :- $2x - 4y + 5 = 0$

(٨) حدد زاوية تقاطع المنحنيين :-

$$y = \frac{x^2}{2} \quad , \quad y = 4 - \frac{x^2}{2}$$

(٩) حدد الزاوية التي يقطع بها المنحنى $y = \sin x$ ، والمحور $X'OX$

(١٠) اكتب معادلتى مماس المنحنى $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ فى نقطتى تقاطعه

مع المحور $Y'OY$

(١١) أوجد مساحة المثلث الذى أضلاعه محور OX والمماس العمودى فى النقطة

$$4x^2 + y^2 = 20 \quad - : (1, -4)$$

(١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى $y = 4x^3 - 21x^2 + 30x$ والتي يكون عندها

المماس للمنحنى موازياً لمحور $X'OX$ ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند كل نقطة من هذه النقط .

(١٣) أوجد معادلة المماس للقطع الناقص : $4x^2 + 9y^2 = 40$ عند النقطة $(1, 2)$

(١٤) فى معادلة القطع المكافئ $y = x^2 + bx + c$ ، حدد الثابتين b, c علماً بأن

المستقيم $y = x$ يمس القطع المكافئ عند النقطة $x = 2$

(١٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ عند النقطة (x_1, y_1) .

(١٦) عين y عند النقطة $(0, b)$ فى المعادلة بطريقة مشتقة الدالة الضمنية :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(١٧) اكتب معادلتى مماس الدائرة :- $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

فى نقطتى تقاطعها مع محور $X'OX$ ثم ارسم الدائرة والمماسات .

(١٨) أوجد ميل المماس للمنحنى $y = x^3 + x^2 - 6x$ عند كل نقطة من نقط تقاطعه

مع محور $X'OX$

(١٩) أوجد معادلة المماس للمنحنى $2x^2 + y^2 + 2xy = 5$ عند النقطة $(1, 1)$

(٢٠) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $e^x + \cos y - 2 = 0$

عند النقطة $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

(٢١) أوجد معادلات المماس والعمودى للمنحنى : $y = x^2 - x + 3$

عند النقطة $(2, 5)$.

(٢٢) عين ميل القطع المكافئ : $y = x^2$ عند النقطتين $x = \pm 2$.

(٢٣) اكتب معادلتى المماسين للقطع الزائد $yx = 4$ عند النقطتين $x_1 = 1, x_2 = -4$ ،

وحدد الزاوية بينهما ومن ثم ارسم المنحنى ومماسيه .

(٢٤) اكتب معادلة المماس للقطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 16$ فى النقطة التى تنصف

جزء المماس المقطوع بمحورى الإحداثيات وتقع فى الربع الإحداثى الأول .

(٢٥) ما هى النقط التى يكون عندها المماس لمنحنى $y = \cos \theta$ ، أفقياً .

(٢٦) اكتب معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافئ $y = 4 - x^2$ عند نقطة تقاطع

القطع المكافئ مع المحور OX (عندما $x > 0$) ثم ارسم القطع والمماس والعمودى .

(٢٧) باستخدام طريقة Δ أوجد النقط التى على المنحنى :- $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$

والتى يكون عندها المماس أفقياً .

(٢٨) بين أن المنحنى $y = x^2 + 3x - 4$ ، ليس له مماساً أفقياً باستخدام طريقة Δ

أوجد زاوية التقاطع لأقرب درجة ، لأزواج المنحنيات التالية :-

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 5 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \quad (٢٩)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 6 \\ y = x \end{cases} \quad (٣٠)$$

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \quad (٣١)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \quad (٣٢)$$

في الثلاث مسائل التالية اكتب معادلات مماسات المنحنيات ثم ارسم المنحنيات

ومماساتها :-

في نقط التقاطع مع المحور OX $y = 4x - x^2$ (٣٣)

في نقط التقاطع مع المحور OY $y = \sqrt{4 - x}$ (٣٤)

في نقط التقاطع مع كل من المحورين OX , OY $y^2 = (4 + x)^3$ (٣٥)

في الأربعة مسائل التالية ، اكتب معادلات المماس للمنحنيات التالية ثم ارسمها

وارسم مماساتها :-

(٣٦) المنحنى $y = \sin x$ عند النقطة $x = \pi$

(٣٧) المنحنى $y = \frac{x^3}{3}$ عند النقطة $x = -1$

(٣٨) المنحنى $y = \frac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $x = 2$

(٣٩) المنحنى $y^2 = x^3$ عند النقطتين $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

أوجد معادلات المماس والعمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط الموضحة أمام

كل منها :-

$$(-3,1) \quad \text{عند} \quad x^2 - 3xy + y^2 = 19 \quad (٤٠)$$

$$(4,0) \quad \text{عند} \quad y = 4x - x^2 \quad (٤١)$$

$$\left. \begin{array}{l} (-2,-2) \\ (-3,1) \end{array} \right\} \quad \text{عند} \quad (x-1)^2 + y^2 = 13 \quad (٤٢)$$

$$(1,4) \quad \text{عند} \quad y = x^3 + 2x^2 + x \quad (٤٣)$$

فى كل من المسائل التالية ، نقطة تتحرك فى خط مستقيم وكانت المسافة S مقاسة بالقدم من نقطة البداية ، الزمن عند أية نقطة $t =$ ثانية وكانت المعادلات التالية تربط بين كل من S, t فأوجد :-

المسافة والسرعة والعجلة عندما $V = 0, t = 0$ [عندما $t \neq 0$]

$$S = t + 3 \quad (٤٤)$$

$$S = t^2 + 6t - 7 \quad (٤٥)$$

$$S = t^2 + 2t - 3 \quad (٤٦)$$

$$S = t^3 - 3t^2 + 3t - 5 \quad (٤٧)$$

$$S = 80t - 16t^2 \quad (٤٨)$$

(٤٩) قذف جسم بزاوية مقدارها θ على الأفقى وبسرعة ابتدائية u فإذا كان المدى (المسافة الأفقية التى يقطعها الجسم) $x =$ والارتفاع $y =$ مرتبطين بالعلاقة :-

$$y = x \tan \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta}$$

فما هو أقصى ارتفاع يصل له المقذوف وما المدى المقطوع حينئذ

($g =$ عجلة الجاذبية الأرضية = ثابت) .

(٥٠) تحرك جسم من السكون ثم عاد للسكون مرة أخرى وكانت العلاقة بين سرعته V بالمترا/ث والزمن t بالثانية كالتالى :-

$$V = 2t - 5t^2$$

فاحسب الزمن الذى استغرقه بين لحظتى السكون ، ثم أوجد فترات تزايد وتناقص كل من السرعة والعجلة .

(٥١) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم فإذا كان بعدها S بالمتر عن نقطة ثابتة O عند الزمن t يتحدد من العلاقة :-

$$S = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$$

فبين أن النقطة ، تتوقف عن الحركة ، لحظيا مرتين ، ثم أوجد المسافة بين فترتي السكون .

(٥٢) قذفت كرة لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها 64 ft/sec ، فاحسب زمن صعودها وهبوطها وأقصى ارتفاع تصل إليه ؟

(٥٣) إذا كانت المسافة S التي يقطعها جسم مقذوف رأسيا لأعلى في الزمن t تعطى بالعلاقة التقريبية التالية :-

$$S = 120t - 4.9t^2$$

فأوجد أقصى ارتفاع يصل له الجسم والزمن اللازم لذلك .

(٥٤) إذا كانت $S = 3 + 3t^2 - t^3$ تمثل العلاقة بين المسافة S والزمن t لجسم متحرك في خط مستقيم ، فأوجد السرعة عندما تنعدم العجلة .

(٥٥) تحركت نقطة مادية في خط مستقيم وكانت العلاقة بين S بالمتر ، t بالثانية :-

$$S = (3t - 2)^2$$

فأوجد سرعتها المتوسطة خلال الثانية السادسة ، ثم أوجد سرعتها وعجلتها عندما $t = 4$

(٥٦) سقطت نقطة مادية من ارتفاع ما فوصلت الأرض بعد ثلاث ثوانى فأوجد

الارتفاع الذى سقطت منه وسرعة اصطدامها بالأرض

تحركت نقطة مادية في خط مستقيم وكانت المسافة S بالمتر والزمن t بالثانية مرتبطان

بالمعادلات المبينة فيما يلى ، احسب السرعة والعجلة بعد ٣ ثوان :-

$$S = 2t^2 + 2\sqrt{t} \quad (٥٧)$$

$$S = 2t^3 + 6t^2 - 3t + 1 \quad (٥٨)$$

$$S = 3t + \frac{4}{t-2} \quad (٥٩)$$

$$S = 3t^3 - 5t^2 + 2t \quad (60)$$

$$S = t^4 - 4t^3 + 4t^2 \quad (61)$$

(62) إذا كانت $S = 6 + 12t - t^3$ هي العلاقة بين S بالمتر ، t بالثانية لنقطة

تتحرك في خط مستقيم فأوجد متى يغير الجسم حركته وكم تبلغ العجلة عندئذ ؟

(63) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بحيث أن المسافة S بالمتر بعد t ثانية تُعطى

بالعلاقة : -

$$S = 3t^4 - 16t^3 + 6t^2 - 48t$$

فبين أن سرعة النقطة ، لا تساوى صفرًا إلا مرة واحدة فقط خلال حركتها ، ثم

احسب السرعة عندما تكون العجلة $= 5m/sec^2$.