الباب الخامس عشر

تكاملات على الخطوط والسطوح

درسنا فيما سبق تكامل اقتران ذي متغير واحد على فترة . والسؤال الآن هو هل بالامكان اجراء تكامل اقتران على منحن فضائي . هذا ممكن ، والتكامل الناتج نسميه تكاملا على الخطوط .

واستطرادا من التكامل الثنائي على منطقة (في مستوى) ، أو على مجسم (في ثلاثة ابعاد) ، نقدم نوعا آخر من التكاملات ، هو التكامل على السطوح .

ومع اننا درسنا المتجهات ، والاقترانات المتجهة فيما سبق ، الا ان هذه الاقترانات كانت تعتمد على مَعْلَم واحد . وسنعمم هذه الدراسة لتشمل ما يسمى حقولا متجهة ، وسنرى بعض الخواص التحليلية لهذه الحقول المتجهة ، وتطبيقات شتى في الرياضيات والفيزياء وميكانيك الموائع .

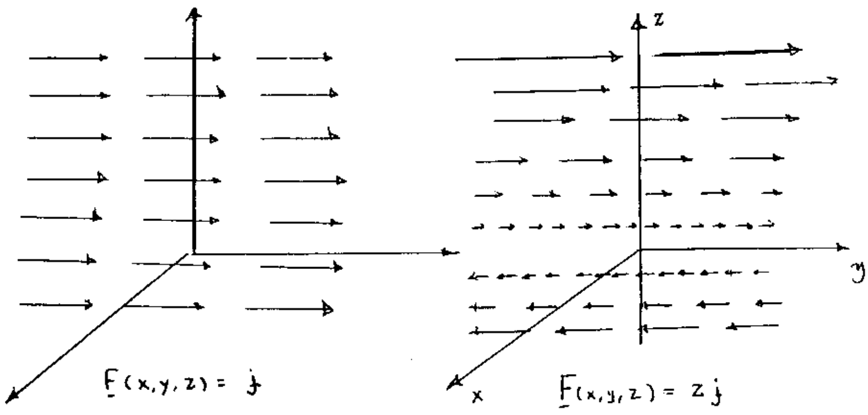
(15.1) الحقول المتجهة

يعرف الجميع مجال الجاذبية الارضية ، اذ انه يفرض مع كل نقطة (x,y,z) في الفضاء قوة تؤثر بها الارض على وَحْدة كتلة موضعها (x,y,z) . اي انه لكل نقطة في الفضاء يفرض متجه في الفضاء . مجموعة هذه المتجهات لكل نقاط الفضاء تسمى حقولا متجهة .

تعريف (15.1) يتالف الحقل المتجه $\underline{F}$ من جزأين : مجموعة D من نقاط في الفضاء، تسمى المجال ، وقاعدة تربط كل نقطة (x,y,z) في D بمتجه واحد فقط $\underline{F}(x,y,z)$.

اذا كان هذا الحقل يتغير مع الزمن ، فانه يسمى حقلا حركيا (ديناميا) . والا فهو حقل سكوني (الحالة الدائمة) . على اننا سنهتم في هذا الباب بالحقول السكونية فقط . والشكل (15.1) يظهر رسم حقل متجه في الفضاء كما هو مبين . ويلاحظ ان احسن ما يمكن ان نفعله هو اظهار الحقل عند بعض نقاط الفضاء .

مثل (15.1) (الجاذبية الارضية) حسب قانون نيوتن للجاذبية ، فان قوة الجاذبية $\underline{F}(x,y,z)$ التي تؤثر بها كتلة m موضعها نقطة الاصل على وحدة كتلة موضعها النقطة (x,y,z) ليست نقطة الاصل هي



الشكل(15.1)

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{Gm}{x^2 + y^2 + z^2}\ \underline{u}(x,y,z)$$

G هو ثابت الجاذبية الكوني ، $\underline{u}(x,y,z)$ هو متجه وحدة منبثق من (x,y,z) ومتجه نحو نقطة الاصل . والمتجه $\underline{F}$ يسمى حقل الجاذبية لكتلة نقطية .

من تعريف $\underline{u}(x,y,z)$ فان

$$\underline{u}(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ (x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})$$

وبالتالي

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{-Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\ (x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})$$

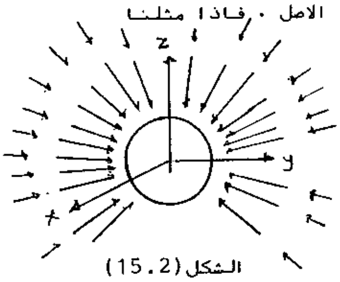
ويلاحظ ان $\underline{F}$ له خواص معينة . منها ان اتجاهه دوما هو نحو نقطة الاصل . وان مقياسه ثابت لجميع النقاط ذات الابعاد المتساوية عن نقطة الاصل . فاذا مثلنا

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

فان $\underline{F}$ يمكن كتابتها كما يلي

$$\underline{F}(\underline{r}) = \frac{-Gm}{\|\underline{r}\|^3}\ \underline{r}$$

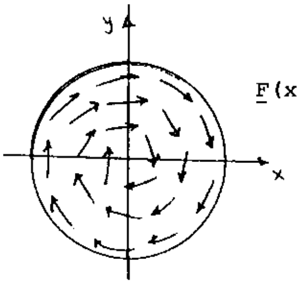
انظر الشكل (15.2) .



الشكل(15.2)

مثل(15.2) (حركة الموائع) افرض $\underline{v}(x,y,z)$ سرعة مائع عند (x,y,z) ، فان $\underline{v}$ حقل متجه ، يسمى حقل السرعة للمائع . انظر الشكل (15.3) .

ويمكن ان يكون الحقل المتجه مؤلفا من ثلاث مركبات M ، N ، P كما يلي



$$\underline{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\underline{i} + N(x,y,z)\underline{j} + P(x,y,z)\underline{k}$$

وحقل الجاذبية الارضية في المثل (15.1) مَثَلٌ على ذلك .

سرعة ماء في بعض النقاط حول بالوعة
الشكل (15.3)

التدريج كحقل متجة

افرض f قابلا للاشتقاق في متغيرات ثلاث x ، y ، z . فان تدريج f كما عرفناه هو حقل متجه ، وهو

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\underline{k}$$

واذا $\underline{F} = \nabla f$ ، فاننا نسمي $\underline{F}$ حقلا محافظا ، ونسمي f اقتران الجُهْد للحقل $\underline{F}$.

وامثال هذه الحقول موجودة في الفيزياء . فحقل الجاذبية الارضية في المثل (15.1) هو حقل محافظ ، اذ انه اذا فرضنا

$$f_1(x,y,z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

فان

$$\nabla f_1 = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\ (x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})$$

لذلك ، اذا

$$f(x,y,z) = \frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z)^{1/2}}$$

فان

$$\underline{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \nabla \frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z)^{1/2}}$$

أي ان $\underline{F}$ هو تدريج f . مما يعني ان $\underline{F}$ هو حقل محافظ . ومثل ذلك الحقل الكهربائي لشحنة نقطية .

تباعد حقل متجه

عندنا نوعان من مشتقات حقل متجه مختلفان . احدهما يؤدي الى اقتران حقيقي، والآخر يؤدي الى حقل متجه . نعرفهما فيما يأتي .

تعريف (15.2) افرض $\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j} + P\underline{k}$ حقلا متجها ، وان $\frac{\partial M}{\partial x}$ ، $\frac{\partial N}{\partial y}$ ، $\frac{\partial P}{\partial z}$ موجودة . نعرف تباعد $\underline{F}$ ، نكتبه div $\underline{F}$ أو $\nabla \cdot \underline{F}$ كما يلي

$$\nabla \cdot \underline{F} = (x,y,z) = \frac{\partial M}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial N}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)$$

مثل (15.3) افرض $\underline{F}$ الحقل المتجه للجاذبية ، فان $\text{div } \underline{F} = 0$

الحـل :

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-Gm(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - (-Gm\,x)(\frac{3}{2})(2x)(x^2+y^2+z)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{Gm(2x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

وبطريقة مماثلة نجد

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{Gm(2y^2-z^2-x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{Gm(2z^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2+z)^3}$$

لذلـك

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

تعريف (15.3) اذا لحقل متجه $\underline{F}$ ، كان $\nabla . \underline{F} = 0$ ، فان $\underline{F}$ يسمى خلوا من التباعد ، او ملفيا .

وحقل الجاذبية الارضية هو مِلَفِي . ويمكن فهم التباعد من قراءة حقل السرعة لمائع . افرض $\underline{v}$ تمثل حقل السرعة لمائع (مثلا هواء) يمر من خلال سطح (مثلا غشاء). فان $\underline{v}(x,y,z)$ تمثل المعدل (بالنسبة الى الزمن) لجريان الكتلة لكل وحدة حجم من النقطة (x,y,z) . وتكون النقطة (x,y,z) مَنْبَعا اذا $\nabla . v > 0$ ، أي انه يوجد تدفق كتلة من هذه النقطة ، بينما تسمى النقطة بالوعة اذا $\nabla . \underline{v} < 0$ ، مما يعني ان هناك تدفق كتلة الى النقطة . لذلك اذا $\nabla . \underline{v} = 0$ في المنطقة ، فان هذه المنطقة لا تحوي منابع او بالوعات . مثل هذا المائع يسمى غير انضغاطي .

مثل (15.4) افرض $\underline{v}(x,y,z) = x^3yz^2\underline{i} + x^2y^2z^2\underline{j} + x^2yz^3\underline{k}$. بَيِّنْ أيْن توجد المنابع والبالوعات .

الحـل :

$$\nabla . \underline{v} = 3x^2yz^2 + 2x^2yz^2 + 3x^2yz^2 = 8x^2yz^2$$

اذا $\nabla . \underline{v} = 0$ فان ايا من x ، y ، z هي صفر

واذا $\nabla . \underline{v} > 0$ فهذا يتحقق اذا $y > 0$ ، $z \neq 0 \neq x$ ، بينما $\nabla . \underline{v} < 0$ اذا $y < 0$ ، $z \neq 0 \neq x$. لذلك المنابع على يمين المستوى xz ، والبالوعات على شماله .

دوران حقل متجه

النوع الآخر من مشتقات حقل متجه هو حقل متجه ايضا .

تعريف <u>(15.4)</u> افرض $\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j} + P\underline{k}$ حقلا متجها ، وان المشتقــــات الجزئيــــة للاقترانات M ، N ، P موجودة • فاننا نعرف <u>دوران $\underline{F}$</u> نكتبه $\nabla \times \underline{F}$ أو $\text{curl}\ \underline{F}$ كما يلــي

$$\nabla \times \underline{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\underline{k} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

وقد يكون من الاسهل حفظه على انه المحدد

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

مثل <u>(15.5)</u> جد دوران $\underline{F}$ اذا $\underline{F} = xz\underline{i} - xy^2z\underline{j} + e^{3y}\underline{k}$

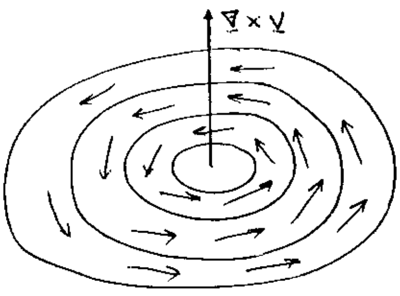
<u>الحــل</u> :

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -xy^2z & e^{3y} \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i}(3e^{3y} + xy^2) - \underline{j}(0 - x) + \underline{k}(-y^2z - 0)$$

$$= (3e^{3y} + xy^2)\underline{i} + x\underline{j} - y^2z\underline{k}$$

ويمكن استيعاب مفهوم دوران الحقل المتجه كما يلي • افرض $\underline{v}$ حقل السرعـــة المتجه لمائع يجري في منطقة مجسمة • فان $\nabla \times \underline{v}$ يقيس نزوع المائع للدوران حـــول محور ، هو في اتجاه $\nabla \times \underline{v}$ • كما ان مقياس $\nabla \times \underline{v}$ أي $\|\nabla \times \underline{v}\|$ يقيس سرعـــة حركة جزيئات المائع حول هذا المحور انظر الشكل (15.4) • وهذا يعني انــــه اذا $\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$ ، فان $\underline{F}$ <u>غير دوراني</u> •



الشكل (15.4)

من العلاقات الاخرى ، نجـد

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{F}) = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \underline{0} \qquad \ldots\ldots \quad (4)$$

وبرهانهما هو في التمارين كما انه مباشر •

كذلك

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \frac{^2 f}{x^2} + \frac{^2 f}{y^2} + \frac{^2 f}{z^2} \ldots (5)$$

ونسمي هذا المؤثر ، <u>لابلاسي</u> f ، نكتبه $\nabla^2 f$ • والاقترانات التي تحقق

$$\nabla^2 f = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (6)$$

لابلاسية أو توافقية . كما أن المعادلة (6) تسمى معادلة لابلاس ،(بيير لابلاس رياضي فرنسي 1749 - 1827)

في حالة متغيرين فقط ، افرض $\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j}$ فان

$$\underline{\nabla} f = f_x\underline{i} + f_y\underline{j} \qquad \underline{\nabla} \times \underline{F} = (N_x - M_y)\,\underline{k}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = M_x + N_y \qquad \underline{\nabla}^2 f = f_{xx} + f_{yy} \qquad \ldots\ldots \quad (7)$$

استرجاع اقتران من تدريجه

وجدنا ان التكامل يؤدي الى اصل المشتقة . اي يمكن معرفة الاقتران اذا عرفنا المشتقة . وفي حالة اقتران ذي متغيرات متعددة ، نعرف هذا الاقتران اذا عرفنا تدريجه . وسنضرب اولا امثلة تبين ذلك.

مثل (15.6) افرض $\underline{F}$ تدريج اقتران f . جد هذا الاقتران f اذا

$$\underline{F}(x,y) = (3x^2y^2 + 3y)\,\underline{i} + (2x^3y + 3x)\,\underline{j}$$

الحـــل : اذا $\underline{F}$ تدريج للاقتران f فان

$$\underline{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} = \underline{F}$$

لذلـك

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 3y \;, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 3x$$

نجري تكامل $\frac{\partial f}{\partial x}$ بالنسبة الى x

$$f(x,y) = x^3y^2 + 3xy + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 3x + \frac{dg}{dy} = 2x^3y + 3x$$

مما يعني ان $\frac{dg}{dy} = 0$ ، اي ان $g(y) = c$

لذلك $f(x,y) = x^3y^2 + 3xy + c$

مثل(15.7) جد الاقتران $f(x,y,z)$ الذي تدريجه

$$\underline{\nabla} f(x,y,z) = (2xy + z^2)\,\underline{i} + x^2\,\underline{j} + (2xz + \pi\cos\pi z)\,\underline{k}$$

الحـــل : من تعريف التدريج

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2 \;, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \;, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz + \pi\cos\pi z$$

بالتكامل

$$f(x,y,z) = x^2y + z^2x + g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2$$

اي أن $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ لذلك

$$f(x,y,z) = x^2y + z^2x + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zx + \frac{dh}{dz} = 2xz + \pi\cos\pi z$$

$$\frac{dh}{dz} = \pi\cos\pi z$$

لذلك
$$h(z) = \sin\pi z + C$$

والحل هو

$$f(x,y,z) = x^2 y + x^2 z + \sin\pi z + C$$

والسؤال هو كيف نعرف اقترانا متجها ان كان تدريجا لاقتران ما ام لا ؟ بما أنه اذا

$$\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j} + P\underline{k}$$

واذا وجد اقتران f بحيث ان $\underline{F} = \nabla f$ فان

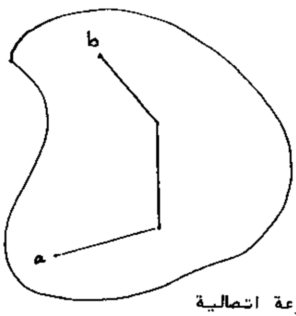
$$\nabla \times \underline{F} = \nabla \times (\nabla f) = \underline{0}$$

أي أن

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}\,,\quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

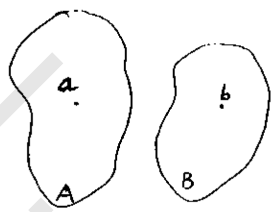
معكوس العبارة (8) ليس صحيحا. أي أنه قد يوجد حقل متجه $\underline{F}$ يحققها وليس من اقتران f بحيث ان $\nabla f = \underline{F}$. اما اذا مجال $\underline{F}$ (نسميه D) هو الفضاء R^3 أو كرة أو متوازي سطوح ، أي أن D اتصالي فان وجود (8) يتضمن وجود f بحيث ان $\nabla f = \underline{F}$.

تعريف (15.5) المجموعة المفتوحة U تسمى اتصالية اذا كان بالامكان وصل اي نقطتين منها بمضلع (مفتوح) . في الشكل (15.5) ، ان (أ) هو مجموعة اتصالية ، بينما (ب) غير اتصالية .



مجموعة اتصالية

(أ)



مجموعة غير اتصالية (ب)

الشكل (15.5)

ذكرنا فيما سبق (البند 12.4) تعريف المنحني البسيط (الذي لا يقطع نفسه) المغلق الذي يقسم النقاط في المستوى الى مجموعتين : واحدة داخله ، واخرى خارجه . وقد يسمى هذا منحني جوردان (نسبة الى الرياضي الفرنسي كاميل جوردان 1838-1922) .
والآن نخص المجموعات الاتصالية .

تعريف (15.6) افرض Ω مجموعة جزئية اتصالية من المستوى ، وان C أي منحن بسيط مغلق . Ω تسمى اتصالية بسيطة اذا لاي C في Ω فان المنطقة الداخلية التي يحدها C هي في Ω .

والآن نقدم الشرط اللازم والكافي لاسترجاع اقتران من تدريجه .

مبرهنة (15.7)

(أ) افرض M ، N اقترانين في متغيرين لهما مشتقات جزئية متصلة على منطقة اتصالية بسيطة Ω . فان الحقل المتجه $\underline{F} = M(x,y)\underline{i} + N(x,y)\underline{j}$ هو تدريج لاقتران $f(x,y)$ اذا وفقط اذا

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad , \quad \forall (x,y) \in \Omega \qquad \ldots\ldots \quad (9)$$

(ب) اذا M ، N ، P اقترانات في ثلاثة متغيرات لها مشتقات جزئية متصلة على صندوق مفتوح S فان الحقل المتجه

$$M(x,y,z)\underline{i} + N(x,y,z)\underline{j} + P(x,y,z)\underline{k}$$

هو تدريج لاقتران f على S اذا وفقط اذا

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \;,\; \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \;,\; \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad , \quad \forall (x,y,z) \in S \qquad \ldots\ldots \quad (10)$$

مثل (15.8) بين ايا من الحقول المتجهة التالية هي تدريج لاقترانات .

(أ) $\underline{F}(x,y) = y^2 e^{xy}\underline{i} + (1+xy)e^{xy}\underline{j}$

(ب) $\underline{G}(x,y) = \frac{x}{y}\underline{i} - \frac{y}{x}\underline{j}$

(جـ) $\underline{H}(x,y,z) = 2xyz\underline{i} + x^2 z\underline{j} + (x^2 y + 1)\underline{k}$

(د) $\underline{K}(x,y,z) = yz\cos xy\,\underline{i} + xz\cos xy\,\underline{j} + \cos xy\,\underline{k}$

الحـل : (أ)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy} = (2y + y^2)e^{xy}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + (1+xy)ye^{xy} = (2y + xy^2)e^{xy}$$

لذلك $\underline{F}$ هو تدريج لاقتران ما .

(ب)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y}{x^2}$$

لذلك $\underline{G}$ ليس تدريجا لاقتران .

(جـ)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 = \frac{\partial N}{\partial z} \;,\; \frac{\partial M}{\partial z} = 2xy = \frac{\partial P}{\partial x} \;,\; \frac{\partial N}{\partial x} = 2xz = \frac{\partial M}{\partial y}$$

لذلك $\underline{H}$ هو تدريج لاقتران ما .

(د)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x\sin xy \neq \frac{\partial N}{\partial z} = x\cos xy$$

أي أن $\underline{K}$ ليس تدريجا لاقتران ما .

تمارين (15.1)

للتمارين (1) - (10) جد التباعد و الدوران للحقول المتجهة التالية

(1) $\underline{F}(x,y) = x\underline{i} + y\underline{j}$

(2) $\underline{F}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\underline{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\underline{j}$

(3) $\underline{F}(x,y,z) = y\underline{i} + z\underline{j} + x\underline{k}$

(4) $\underline{F}(x,y,z) = \cos x\underline{i} + \sin y\underline{j} + e^{xy}\underline{k}$

(5) $\underline{F}(x,y,z) = x^2\underline{i} + y^2\underline{j} + z^2\underline{k}$

(6) $\underline{F}(x,y,z) = yz\underline{i} + xz\underline{j} + xy\underline{k}$

(7) $\underline{F}(x,y,z) = -\dfrac{x}{z}\underline{i} - \dfrac{y}{z}\underline{j} + \dfrac{1}{z}\underline{k}$

(8) $\underline{F}(x,y,z) = \dfrac{x\underline{i} + y\underline{j}}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \underline{k}$

(9) $\underline{F}(x,y,z) = e^x\cos y\underline{i} + e^x\sin y\underline{j} + z\underline{k}$

(10) $\underline{F}(x,y,z) = (y+z)\underline{i} + (z+x)\underline{j} + (x+y)\underline{k}$

للتمارين (11) - (16) تأكد من أن هذه الاقترانات تحقق معادلة لابلاس

(11) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(12) $f(x,y) = e^x\sin y$

(13) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 - y^2}$

(14) $f(x,y) = e^{-y}\cos x$

(15) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

(16) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

للتمارين (17) - (26) هل الحقل المتجه $\underline{F}$ تدريج لاقتران ما f ؟ جـــد f ان كان كذلك .

(17) $\underline{F}(x,y) = e^y\underline{i} + (xe^y + y)\underline{j}$

(18) $\underline{F}(x,y) = y^2e^{xy}\underline{i} + (1+xy)e^{xy}\underline{j}$

(19) $\underline{F}(x,y) = xy^2\underline{i} + x^2y\underline{j}$

(20) $\underline{F}(x,y) = (3x^2y^2 + 3y)\underline{i} + (2x^3y + 3x)\underline{j}$

(21) $\underline{F}(x,y) = e^x\cos y^2\underline{i} - 2ye^x\sin y^2\underline{j}$

(22) $\underline{F}(x,y) = (x^2\sin^{-1}y)\underline{i} + \left(\dfrac{x^3}{3\sqrt{1-y^2}} - \ln y\right)\underline{j}$

(23) $\underline{F}(x,y,z) = 2xyz\underline{i} + x^2z\underline{j} + (x^2y + 1)\underline{k}$

(24) $\underline{F}(x,y,z) = yz\underline{i} + xz\underline{j} + xy\underline{k}$

(25) $\underline{F}(x,y,z) = xz\underline{i} + yz\underline{j} + xz\underline{k}$

(26) $\underline{F}(x,y,z) = (2xz+1)\underline{i} + 2y(z+1)\underline{j} + (x^2+y^2+3z^2)\underline{k}$

(27) اذا f ، g اقترانان في ثلاثة متغيرات $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ حقول متجهة في ثلاثـــة متغيرات . أي من العبارات التالية صائبة ، وايها خطأ ، وايها لا معنى لها ؟

(أ) $\nabla(fg)$ (ب) $\nabla\underline{F}$

(جـ) $\nabla\times(\nabla f)$ (د) $\nabla(\nabla\cdot\underline{F})$

(هـ) $\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{F})$ (و) $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} f)$

(ز) $(\underline{\nabla} f) \times (\underline{\nabla} \times \underline{F})$ (ح) $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} f))$

(ط) $\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} f))$

(28) اذا $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ حقلان متجهان ، f اقتران في ثلاثة متغيرات ، عرف $f\underline{F}$ ، $\underline{F} \cdot \underline{G}$ ، $\underline{F} \times \underline{G}$ كما يلي

$$(f\underline{F})(x,y,z) = f(x,y,z)\,\underline{F}(x,y,z)$$

$$(\underline{F} \cdot \underline{G})(x,y,z) = \underline{F}(x,y,z) \cdot \underline{G}(x,y,z)$$

$$(\underline{F} \times \underline{G})(x,y,z) = \underline{F}(x,y,z) \times \underline{G}(x,y,z)$$

(أ) استعمل مركبات $\underline{F}$ لتبرهن $f\underline{F}$ حقلا متجها متصلا اذا f ، $\underline{F}$ متصلان .

(ب) استعمل مركبات $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ لتبرهن على ان $\underline{F} \cdot \underline{G}$ متصل اذا $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ متصلان .

(ج) استعمل مركبات $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ لتبرهن على أن $\underline{F} \times \underline{G}$ متصل اذا $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ متصلان .

للتمارين (29) - (33) استعمل التمرين (28) لتبرهن المتطابقات التالية .
افرض أن المشتقات الجزئية المطلوبة متصلة .

(29) $\underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{F}) = 0$ (30) $\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} f) = 0$

(31) $\underline{\nabla} \times (f\underline{F}) = f\underline{\nabla} \cdot \underline{F} + (\underline{\nabla} f) \cdot \underline{F}$ (32) $\underline{\nabla} \cdot (\underline{F} \times \underline{G}) = \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{G} - \underline{F} \cdot \underline{\nabla} \times \underline{G}$

(33) $\underline{\nabla} \times (f\underline{F}) = f(\underline{\nabla} \times \underline{F}) + \underline{\nabla} f \times \underline{F}$

(34) بتحقيق بعض الشروط يمكن البرهنة على أن التدريجات هي الحقول الوحيدة اللادورانية ، أي أن

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = \underline{0} \implies \underline{F} = \underline{\nabla} f$$

f اقتران ما .

(35) ويمكن البرهنة على أن الدورانيات هي وحدها الحقول غير الملغية ، أي أن

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \cdot \underline{F} = 0 \implies \underline{F} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$$

حيث $\underline{u}$ حقل متجه .

(36) جسم كتلته m يتحرك في خط دائري بسرعة زاوية ω بتأثير قوة جاذبة

$$\underline{F}(x,y,z) = m\omega^2 (x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})$$

اثبت أن الاقتران f حيث $f(x,y,z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

هو اقتران الجهد لـ $\underline{F}$.

(37) نسمي الحقل المتجه $\underline{G}$ جهدا متجها للحقل المتجه $\underline{F}$ اذا $\underline{F} = \underline{\nabla} \times \underline{G}$. اثبت انه اذا $\underline{F}$ له جهد متجه ، فان $\underline{F}$ غير ملغي .

(38) افرض $\underline{B}$ حقل محاثة مغناطيسي مرتبط بتيار في سلك حسب

$$\underline{B}(x,y,z) = I\left(\frac{-y\underline{i} + x\underline{j}}{x^2 + y^2}\right)$$

حيث I ثابت . افرض

$$\underline{G}(x,y,z) = \frac{-I}{2} \ln(x^2 + y^2)\underline{k}$$

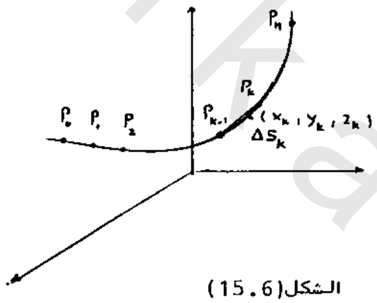
اثبت أن $\underline{G}$ هو جهد متجه للحقل $\underline{B}$.

(39) افرض $\underline{F}(x,y,z) = 8\underline{i}$. جد الحقل المتجه لـ $\underline{F}$.

(15.2) التكامل على الخطوط

ذكرنا في التمهيد لهذا الباب اننا سنعنى بالتكامل على المنحنيات بشكل عام . ولتقريب هذا المفهوم نستخدم هذا التكامل لحساب كتلة سلك معروف كثافته .

افرض سلكا شكله منحن ممهد C طوله محدد ، وان كثافته (الكتلة لكل وحدة طول) في النقطة (x,y,z) هي $f(x,y,z)$. نفرض أي تجزئة P للمنحنى C باختيار النقاط $P_0 , P_1 , P_2 , \ldots , P_n$ على C . انظر الشكل (15.6) . لاي عدد k بين 1 ، n افرض (x_k , y_k , z_k) نقطة على C بين P_{k-1} ، P_k ، وان Δs_k هو طول قوس C بين هاتين النقطتين . اذا Δs_k صغيرة ، فان كتلة ذلك الجزء من السلك بين P_{k-1} ، P_k ، تحسب تقريبا $f(x_k , y_k , z_k)\Delta s_k$ ، اي حاصل ضرب الكثافة بالطول . والكتلة m للسلك كله يقربها المجموع



الشكل(15.6)

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k , y_k , z_k)\Delta s_k$$

واذا f متصل لجميع نقاط C فان هذا المجموع له نهاية عندما $\|P\| \longrightarrow 0$. نسمي هذه النهاية تكامل f على C .

تعريف (15.8) اذا f متصل على منحن ممهد C له طول محدد ، فان التكامل على الخط (رمزه $\int_C f(x,y,z)ds$) للاقتران f على C هو

$$\int_C f(x,y,z)ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k , y_k , z_k)ds \quad \ldots(11)$$

واذا f يمثل الكثافة ، فان كتلة السلك هي

$$m = \int_C f(x,y,z)ds \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

ولا نستعمل المعادلة (11) لحساب التكامل ، فذلك في غاية الازعاج . لذلك نستخدم أي مَعْلَمةٍ للمنحني C . فاذا فرضنا مَعْلَمَةً للمنحني C حسب

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

على $[a, b]$ فانه يمكن البرهنة على ان

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| dt \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

وان أي مَعْلَمَة ممهدة للمنحني C تعطي القيمة نفسها لهذا التكامل .

مثل (15.9) افرض C هو قطعة المستقيم ما بين $(0,0,0)$ ، $(3,1,-2)$. احسب

$$\int_C (x^2 - y^2 + 2z)\,ds$$

الحـل : مَعْلَمة C هي $\underline{r}(t) = 3t\,\underline{i} + t\,\underline{j} - 2t\,\underline{k}\ ,\ 0 \le t \le 1$

بما ان $x(t) = 3t$ ، $y(t) = t$ ، $z(t) = -2t$ فان

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = 3\underline{i} + \underline{j} - 2k\ ,\ \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

والتكامل هو

$$\int_C (x^2 - y^2 + 2z)\,ds = \int_0^1 (9t^2 - t^2 - 4t)\sqrt{14}\ dt$$

$$= \sqrt{14}\ \left(3t^3 - \frac{t^3}{3} - 2t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

مثل (15.10) اذا C هو المنحني التكعيبي الملتوي

$$\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + t^3\underline{k}\ ,\quad 0 \le t \le \frac{1}{2}$$

احسب

$$\int_C (24x + 108z)\,ds$$

الحـل :

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{i} + 2t\,\underline{j} + 3t^2\underline{k}\ ,$$

$$\left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\int_C (24x + 108z)\,ds = \int_0^{\frac{1}{2}} (24t + 108t^3)\ \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\ \ dt$$

$$= 2(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{41\sqrt{41}}{64} - 1\right) \approx 6.2$$

حالات خاصة : افرض C قطعة المستقيم من $(a,0,0)$ الى $(b,0,0)$ ، اي على محور x . فان مَعْلَمَتها هي

$$\underline{r}(t) = t\,\underline{i}\ ,\quad a \le t \le b\ .$$

واذا f متصل على C فان (13) تؤول الى

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left\|\frac{d\underline{r}}{dt}\right\| dt$$

$$= \int_a^b f(t,0,0)\,dt = \int_a^b f_0(t)\,dt \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

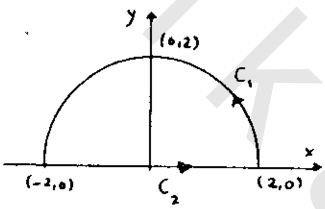
حيث $f_0(t) = f(t,0,0)$. أي أن التكامل على هذه الفترة المغلقة منطبقة على محور x هو تكامل اقتران ذي متغير واحد .

وفي حال $f(x,y,z) \equiv 1$ ، لاي مَعْلَمَةٍ للمنحني C فان التكامل

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_C 1\,ds = \int_a^b \left\|\frac{d\underline{r}}{dt}\right\| dt \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

وهذا هو طول المنحني C . اي انه يمكن حساب طول منحن بحساب تكامل على المنحني . كذلك اذا f متصل على منحن ممهد اجزاء، $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_n$ فان

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x,y,z)\,ds \quad \ldots\ldots \quad (16)$$



الشكل(15.7)

<u>مثل (15.11)</u> افرض $C = C_1 \cup C_2$ كما هو في الشكل (15.7) . احسب $\int_C (xy+1)\,ds$

<u>الحل</u> : معلمة C هي

$C_1 : \underline{r}_1(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 2\sin t\,\underline{j}\ ,\ 0 \le t < \pi$

$C_2 : \underline{r}_2(t) = 2t\,\underline{i}\ ,\ -1 \le t \le 1$

لذلك $\left\|\frac{d\underline{r}_1}{dt}\right\| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$

$\left\|\frac{d\underline{r}_2}{dt}\right\| = 2$

الآن نحسب

$$\int_{C_1} (xy+1)\,ds = \int_0^{\pi} (4\sin t\cos t + 1)(2)\,dt$$

$$= 2(2\sin^2 t + t)\Big|_0^{\pi} = 2\pi$$

$$\int_{C_2} (xy+1)\,ds = \int_{-1}^{1} (0+1)\,2\,dt = 4$$

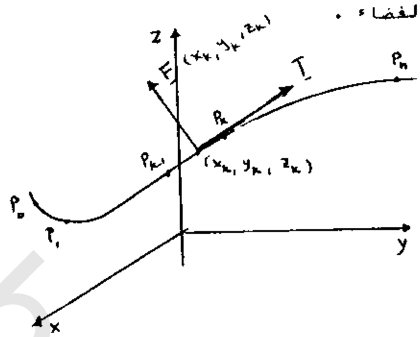
والتكامل هو $4 + 2\pi$.

<u>التكامل على الخطوط للحقول المتجهة</u>

نقدم هذا المفهوم من خلال الشغل . فكما وجدنا سابقا (البند(5.9)) فان الشغل الذي تبذله قوة ثابتة $\underline{F}$ على جسم يتحرك في خط مستقيم من النقطة P الى النقطة Q هو

$$W = \underline{F} \cdot \overrightarrow{PQ} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

لذلك نفرض ان هذا الجسم يتحرك على منحن C محدود الطول ، وان الحقل المتجه $\underline{F}$ يمثل قوة متصلة تؤثر على الجسم في الفضاء .



الشكل (15.8)

نوجه C باتجاه حركة الجسم .

ونفرض تجزئة $P = \{P_o, P_1, \ldots, P_n\}$ على C .

انظر الشكل (15.8) . لكل عدد k بين 1 ، n افرض Δs_k هو طول ذلك الجزء من المنحني بين P_{k-1} ، P_k ، وان (x_k, y_k, z_k) أي نقطة على هذا الجزء ايضا . اذا Δs_k صغير

فان حركة الجسم على C من P_{k-1} الى P_k تكاد تكون في اتجاه $\underline{T}(x_k, y_k, z_k)$ متجه وحدة المماس . بما ان $\underline{F}$ متصل على C ، فان قيم $\underline{F}$ على المنحني من P_{k-1} الى P_k قريبة من $\underline{F}(x_k, y_k, z_k)$. وبالتالي فان مقدار الشغل المبذول في اثناء حركة الجسم على هذا الجزء من C تقربها الكمية

$$\underline{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot [\Delta s_k \, \underline{T}(x_k, y_k, z_k)]$$
$$= F(x_k, y_k, z_k) \cdot \underline{T}(x_k, y_k, z_k) \, \Delta s_k$$

نجمع الشغل على جميع اجزاء المنحني ونحصل على

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \underline{T}(x_k, y_k, z_k) \, \Delta s_k$$

وكعادتنا في هذه المجاميع ، نحسب النهاية عندما $\|P\| \to 0$ لنحصل على التكامل

$$W = \int_C F(x_k, y_k, z_k) \cdot \underline{T}(x_k, y_k, z_k) \, ds \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

وهو مقدار الشغل المبذول على الجسم في اثناء حركته على المنحني C . وهذا يحفزنا لتقديم التعريف التالي .

<u>تعريف (15.9)</u> افرض $\underline{F}$ حقلا متجها متصلا على منحن ممهد موجه C . فان تكامل $\underline{F}$ على C ، ويسمى <u>تكاملا على الخطوط</u> ، رمزه $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ يعرف كما يلي

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_C \underline{F}(x, y, z) \cdot \underline{T}(x, y, z) \, ds \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

حيث $\underline{T}(x, y, z)$ هو متجه وحدة المماس بالنسبة الى التوجيه المفروض للمنحني C .

فاذا كانت $\underline{F}$ تمثل قوة تؤثر على جسم ما يتحرك على C ... الخ فان الشغل المبذول من قبل هذه القوة على الجسم عندما يتحرك على C هو

$$W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

ملاحظة : التكامل على الخطوط في التعريف (15.8) لا يحتاج الى ان يكون C موجها، بينما في التعريف(15.9) يجب ان يكون موجها .

والتكامل $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ يعتمد على توجه C وليس على مَعْلَمة خاصة . وتغير التوجه يؤدي الى سالب قيمة التكامل الذي نحسبه .

من اجل حساب التكامل في التعريف السابق ، افرض

$$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$$

هي مَعْلَمَة ممهدة للمنحني C على [a , b] التي تؤدي الى توجه معين للمنحني .

$$\underline{T}(x(t),y(t),z(t)) = \frac{d\underline{r}/dt}{\| d\underline{r}/dt \|}$$

لذلك

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_C [\underline{F}(x(t),y(t),z(t)) . \frac{d\underline{r}/dt}{\| d\underline{r}/dt \|}] \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| dt$$

$$= \int_C \underline{F}(x(t),y(t),z(t)) . \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt$$

او

$$= \int_a^b \underline{F}(x(t),y(t),z(t)) . \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt \qquad \ldots\ldots \qquad (20)$$

وهذه هي الصيغة التي نستعملها لحساب هذا التكامل .

مثال(15.12) جسيم يتحرك على لولب دائري C_1 معلمته هي

$$\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + t\,\underline{k} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

انظر الشكل (15.9). تؤثر عليه قوة

$$\underline{F}(x,y,z) = -z\,y\,\underline{i} + z\,x\,\underline{j} + x\,y\,\underline{k}$$

احسب مقدار الشغل المبذول من قبل هذه القوة

الحل :

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + \underline{k}$$

من (20) نجد ان

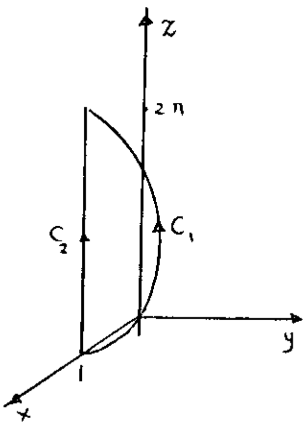
$$\int_{C_1} F \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(x(t),y(t),z(t)) . \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-t \sin t\,\underline{i} + t \cos t\,\underline{j} + \sin t \cos t\,\underline{k}) . (-\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + \underline{k})\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t \sin^2 t + t \cos^2 t + \sin t \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t + \sin t \cos t)\, dt$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\sin^2 t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2$$



الشكل(15.9)

مثل (15.13) احسب الشغل المبذول على الجسيم نفسه في اثناء حركته على المنحني C_2 الذي معلمته

$$\underline{r}(t) = \underline{i} + t\,\underline{k} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

واذا القوة كما في المثل السابق .

الحل :

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{k}$$

$$W = \int_{C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} (0\,\underline{i} + t\,\underline{j} + 0\,\underline{k}) \cdot \underline{k}\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$

وهذان المثلان يوضحان اعتماد التكامل على المنحني الذي يسلكه الجسيم .

وبما ان توجّه منحن $-C$ هو ، بالتعريف ، عكس توجه C ، فان

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = - \int_{-C} \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

(بالتالي فان $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{-C} \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$)

صيغ اخرى للتكامل على الخطوط

اذا

$$\underline{F} = M\,\underline{i} + N\,\underline{j} + P\,\underline{k}$$

حقل متجه متصل على منحن ممهد موجه C مَعْلَمَته

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k} \quad , \quad a \le t \le b$$

فان

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_a^b \underline{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt$$
$$= \int_a^b [M(x(t), y(t), z(t))\,\underline{i} + N(x(t), y(t), z(t))\,\underline{j}$$
$$+ P(x(t), y(t), z(t)\,\underline{k}] \cdot [\frac{dx}{dt}\,\underline{i} + \frac{dy}{dt}\,\underline{j} + \frac{dz}{dt}\,\underline{k}]\, dt$$
$$= \int_a^b [M(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + N(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt}$$
$$+ P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt}]\, dt$$

ونكتبها اختصارا كما يلي

$$= \int_a^b M(x,y,z)\,dx + N(x,y,z)\,dy + P(x,y,z)\,dz \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

أو

$$= \int_a^b M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

مثل (15.14) افرض C هو المنحني التكعيبي الملتوي

$$\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k} \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

احسب
$$\int_C xy\,dx + 3z\,x\,dy - 5x^2 y\,z\,dz$$

الحل : بما ان $x(t) = t$ فان $\frac{dx}{dt} = 1$

$y(t) = t^2$ فان $\frac{dy}{dt} = 2t$

$z(t) = t^3$ فان $\frac{dz}{dt} = 3t^2$

لذلك
$$\int_C xy\,dx + 3z\,x\,dy - 5x^2 yz\,dz$$
$$= \int_0^1 (t^3 + 6t^5 - 15t^9)\,dt$$
$$= \left(\frac{t^4}{4} + t^6 - 1.5t^{10}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

ومن (22) نكتب ثلاث حالات خاصة :

(أ) $\underline{F} = M\underline{i}$ ، $0 = P = N$ ، لذلك $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_C M\,dx$

(ب) $F = N\underline{j}$ ، $0 = P = M$ ، لذلك $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_C N\,dy$

(جـ) $F = P\underline{k}$ ، $0 = N = M$ ، لذلك $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_C P\,dz$

مثل (15.15) اذا C دائرة الوحدة في مستوى xz

$$\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{k} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

احسب
$$\int_C (y - z)\,dx$$

الحل : $x(t) = \cos t$ اي ان $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ ، لذلك من (أ) اعلاه

$$\int_C (y - z)\,dx = \int_0^{2\pi} (0 - \sin t)(-\sin t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$

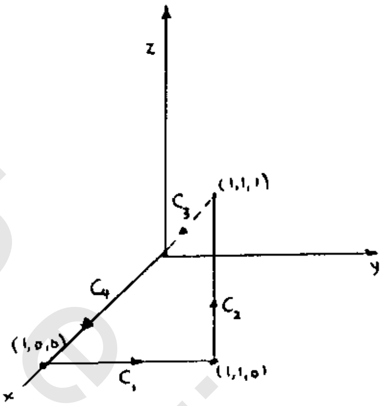
اما اذا المنحني C ممهد اجزاء ومؤلف من C_1 ، C_2 ، .... ، C_n ، فان التكامل على C سيكون مجموع التكاملات على C_k ، أي أن

$$\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} \underline{F}\cdot d\underline{r} \qquad \ldots\ldots \qquad (23)$$

مثل (15.16) افرض C مؤلفا من C_1 ، C_2 ، C_3 كما في الشكل (15.10) . احسب التكامل .

$$\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

كذلك احسب التكامل نفسه على C_4



الشكل(15.10)

الحــل : معلمة المنحنيات كما في الشكل هي

C_1 : $\underline{r}(t) = \underline{i} + t\underline{j}$; $0 \le t \le 1$

$$\frac{dy}{dt} = 1 \;,\; \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

C_2 : $\underline{r}(t) = \underline{i} + \underline{j} + t\underline{k}$; $0 \le t \le 1$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0 \;,\; \frac{dz}{dt} = 1$$

C_3 : $\underline{r}(t) = (1-t)\underline{i} + (1-t)\underline{j} + (1-t)\underline{k}, 0 \le t \le 1$

$$\frac{dx}{dt} = -1 = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

C_4 : $\underline{r}(t) = (1-t)\underline{i}$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \;,\; \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

لذلــك

$$\int_{C_1} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^1 (0+0+0)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$$

$$\int_{C_2} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^1 (t.0 + t.0 + 1.1)\,dt = \int_0^1 dt = 1$$

$$\int_{C_3} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^1 [(1-t)^2(-1) + (1-t)^2(-1) + (1-t)^2(-1)]dt$$

$$= -3\int_0^1 (1-t)^2 dt = (1-t)^3\Big|_0^1 = -1$$

بينما

$$\int_{C_4} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int_0^1 (0+0+0)\,dt = 0$$

لذلك التكامل على $C_3 \cup C_2 \cup C_1 = C$ يؤدي الى

$$\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0 + 1 + (-1) = 0$$

وعودة الى (22) ، فان التكامل على منحن في مستوى xy (نعاملـــه كمنحـــن فضائي) يؤدي الى الصيغة

$$\int_C \underline{F}\,.\,d\underline{r} = \int_{C} M(x,y)dx + N(x,y)dy =$$

$$= \int_a^b [M(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + N(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}]dt$$

مثل (15.17) افرض C الدائرة $x^2 + y^2 = 9$ موجها ضد عقارب الساعة ، احســـب

$$\int_C y\,dx + xy\,dy$$

الحــل : $\underline{r}(t) = 3\cos t\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t \;,\; \frac{dy}{dt} = 3\cos t$$

$$\int_C y\,dx + xy\,dy = \int_0^{2\pi} [3\sin t(-3\sin t) + 9\sin t\cos t(3\cos t)]\,dt$$
$$= 9\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 3\cos^2 t\sin t)\,dt$$
$$= 9\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} + 3\cos^2 t\sin t\right)dt$$
$$= 9\left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t - \cos^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -9\pi$$

تمارين (15.2)

للتمارين (1) - (8) احسب التكاملات

(1) $\int_C (9 + 8y^{1/2})\,ds$ ، C منحن مَعْلَمته : $\underline{r}(t) = 2t^{3/2}\,\underline{i} + t^2\,\underline{j}\,,\ 0 \le t \le 1$

(2) $\int_C (3y^2 + 2x)\,ds$ ، C منحن مَعْلَمته : $\underline{r}(t) = t^2\,\underline{i} + t^3\,\underline{j}\,,\ 0 \le t \le 1$

(3) $\int_C y\,ds$ ، C منحن مَعْلَمته : $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + t^3\,\underline{j}\,,\ -1 \le t \le 0$

(4) $\int_C (x^3 - y^3)\,ds$ ، C منحن مَعْلَمته : $\underline{r}(t) = \cos^3 t\,\underline{i} - \sin^3 t\,\underline{j}\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(5) $\int_C 2xyz\,ds$ ، C منحن مَعْلَمته : $\underline{r}(t) = e^t\,\underline{i} + e^{-t}\,\underline{j} + \sqrt{2}\,t\,\underline{k}\,,\ 0 \le t \le 1$

(6) $\int_C (x + z^2)\,ds$ ، C مَعْلَمته : $\underline{r}(t) = \log t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j} + 2t\,\underline{k}\,,\ 1 \le t \le 2$

(7) $\int_C \left(1 + \frac{9}{4}z^{2/3}\right)ds$ ، C مَعْلَمته $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + t^{3/2}\,\underline{k}\,,\ 0 \le t \le \frac{20}{3}$

(8) $\int_C (y + 2z)\,ds$ ، C مثلث رؤوسه ابتداء من (-1,0,0) الى (0,1,0) ثم الى (0,0,1) ثم الى (-1,0,0) .

للتمارين (9) - (14) احسب $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ كما هو مبين المَعْلَمة $\underline{r}(t)$

(9) $\underline{F}(x,y,z) = z\,\underline{i} - y\,\underline{j} - x\,\underline{k}$ ، $\underline{r}(t) = 5\,\underline{i} - \sin t\,\underline{j} - \cos t\,\underline{k}\,,\ 0 \le t \le \pi/4$

(10) $\underline{F}(x,y,z) = -z\,\underline{i} + x\,\underline{k}$ ، $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{k}\,,\ 0 \le t \le \pi$

(11) $\underline{F}(x,y,z) = -z\,\underline{i} + x\,\underline{k}$ ، $\underline{r}$ مَعْلَمة منحني التمرين (10) في الاتجاه المعاكس

(12) $\underline{F}(x,y,z) = y\,\underline{i} + x\,\underline{j} + z^3\,\underline{k}$ ، $\underline{r}(t) = (1 - t)\,\underline{i} + t\,\underline{j} + \pi t\,\underline{k}\,,\ 0 \le t \le 1$

(13) $\underline{F}(x,y,z) = y\,\underline{i} + xy\,\underline{j} + z^3\,\underline{k}$ ، $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + 2t\,\underline{k}\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

(14) $\underline{F}(x,y,z) = xy\,\underline{i} + 2z\,\underline{j} + (y+z)\,\underline{k}$ ،

(أ) C مؤلف من قطع مستقيمة من (0,C,0) الى (0,-,0) ثم الى (1,1,2) .

(ب) C مؤلف من قطع مستقيمة من (0,0,0) الى (0,1,1) ثم الى (1,1,2) .

(جـ) C هو منحني قطع مكافيء معلمته $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + t\,\underline{j} + 2t^2\,\underline{k}\,,\ 0 \le t \le 1$

للتمارين (15) - (22) احسب التكاملات

(15) $\int_C 2y^2\,dx+2xy\,dy$ ، C مَعْلَمَته $\mathbf{r}(t) = 9t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \;,\; 0 \le t \le 1$

(16) $\int_C 9x^2y\,dx - 11xy^2\,dy$ ، C مَعْلَمَته $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \;,\; 0 \le t \le 1$

(17) $\int_C y\,dx - x\,dy + xy\,z^2\,dz$ ، C مَعْلَمَته $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\,\mathbf{i} + e^{t}\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \;,\; 0 \le t \le 1$

(18) $\int_C e^x dx + xy\,dy + xy\,z\,dz$ ، C مَعْلَمَته $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k} \;,\; -1 \le t \le 1$

(19) $\int_C xy\,dx + (x+z)\,dy + z^2\,dz$ ، C مَعْلَمَته $\mathbf{r}(t) = (t+1)\,\mathbf{i} + (t-1)\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \;,\; -1 \le t \le 2$

(20) $\int_C y(x^2+y^2)\,dx - x(x^2+y^2)\,dy + xy\,dz$ ، C مَعْلَمَته

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \;,\; -\pi \le t \le \pi$$

(21) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ ، C مؤلف من

(أ) قطع مستقيمة تصل بين (0,0,0) ، (0,-5,0) وبين (0,-5,0) ، (0,1,1) .

(ب) قطع مستقيمة تصل بين (0,0,0) ، (1,0,0) وبين (1,0,0) ، (0,1,1) .

(22) $\int_C (xy + z)\,ds$ ، C احد المنحنيين :

(أ) C مَعْلَمَته $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \;,\; 0 \le t \le \frac{1}{2}$

(ب) C مَعْلَمَته $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k} \;,\; 0 \le t \le \frac{\pi}{6}$

(23) افرض $\|\mathbf{F}(x,y,z)\| \le M$ لجميع (x,y,z) من نقاط C ، وان L طول C .
اثبت ان $\left|\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\right| \le ML$

(24) افرض ان كثافة سلك في اي نقطة من نقاطه تساوي مربع المسافة من تلك النقطة الى محور x . اذا السلك لولبي معلمته $\mathbf{r}(t)=\sin t\,\mathbf{i}-\cos t\,\mathbf{j}+4t\,\mathbf{k}$ ، $\pi \le t \le 2\pi$ جد كتلة السلك .

(25) جد الشغل المبذول من القوة $\mathbf{F}(x,y)=(x+2y)\,\mathbf{i} + (6y-2x)\,\mathbf{j}$ تؤثر على جسم يتحرك على مثلث باتجاه ضد عقارب الساعة رؤوسه (1,1) ، (3,1) ، (3,2) .

(26) جد الشغل المبذول من القوة $\mathbf{F}(x,y) = 2xy\,\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ تؤثر على جسم يتحرك على منحن ممهد اجزاء مؤلف من قطعتي مستقيم من (2 , -2) الى (0 , 0) ومن (0 , 0) الى (3 , 2) .

(27) جد الشغل المبذول من القوة $\mathbf{F}(x,y) = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ على جسم يتحرك ضد عقارب الساعة على الدائرة $x^2 + y^2 = 9$.

(28) اذا القوة $\mathbf{F} = c\mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|^3$ ، c ثابت $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ جد الشغل المبذول على جسم يتحرك على المستقيم من (1,1,1) الى (3,3,3) .

(15.3) المبرهنة الاساسية للتكامل على الخطوط / الاستقلال عن المسار

نقدم اولا ما يماثل المبرهنة الاساسية للتكامل (انظر البند 5.5) في حال التكامل على الخطوط ، والمنحني المقصود هو منحن موجه وممهد اجزاء .

مبرهنة (15.10) افرض C منحنيا موجها يبدأ من النقطة (x_0,y_0,z_0) وينتهي بالنقطة (x_1,y_1,z_1) . اذا $f(x,y,z)$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط منطقة مفتوحة Ω تحوي المنحني C ، واذا f متصل على فان

$$\int_C \nabla f \cdot d\underline{r} = f(x_1,y_1,z_1) - f(x_0,y_0,z_0) \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

هذه هي المبرهنة الاساسية للتكامل على الخطوط . وتؤكد على ان التكامل يعتمد ، حسب منطوقها ، على قيمة الاقتران في نقطتي البداية والنهاية .

البرهان : افرض C ممهدا ، فاذا $\underline{r}$ مَعْلَمَته الممهدة على $[a,b]$ ، فانه حسب المعادلة (20) من البند السابق وقاعدة السلسلة والمبرهنة الاساسية للتكامل

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla f \cdot d\underline{r} &= \int_a^b [\nabla f(x(t),y(t),z(t))] \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\,dt \\
&= \int_a^b \Big[\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} \\
&\qquad + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\Big]dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}[f(x(t),y(t),z(t))]\,dt \\
&= f(x(b),y(b),z(b)) - f(x(a),y(a),z(a)) \\
&= f(x_1,y_1,z_1) - f(x_0,y_0,z_0)
\end{aligned}$$

اما اذا C ممهد اجزاء فانه يمكن برهنة هذه العبارة على كل جزء ممهد ، وبعدها نجمع التكاملات فنحصل على النتيجة .

واذا حقل متجه متصل $\underline{F}$ هو تدريج اقتران ما f فان

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_C \nabla f \cdot d\underline{r} = f(x_1,y_1,z_1) - f(x_0,y_0,z_0)$$

مما يعني انه من الاهمية ان نجد جهد الحقل $\underline{F}$ وهو f (في حال وجوده)

مثل (15.18) افرض C المنحني الواصل بين $(1,-1,-\frac{1}{2})$ ، $(1,1,\frac{1}{2})$ حسب المعلمة

$$\underline{r}(t) = -\cos \pi t^4\, \underline{i} + t^{5/3}\, \underline{j} + \frac{1}{t^2+1}\, \underline{k} \quad , \quad -1 \le t \le 1$$

واذا

$$\underline{F}(x,y,z) = (2xy + z^2)\,\underline{i} + x^2\,\underline{j} + (2xz + \pi\cos \pi z)\,\underline{k}$$

احسب $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$

<u>الحل</u> : يمكن حساب الجهد f لهذا الحقل ، وهو (انظر المثل 15.7)

$$f(x,y,z) = x^2y + xz^2 + \sin\pi z$$

لذلك

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = f(1,1,\tfrac{1}{2}) - f(1,-1,-\tfrac{1}{2})$$

$$= (1 + \tfrac{1}{4} + 1) - (-1 + \tfrac{1}{4} - 1) = 4$$

مثل (15.19) وجدنا في البند (15.1) ان جهد حقل الجاذبية $\underline{F}$ هو

$$f(x,y,z) = \frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{Gm}{\|\underline{r}\|}$$

حيث

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{Gm}{\|\underline{r}\|^3}\,\underline{r}$$

لذلك الشغل المبذول من القوة $\underline{F}$ على جسم كتلته وحدة واحدة يتحرك على منحنى ممهد C من (1,-2,3) الى (1,0,0) هو

$$w = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = f(1,0,0) - f(1,-2,3)$$

$$= Gm - \frac{Gm}{(1+4+9)^{1/2}} = Gm\,(1 - \frac{1}{\sqrt{14}})$$

وفي حال اقترانات (وحقول متجهة) في متغيرين فان

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_C \nabla f \cdot d\underline{r} = f(x_1,y_1) - f(x_0,y_0)$$

حيث $\underline{F} = \nabla f$.

مثل (15.20) افرض C منحنيا مَعْلَمته $0 \le t \le 2\ ,\ \underline{r}(t) = t\underline{i} + (t^2+1)\underline{j}$

وافرض $\underline{F}(x,y) = y^3\underline{i} + 3xy^2\underline{j}$ ، احسب $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$.

<u>الحل</u> : نجد ان $f(x,y) = xy^3$ حيث $\underline{F} = \nabla f$ لذلك

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = f(2,5) - f(0,0) = 2.5^3 - 0 = 250$$

<u>الاستقلال عن المسار</u>

وجدنا في بعض الامثلة والتمارين ان قيمة التكامل $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ قد تعتمد على المنحني C ، على ان هناك حالات لا تعتمد فيها قيمة التكامل على المنحني C بل على نقطتي البداية والنهاية ، وهذه هي حالات الاستقلال عن المسار .

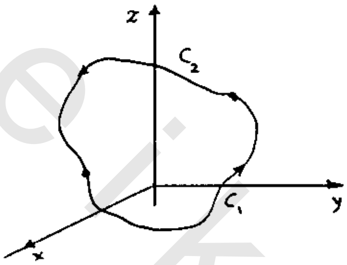
تعريف (15.11) افرض $\underline{F}$ حقلا متجها متصلا على D ، واذا

$$\int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

لاي منحنيين موجهين C_1 ، C_2 في D بالتوجه نفسه يصلان بين نقطتين مفروضتيــــن ،
فان التكامل $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ يكون تكاملا مستقلا عن المسار .

وحسب المبرهنة الاساسية (15.11) فانه اذا $\underline{F}$ حقل متجه متصل ، واذا $\underline{F} = \nabla f$
لاقتران f فان $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ مستقل عن المسار .

ولذلك اذا كان $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ مستقلا عن المسار لاي منحن موجه في منطقة المجال D ،
واذا C منحن مغلق فان $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$. اذ انه يمكن قسمة C الى منحنيين C_1 ، C_2 .
انظر الشكل (15.11) . لذلك



$C = C_1 \cup C_2$

الشكل (15.11)

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} + \int_{C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

$$= \int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} - \int_{-C_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$$

والشروح السابقة تسمح لنا ان نقول ان
الشروط الثلاثة التالية متكافئة

(i) $\underline{F} = \nabla f$ لاقتران ما f ... اي ان $\underline{F}$ محافظ .

(ii) $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$ لاي منحن موجه مغلق يقع في مجال $\underline{F}$.

(iii) $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ مستقل عن المسار .

كما ان الشرط الاول يؤدي الى شرط رابع هو

(iv) $\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$

وفي مجال اتصالي فان الشرط (iv) يتضمن الشرط (i) . لذلك تكون الشروط
الاربعة متكافئة .

حفظ الطاقة

افرض جسما يتحرك على منحن C ممهد له المعلمة

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} \ , \quad a \le t \le b$$

اذا $\underline{F}$ قوة متصلة تؤثر على الجسم فاننا نكتب

$$\underline{F}(\underline{r}(t))$$

$$F(\underline{r}(t)) = \underline{F}(x(t), y(t), z(t))$$

من قانون نيوتن الثاني

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = m\underline{a}(t) = m\underline{r}''(t) \ , \quad a \le t \le b$$

والشغل المبـــذول

$$w = \int_{c} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{a}^{b} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\,dt = \int_{a}^{b} m\,\underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t)\,dt$$

$$= \frac{m}{2} \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} [\underline{r}'(t) \cdot \underline{r}'(t)]\,dt = \frac{m}{2} \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} \|\underline{r}'(t)\|^2\,dt$$

$$= \frac{m}{2} \|\underline{r}'(t)\|^2 \Big|_{a}^{b} = \frac{m}{2} \|\underline{r}'(b)\|^2 - \frac{m}{2} \|\underline{r}'(a)\|^2 \quad \ldots\ldots (25)$$

والمقدار $\frac{m}{2} \|\underline{r}'(t)\|^2$ لاي $t \in [a,b]$ يسمى الطاقة الحركية للجسم والمعادلة (25) تقول ان الشغل المبذول من قوة على جسم تساوي الفرق في الطاقة الحركية للجسم بين طرفي المنحني .

فاذا $\underline{F}$ قوة محافظة فانه يوجد اقتران f بحيث ان $-\nabla f = \underline{F}$ (واشارة السالب لتتوافق مع المعطيات في الفيزياء) . نسمي f طاقة الوضع للجسم بسبب $\underline{F}$. ويتبع من ذلك .

$$\frac{d}{dt} f(\underline{r}(t)) = \frac{df}{dt} (x(t), y(t), z(t))$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \underline{i} + \frac{dy}{dt} \underline{j} + \frac{dz}{dt} \underline{k}\right)$$

$$= \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)$$

وعلى هذا فان

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2} \|\underline{r}'(t)\|^2 + f(\underline{r}(t))\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2} \underline{r}'(t) \cdot \underline{r}'(t) + f(\underline{r}(t))\right]$$

$$= m\,\underline{r}''(t) \cdot \underline{r}'(t) + \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)$$

$$= [m\,\underline{r}''(t) + \nabla f(\underline{r}(t))] \cdot \underline{r}'(t)$$

$$= [m\,\underline{r}''(t) - \underline{F}(\underline{r}(t))] \cdot \underline{r}'(t)$$

$$= \underline{0} \cdot \underline{r}'(t) = 0$$

لذلك عندما نكامل

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2} \|\underline{r}'(t)\|^2 + f(\underline{r}(t))\right] = 0$$

نحصل على

$$\frac{m}{2} \|\underline{r}'(t)\|^2 + f(\underline{r}(t)) = C \qquad \ldots\ldots \qquad (26)$$

لثابت ما C . وتسمى المعادلة (26) قانون حفظ الطاقة في الميكانيكا النيوتونية .

تمارين (15.3)

للتمارين (1) - (12) اثبت ان التكامل المفروض مستقل عن المسار ، احسب هذا التكامل بطريقتين : (أ) جد f بحيث ان $\underline{F} = \nabla f$

(ب) باختيار منحن ممهد يصل بين النقطتين

$$\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2 dx + y^2 dy \qquad (1)$$

$$\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\, dx + x^2 dy \qquad (2)$$

$$\int_{(1,0)}^{(3,2)} (x + 2y)\, dx + (2x - y)\, dy \qquad (3)$$

$$\int_{(0,0)}^{(\frac{\pi}{2},0)} \cos x \cos y\, dx + (1 - \sin x \sin y)\, dy \qquad (4)$$

$$\int_{(4,1)}^{(4,4)} \frac{-y\, dx + x\, dy}{y^2} \qquad (5)$$

$$\int_{(1,0)}^{(3,4)} \frac{x\, dx + y\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (6)$$

$$\int_{(0,0)}^{(2,8)} (y^3 + 3x^2 y)\, dx + (x^3 + 3y^2 x + 1)\, dy \qquad (7)$$

$$\int_{(-2,0)}^{(1,0)} (2x - y \sin xy - 5y^4)\, dx - (20xy^3 + x \sin xy)\, dy \qquad (8)$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,4,8)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz \qquad (9)$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2x\,dx + 3y^2 dy + 4z^3 dz \qquad (10)$$

$$\int_{(1,1,\ln 3)}^{(2,2,\ln 3)} e^{2z} dx + 3y^2 dy + 2xe^{2z} dz \qquad (11)$$

$$\int_{(-2,3,1)}^{(0,0,0)} 2xz\,dx + 2yz\,dy + (x^2 + y^2)\, dz \qquad (12)$$

للتمارين (13) - (17) اثبت ان التكامل المفروض مستقل عن المسار ، احسب التكامل ،

(13) $\int_C y\,dx + (x+z)\,dy + y\,dz$ ، C معلمته $\underline{r}(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}\underline{i} + \cos\pi t\, \underline{j} + 2t \sin\pi t\, \underline{k}$ ، $0 \le t \le \frac{1}{2}$.

(14) $\int_C (\cos x + 2y z)\, dx + (\sin y + 2xz)\, dy + (z + 2xy)\, dz$ ، C ممهد اجزاء يصل بين $(0,0,0)$ ، $(\pi, \pi, \frac{1}{\pi})$.

(15) $\int_C \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ ، C معلمته $0 \le t \le 1$, $\underline{r}(t) = t\underline{i} + t^2\underline{j} + t^4\underline{k}$

(16) $\int_C (y + z\,x\,e^y)\,dx + (x + x^2 e^y\,dy)$ ، C معلمته $1 \le t \le 4$, $\underline{r}(t) = t^{\frac{1}{2}}\underline{i} + \log t\,\underline{j} + t\,\underline{k}$

(17) $\int_C e^{-x} \ln y\,dx - \frac{e^{-x}}{y}dy + z\,dz$ ،C معلمته $0 \le t \le 1$, $\underline{r}(t) = (t-1)\underline{i} + e^{t^4}\underline{j} + (t^2+1)\underline{k}$

(18) اذا $\underline{F}(x,y,z) = 8xy^3z\,\underline{i} + 12x^2y^2z\,\underline{j} + 4x^2y^3\underline{k}$ تؤثر على جسم يتحرك على اللولب $\underline{r}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 2\sin t\,\underline{j} + t\,\underline{k}$ من $(2,0,0)$ الى $(1,\sqrt{3},\frac{\pi}{3})$. اثبت ان $\underline{F}$ محافظة واحسب الشغل المبذول من هذه القوة .

(19) اذا g اقتران متصل (لمتغير واحد) واذا

$$\underline{F}(x,y,z) = [9(x^2+y^2+z^2)](x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}) \equiv g(r^2)\underline{r} \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

(أ) اثبت ان $\underline{F}$ محافظة . (ارشاد : اثبت ان $\underline{F} = \nabla f$ حيث $f(x,y,z) = \frac{1}{2}h(x^2 + y^2 + z^2)$ وكذلك $h(u) = \int g(u)\,du$) .

(ب) اثبت ان $\underline{F}$ غير دورانية .

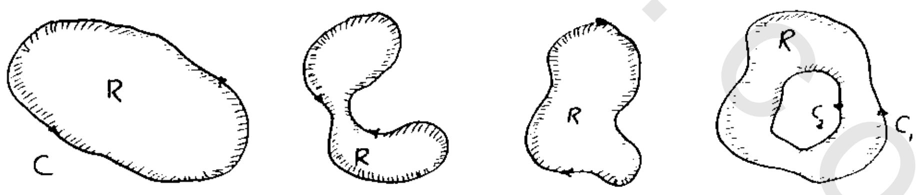
بما ان القوى المركزية صيغتها كما في (27) ، فان (أ)، (ب) يثبتان ان القوى المركزية محافظة لا دورانية .

(15.4) مبرهنة جرين

نقدم الآن نتيجة مهمة في التكامل ، تعتبر على مستوى الاهمية مع المبرهنة الاساسية في التكامل . واهميتها تأتي ايضا من تطبيقاتها في علم الموائع . كما ان تعميمها في ثلاثة ابعاد لها تطبيقات في الكهرباء والمغناطيسية ايضا .

وهذه المبرهنة تربط بين التكامل الثنائي على منطقة ما (ضمن شروط معينة) والتكامل على منحن مغلق يحد هذه المنطقة .

والمنطقة المغلقة يحدها منحن مغلق موجه . واتجاه المنحني موجب (أو ضد عقارب الساعة) اذا كان هذا الاتجاه يجعل المنطقة على شمال من يسير على هذا المنحني ، والا فالاتجاه سالب (أو مع عقارب الساعة) . انظر الشكل(15.12) .



اتجاه موجب   اتجاه سالب   اتجاه موجب   اتجاه موجب

المنحني $C = C_2 \cup C_1$ الشكل (15.12)

مبرهنة (15.12) افرض R منطقة في مستوى xy يحدها منحن ممهد بسيط مغلق C موجه بالاتجاه الموجب ، اذا M ، N ، $\frac{\partial M}{\partial y}$ ، $\frac{\partial N}{\partial x}$ متصلة في x,y على $C \cup R$ فان

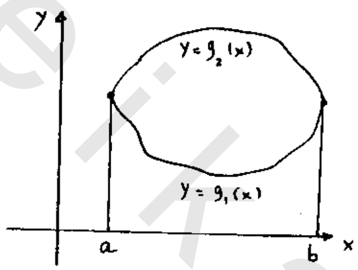
$$\oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

البرهان : برهان هذه النتيجة بشكل عام صعب ، وخارج حدود الكتاب ، لذلك نقدم برهانها لحالات بسيطة ، يمكن تعميمها لحالات اخرى .

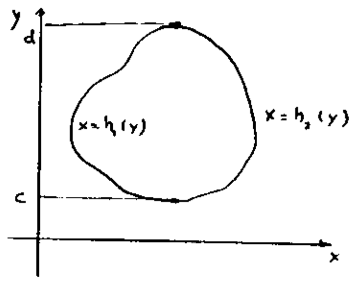
نبرهن (28) لمنطقة R من النوعين (I) ، (II) كما يلي (انظر الشكل 15.13)

R من النوع (I) يحدها $g_1(x) \le y \le g_2(x) \quad , \quad a \le x \le b$

R من النوع (II) يحدها $h_1(y) < x \le h_2(y) \quad , \quad c \le y \le d$



(ا) نوع (II)



(ب) نوع (I)

الشكل (15.13)

من (ا)

$$-\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} = -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx$$

$$= -\int_a^b [M(x,g_2(x)) - M(x,g_1(x))]\,dx$$

$$= \int_a^b M(x,g_1(x))\,dx + \int_b^a M(x,g_2(x))\,dx$$

$$= \oint_C M(x,y)\,dx \qquad (*)$$

كذلك من (ب)

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dz = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

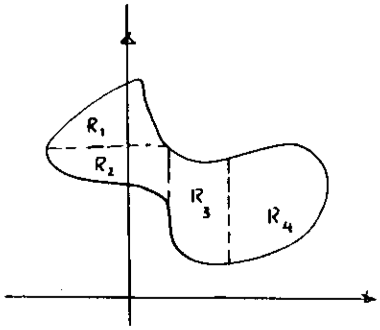
$$= \int_c^d [Q(h_2(y),y) - Q(h_1(y),y)]\,dy$$

$$= \int_c^d Q(h_2(y),y)\,dy + \int_d^c Q(h_1(y),y)\,dy$$

$$= \oint_C Q(x,y)\,dy \qquad (**)$$

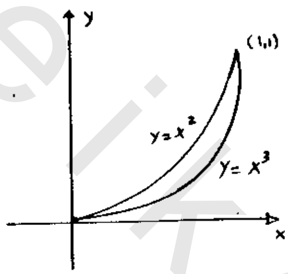
نجمع (*) ، (**) لنحصل على (28) .

وسنترك امتداد البرهان لمناطق اخرى للتمارين . كما ان مناطق مثل تلك في الشكل (15.14) تنطبق عليها مبرهنة جرين ، بعد تقسيمها الى عدة مناطق كل منها تتحقق فيها هذه المبرهنة .



الشكل(15.14)

مثل (15.21) احسب $\oint_C (x^2-y^2)\,dx+(2y-x)\,dy$ والمنحني C هو حدود المنطقة في الربع الاول يحدها $y=x^2$ ، $y=x^3$. انظر الشكل(15.15).



الشكل(15.15)

الحل : المنطقة R يحدها $y=x^2$ ، $y=x^3$ يتقاطعان في $(0,0)$ ، $(1,1)$.

افرض $M=x^2-y^2$ ، $N=2y-x$.طبق مبرهنة جرين

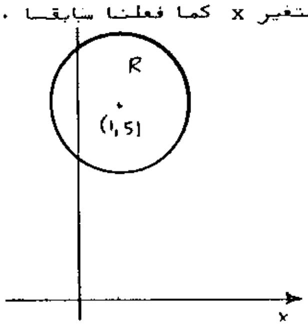
$$\oint_C (x^2-y^2)\,dx+)2y-x)\,dy=\iint_R (-1+3y)\,dA$$

$$=\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} (-1+2y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1 (-y+y^2)\Big|_{x^3}^{x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 (-x^6+x^4+x^3-x^2)\,dx=-\frac{11}{420}$$

كما انه يمكن حساب هذا التكامل باستعمال المتغير x كما فعلنا سابقا .



الشكل(15.16)

مثل (15.22) احسب $\oint_C (x^5+3y)\,dx+(2x-e^{y^3})\,dy$ والمنحني C هو الدائرة $(x-1)^2+(y-5)^2=4$.

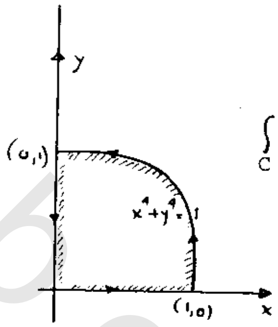
الحل : اذا $x^5+3y=M$, $2x-e^{y^3}=N$ طبق مبرهنة جرين

$$\oint_C (x^5+3y)\,dx+(2x-e^{y^3})\,dy=\iint_R (2-3)\,dA=\iint_R -dA$$

والتكامل هو لدائرة نصف قطرها 2 ، مساحتها 4π . لذلك

$$\oint_C (x^5+3y)\,dx+(2x-e^{y^3})\,dy=-4\pi$$

وهذا المثل يوضح قوة هذه المبرهنة في حساب التكامل . ويمكن للقارىء ان يتأمل مشكلات حساب هذا التكامل مباشرة كتكامل على المنحني C .



الشكل(15.17)

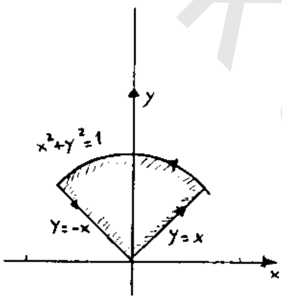
مثل (15.23) افرض C المنحني الموصوف في الشكل (15.17) .

احسب
$$\int_C 2y^3\,dx + (x^4 + 6y^2x)\,dx$$

الحل :
$$\int_C 2y^3\,dx + (x^4 + 6y^2x)\,dx = \iint_R (4x^3 + 6y^2 - 6y^2)\,dA$$
$$= \int_0^1 \int_0^{(1-x^4)^{1/4}} 4x^3\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 4x^3 (1 - x^4)^{1/4}\,dx$$
$$= -\frac{4}{5}(1 - x^4)^{5/4} = \frac{4}{5}$$

مثل (15.24) احسب الشغل المبذول من القوة $\underline{F} = (-16y + \sin x^2)\,\underline{i} + (4e^y + 3x^2)\,\underline{j}$ على جسيم يسير في منحن مغلق بسيط C كما في لشكل(15.18) .

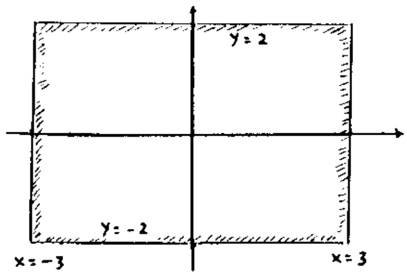
الحل :
$$w = \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$$
$$= \oint (-16y + \sin x^2)\,dx + (4e^y + 3x^2)\,dy$$
$$= \iint_R (6x + 16)\,dA$$



الشكل (15.18)

نحول هذا التكامل الى الصيغة القطبية لطبيعة المنطقة R

$$w = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 (6r\cos\theta + 16)\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2r^3\cos\theta + r^2)\Big|_0^1\,d\theta$$
$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2\cos\theta + 8)\,d\theta = 4$$

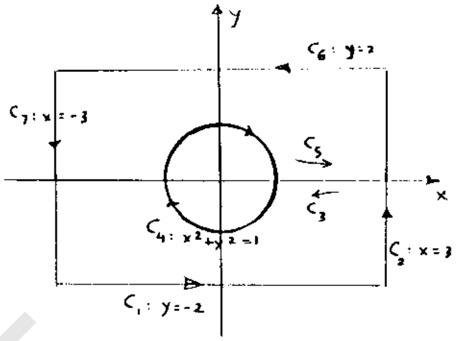


الشكل(15.19)

مثل(15.25) افرض C المنحني المغلق الذي يحد المستطيل R كما في الشكل (15.19) . احسب هل التكامل التالي موجود ؟

$$\oint_C \frac{x}{x^2 + 2y^2}dx + \frac{y}{x^2 + 2y^2}dy$$

الحل : لا تنطبق مبرهنة جرين لان M ، N ومشتقاتهما ليست متصلة في كل المنطقة (وبالذات عند(0,0)).



الشكل (15.20)

مثل (15.27) احسب التكامل التالي على المنطقة R كما في الشكل (15.20) ، وهي المستطيل ينقص منه دائرة وحدة .

$$\oint_C \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$$

حيث $C_7 \cup \ldots \cup C_2 \cup C_1 = C$

الحل : M ، N ومشتقاتهما متصلة على R ،

لذلك نطبق مبرهنة جرين

$$\oint_C \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = \iint_R \left[\frac{-2xy-(-2xy)}{(x^2+y^2)^2}\right] dA = 0$$

حساب المساحة باستعمال مبرهنة جرين

افرض ان $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$ في R التي يحدها C .... الخ ، فانه حسب مبرهنة جرين

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R dA = A(R)$$

اي مساحة R ، والمسالة هي اختيار M ، N لتحقيق ذلك ، ونقدم بعض الاختيارات

$$M(x,y) = 0 \quad , \quad N(x,y) = x$$

$$M(x,y) = -y \quad , \quad N(x,y) = 0$$

$$M(x,y) = -\frac{1}{2}y \; , \quad N(x,y) = \frac{1}{2}x$$

لذلك

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

مثل (15.28) احسب مساحة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الحل : نستعمل المنحني المغلق البسيط الموجه التالي للقطع الناقص

$$\underline{r}(t) = a\cos t\,\underline{i} + b\sin t\,\underline{j} \;, \quad 0 \le t \le 2$$

نستخدم

$$A = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos t\, b\sin t - b\sin t\,(-a\cos t)]\,dt$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

صيغ اخرى لمبرهنة جرين

نقدم فيما يلي صيغا اخرى لمبرهنة جرين ، وبعض التفسيرات التطبيقية .

افرض $\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j}$ حقلا متجها متصلا على منطقة بسيطة R في مستوى xy ، وان مدى $\underline{F}$ هو في مستوى xy ، وان حدود R هي المنحني البسيط المغلق الموجه ايجابيا C . عندئذ

$$\oint_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

بما أن

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\underline{k}$$

فان

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

وبما ان $\underline{T}\,ds = d\underline{r}$ ($\underline{T}$ مماس الوحدة)

لذلك تصير نتيجة مبرهنة جرين

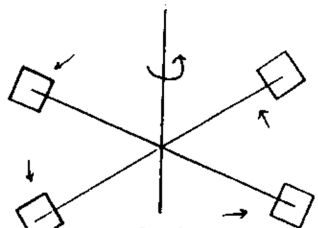
$$\oint_C \underline{F} \cdot \underline{T}\,ds = \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_R (\underline{\nabla} \times \underline{F}) \cdot \underline{k}\,dA \qquad \ldots\ldots \qquad (29)$$

وهذه هي الصيغة المماسية .

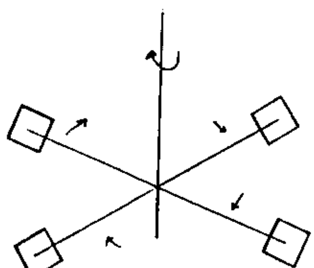
تعريف (15.13) نعرف كثافة الدوران لحقل متجه $\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j}$ عند (x,y) على انه

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

لذلك فالطرف الايسر في (29) يقيس دوران مائع غير انضغاطي . ولو فرضنا طبقة رقيقة من الماء تتحرك في مستوى xy ، فان الدوران عند $(x_\circ , y_\circ)$ هو طريقة لقياس سرعة دوران عجل مجدافي واتجاه دورانه (انظر الشكل (15.21))موضوع عند $(x_\circ, y_\circ)$ ومحوره عمود على مستوى xy .



$\underline{\nabla} \times \underline{F} > 0$



$\underline{\nabla} \times \underline{F} < 0$

الشكل (15.21)

وهناك صياغة اخرى مفيدة . فاذا فرضنا ان مَعْلَمة المنحني المغلق البسيط المُحْدق بالمنطقة R هي

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j}$$

فان وحدة المماس للمنحني C عند احدى نقاطه

$$\underline{T}(t) = \frac{x'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|}\,\underline{i} + \frac{y'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|}\,\underline{j}$$

والعمود المتجه للمنحني C عند تلك النقطة هو

$$\underline{n} = \frac{y'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|}\,\underline{i} - \frac{x'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|}\,\underline{j}$$

لذلك $\underline{n}$ يقع في مستوى xy معامدا للمماس $\underline{T}$ (متجها خارجا من المنطقة) . فاذا $\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j}$ حقل متجه

متصـل فـان

$$\oint_C \underline{F} \cdot \underline{n}\, ds = \int_a^b (\underline{F} \cdot \underline{n})(t)\, \|\underline{r}'(t)\|\, dt$$

$$= \int_a^b [M(x(t),y(t))\underline{i} + N(x(t),y(t))\underline{j}] \cdot \left(\frac{y'(t)\underline{i} - x'(t)\underline{j}}{\|\underline{r}'(t)\|}\right) \|\underline{r}'(t)\| dt$$

$$= \int_a^b [M(x(t),y(t))y'(t) - N(x(t),y(t))x'(t)]\, dt$$

$$= \oint_C M\, dy - N\, dx$$

لذلك من مبرهنة جريــن

$$\oint_C \underline{F} \cdot \underline{n}\, ds = \oint M(x,y)\, dx - N(x,y)\, dy$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_R \underline{\nabla} \cdot \underline{F}\; dA$$

أي أن

$$\oint_C \underline{F} \cdot \underline{n}\, ds = \iint_R \underline{\nabla} \cdot \underline{F}\, dA \qquad \ldots\ldots \qquad (30)$$

وهذه هي الصيغة الناظمية .

تعريف (15.14) نعرف كثافة التدفق لحقل متجه $\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j}$ عند (x,y) علــى انه

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

تعريف (15.15) نعرف التدفق خلال منحن مستو مغلــق على انه $\oint_C \underline{F} \cdot \underline{n}\, ds$

لذلك فـان (30) تعني ان التدفق خلال منحن مستو مغلق هو تكامل كثافة التدفــق علــى المنطقة التي يحيط بها هذا المنحني .

وهكذا نرى ان دوران $\underline{F}$ $(\underline{\nabla} \times \underline{F})$ يعرف كثافة دوران مائع ، بينما تباعــــد $\underline{F}$ $(\underline{\nabla} \cdot \underline{F})$ يقيس كثافة تدفق ذلك المائع في المنطقة نفسها .

ملاحظة تاريخية : صاحب هذه المبرهنة رياضي بريطاني جورج جرين(1793 – 1841) عَلَّمَ نفسه الرياضيات ، وحاول استخدامها في مسائل الكهربائية والمغناطيسية . ونشـــر على نفقته كتيبا " مقالة حول تطبيق التحليل في الكهرباء والمغناطيسية " عالجت مسائل التكاملات على الخطوط والسطوح . ثم فيما بعد ربط بينها وبين الشغل . ولـم يهتم الرياضيون بانجازاته الا بعد وفاته ، عندما نشر سنة 1850 وليم طومســون (اللورد كلفن فيما بعد) اعماله . ودخل جرين جامعة كامبردج كبيرا . لكنـه لـم

يعمر ليرى اهمية عمله ·

ولمبرهنة جرين امتدادات في ثلاثة ابعاد ندرسها بعد قليل ·

مثل (15.29) تحقق من الصيغتين (29) ، (30) عندما $\underline{F} = (x - y)\underline{i} + x\underline{j}$ والمنطقة R هي داخل دائرة الوحدة $C : \underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j}\ ,\ [0\ ,\ 2\pi]$

الحل : باستخدام المعلم t

$$M = x - y = \cos t - \sin t\ ,\ N = x = \cos t$$

$$dx = -\sin t\,dt \qquad ,\ dy = \cos t\,dt$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1\ ,\ \frac{\partial M}{\partial y} = -1\ ,\ \frac{\partial N}{\partial x} = 1\ ,\ \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \int_0^{2} [(\cos t - \sin t)(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t]dt \quad (29) \text{ من}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 1)dt = 2\pi$$

$$\iint_R \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{k}\,dA = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

$$= \iint_R 2dx\,dy = 2\pi$$

$$\oint_C M\,dy - N\,dx = \int_0^{2\pi} [(\cos t - \sin t)(\cos t) - \cos t(-\sin t)]dt \quad (30) \text{ من}$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi$$

$$\iint_R \underline{\nabla} \cdot \underline{F}\,dA = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dA = \iint_R (1 + 0)dA = \iint_R dx\,dy = \pi$$

تمارين(15.4)

للتمرينين (1) ، (2) تحقق من مبرهنة جرين بحساب التكامل لكلي التكاملين

$$\oint_C (x - y)dx + xy\,dy = \iint_R (y + 1)dA \qquad (1)$$

C مثلث رؤوسه (0,0) ، (1,0) ، (1,3) .

$$\oint_C -y^2 dx + x^2 dy = \iint_R (2x + 2y)dA \qquad (2)$$

C دائرة $x = 3\cos t\ ,\ y = 3\sin t\ ,[0,2\pi]$

للتمارين (3) - (12) استعمل مبرهنة جرين لتحسب التكاملات

(3) $\oint_C 2y\,dx + 5x\,dy$ ، C دائرة $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

(4) $\oint_C (x-3y)dx + (4x+y)dy$ ، C مستطيل رؤوسه (-2,2) ، (3,2) ، (2,0) ، (-2,0)

(5) $\oint_C (x^4-2y^3)\,dx + (2x^3-y^4)\,dy$ ، C دائرة $x^2 + y^2 = 4$

(6) $\oint_C e^{2x}\sin 2y\,dx + e^{2x}\cos 2y\,dy$ ، C قطع ناقص $9(x-1)^2 + 4(y-3)^2 = 36$

(7) $\oint_C 2xy\,dx + 3xy^2\,dy$ ، C مثلث رؤوسه $(2,4)$ ، $(2,2)$ ، $(1,2)$

(8) $\oint_C e^{x^2}\,dx + 2\tan^{-1} x\,dy$ ، C مثلث رؤوسه $(-1,1)$ ، $(0,1)$ ، $(0,0)$

(9) $\oint_C \frac{1}{3}y^3\,dx + (xy + xy^2)\,dy$ ، C المنطقة في الربع الاول يحدها $y = 0$ ، $x = y^2$ ، $x = 1 - y^2$.

(10) $\oint_C xy^2\,dx + 3\cos y\,dy$ ، المنطقة في الربع الاول يحدها $y = x^2$ ، $y = x^3$.

(11) $\oint_C e^x\sin y\,dx + e^x\cos y\,dy$ ، المنطقة في الربع الاول يحدها $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $[0,25]$.

(12) $\oint_C xy^2\,dx + (x^4 + x^2y\,dy)$ ، المنطقة يحدها $x^4 + y^4 = 1$.

للتمرينين (13) ، (14) احسب التكامل على أي منحن ممهد مغلق بسيط C

(13) $\oint_C ay\,dx + bx\,dy$ (14) $\oint_C P(x)\,dx + Q(y)\,dy$

للتمارين (15) - (17) استخدم مبرهنة جرين لتحسب المساحة المطلوبة

(15) المنطقة فوق محور x وتحت قوس واحد من الدوري الذي معلمته

$\underline{r}(t) = (t - \sin t)\underline{i} + (1 - \cos t)\underline{j}\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$

(16) المنطقة التي يحدها الدوري الفوقي الذي مَعْلمته

$\underline{r}(t) = a\cos^3 t\,\underline{i} + a\sin^3 t\,\underline{j}\ ,\ a > 0\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$

(17) المنطقة التي يحدها محور y والمستقيم $y = \frac{1}{4}$ ، والمنحني الذي معلمته

$\underline{r}(t) = \sin \pi t\,\underline{i} + t(1-t)\underline{j}\ ,\ 0 \le t \le \frac{1}{2}$

(18) اثبت مبرهنة جرين اذا المنطقة R كما في الشكل (15.22)

ارشاد : المنحني $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ والخطوات مماثلة للبرهان في المبرهنة

(19) اثبت مبرهنة جرين اذا المنطقة R هي نصف الدائرة كما في الشكل (15.23) .

(20) اثبت مبرهنة جرين اذا المنطقة هي نصف الحذوة R كما في الشكل (15.24) .

(21) اثبت مبرهنة جرين اذا المنطقة هي الحذوة R كما هي في الشكل (15.25) .

ارشاد : المنحني $C = C_1 \cup C_2$ كما في الشكل ، واستعمل التمرين (20) .

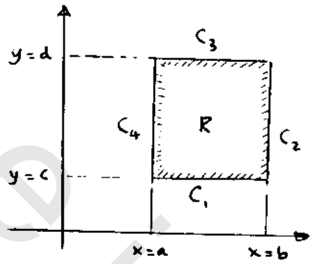
(22) تحقق من مبرهنة جرين اذا

$$\underline{F} = \frac{-y\,\underline{i} + x\,\underline{j}}{x^2 + y^2}$$

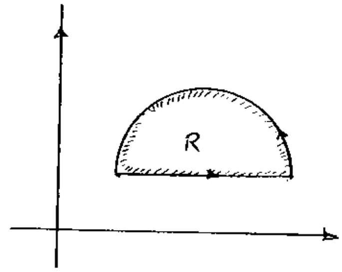
على المنطقة R المحصورة بين دائرتين $h^2 \le x^2 + y^2 \le 1$ حيث $0 < h < 1$.

انظر الشكل (15.26) .

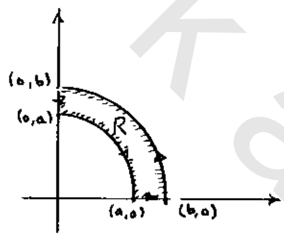
ارشاد : $C = C_h \cup C_1$ كما في الشكل . استعمل المعادلة (29) .



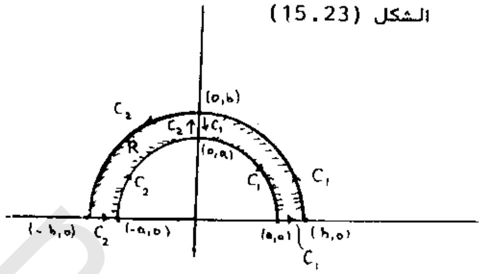
الشكل (15.22)



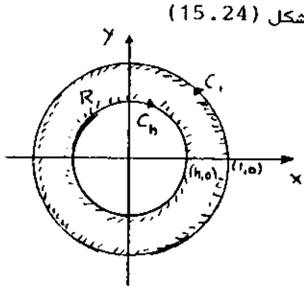
الشكل (15.23)



الشكل (15.24)



الشكل (15.25)



الشكل (15.26)

(23) (مبرهنة جرين ومعادلة لابلاس) افرض ان كل المشتقات المطلوبة متصلة . اثبت انه اذا f يحقق معادلة لابلاس $f_{xx} + f_{yy} = 0$ فان $\oint_C f_y\,dx - f_x\,dy = 0$ لجميع المنحنيات المغلقة C التي تحقق مبرهنة جرين . ومعكوس هذه العبارة صواب .

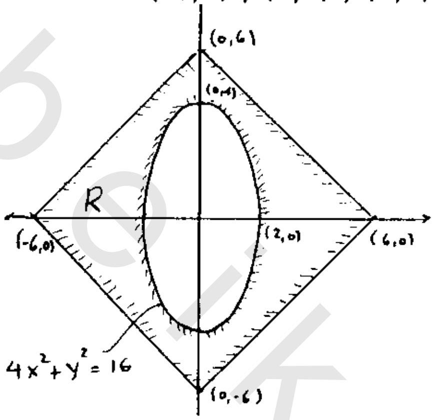
(24) (أ) اثبت أن $\int_C -y\,dx + x\,dy = x_1 y_2 - x_2 y_1$ اذا C هو قطعة المستقيم الواصل بين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) .

(ب) استعمل (أ) وحساب المساحة بمبرهنة جرين لتثبت ان المساحة A لمضلع رؤوسه (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، ... ، (x_n, y_n) والتسمية ضد عقارب الساعة هي

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \dots + \frac{1}{2}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n)$$

(جـ) استعمل (ب) لتحسب مساحة المضلع الرباعي الذي رؤوسه

$(-1,3)$, $(1,1)$, $(4,2)$, $(3,5)$



الشكل (15.27)

(25) احسب $\oint_C (\cos^2 x - 1)\,dx + \sqrt{y^2+1}\,dy$ على المنحني المغلق كما في الشكل (15.27).

(26) افرض f اقترانا على R^2 له مشتقات جزئية متصلة في المنطقة R . اثبت ان

$$\oint_C g(\underline{\nabla} f).\underline{n}\,ds = \iint_R [g\nabla^2 f + \underline{\nabla} g.\underline{\nabla} f]\,dA \quad ..(31)$$

تسمى (31) <u>مبرهنة جرين من الصيغة الاولى</u>.

(27) في المعادلة (31) غير f محل g ، و g محل f ثم اطرح المعادلتين الناتجتين لتحصل على

$$\oint_C [g(\underline{\nabla} f) - f(\underline{\nabla} g)].\underline{n}\,ds = \iint_R (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)\,dA \quad ...... \quad (32)$$

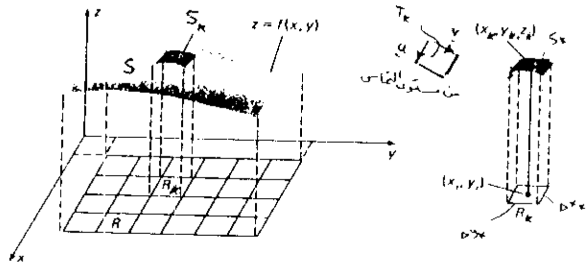
تسمى (32) <u>مبرهنة جرين من الصيغة الثانية</u> . والمعادلتان (31) ، (32) تسميان <u>متطابقتان جرين</u> .

(15.5) مساحة السطوح والتكاملات على السطوح

كيف نجد مساحة سطح ما ، معادلته (مثلا) $z = f(x,y)$ معرف على المجال R في مستوى xy ؟ لو كان هذا السطح دورانيا ، فان ايجاد مساحته ليس امرا صعبا ، وقد درسناه فيما مضى . لذلك نهتم بسطوح غير دورانية .

افرض كما في الشكل (15.28) تجزئة P للمنطقة R . وتقسم هذه التجزئة R الى مستطيلات R_k مساحة كل منها $A_k = \; x_k \;\; y_k$ تقع كليا في R . افرض $(x_k, y_k, 0)$ احدى نقاط R_k . نسقط ضلعي R_k الى اعلى على السطح S ، فيتكون الجزء المناظر ΔS_k ، ويتكون ايضا جزء مناظر ΔT_k على مستوى التماس عند $(x_k, y_k, f(x_k,y_k))$. وعندما تكون R_k صغيرة ، يمكن تقريب مساحة S_k (نسمّيها ΔS_k) بمساحة الجـزء

المناظر من مستوى التماس T_k (مساحته ΔT_k) .



(أ) (ب)

الشكل (15.28)

لايجاد ΔT_k ، نختار $(x_k, y_k, 0)$ عند احدى زوايا R_k كما في الشكل(15.28) ب.

وعندئذ يكون المتجهان $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ كما يلي

$$\underline{u} = \Delta x_k \underline{i} + f_x(x_k, y_k)\, \Delta x_k \underline{k}$$

$$\underline{v} = \Delta y_k \underline{j} + f_y(x_k, y_k)\, \Delta y_k \underline{k}$$

والمساحة ΔT_k هي

$$\Delta T_k = \|\underline{u} \times \underline{v}\|$$

وبما ان

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_k & 0 & f_x \;\; x_k \\ 0 & y_k & f_y \;\; x_k \end{vmatrix}$$

$$= [-f_x(x_k, y_k)\underline{i} - f_y(x_k, y_k)\underline{j} + \underline{k}]\Delta x_k \Delta y_k$$

فان

$$\Delta T_k = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\; \Delta x_k \Delta y_k$$

وعلى هذا يكون تقريب المساحة على النحو

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\; \Delta x_k \Delta y_k$$

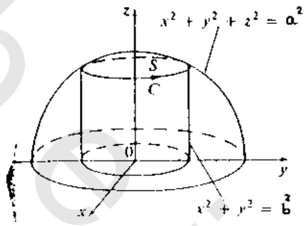
وعندما نحسب النهاية لهذا المجموع عندما $\|P\| \longrightarrow 0$ ، نحصل على التعريف التالي

<u>تعريف(15.16)</u> اذا السطح S معرف حسب $z = f(x,y)$ وهذا الاقتران له مشتقات جزئية

f_x ، f_y متصلة على منطقة مغلقة R ، فان مساحة السطح S على R هي

$$A(S) = \iint_R \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}\; dA \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

مثل (15.30) احسب مساحة ذلك الجزء من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ فوق مستوى xy وداخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = b^2$ ، $0 < b < a$.



$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

الشكل (15.29)

الحـل : عرف $z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$f_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ ,\quad f_x(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

عندها

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

والمساحة المطلوبة

$$A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, dA$$

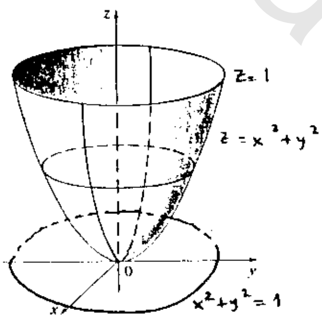
انظر الشكل (15.29) .

باستعمال الاحداثيات القطبية

$$A = a\int_0^{2\pi}\int_0^{b} (a^2-r^2)^{-1/2}\, r\,dr\,d\theta = a\int_0^{2\pi} [-(a^2-r^2)^{1/2}\Big|_0^b\, d\theta$$

$$= a(a - \sqrt{a^2-b^2})\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a\,(a - \sqrt{a^2-b^2})$$

مثل (15.31) جد مساحة السطح المحصور بين مستوى xy ، ومستوى $z = 1$ من المكافئي $z = x^2 + y^2$.



الشكل (15.30)

الحـل : $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ ، لذلـك

$$f_y = 2y\ ,\quad f_x = 2x$$

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}$$

$$A(S) = \iint_R \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\; dA$$

تحول الى الاحداثيات القطبية (انظر الشكل (15.30))

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sqrt{4r^2+1}\; r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\Big|_0^1\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1)\,d\theta = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$$

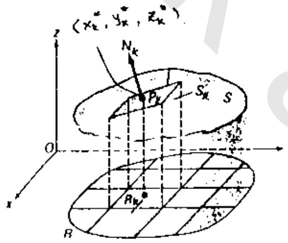
تعريف (15.17) نسمي الاقتران $dS = \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}$ تفاضلة المساحة السطحية .

التكاملات على السطوح

هذا هو النوع الثاني من التكاملات الجديدة التي ذكرناها في بداية هذا الباب . ويفيد هذا التكامل في ظواهر فيزيائية معينة ، كما انه مطلوب في تعميمين مهمين للمبرهنة الاساسية في التكامل : مبرهنة التباعد ، ومبرهنة ستوك . ومن ناحية تطبيقية ، لو فرضنا سطحا رقيقا من مادة ما ، كثافته في أي نقطة من نقاطه معلومة ، فاننا نحتاج الى التكامل على السطوح لحساب كتلته . ونقدم فيما يلي الخطوات التي تؤدي الى هذه التكاملات .

(1) افرض $w = G(x,y,z)$ ، G معرف في منطقة ما في ابعاد ثلاثة تحوي السطح S الذي معادلته $z = f(x,y)$.

افرض R هو مسقط S على مستوى xy . وقد يكون R من النوع الأول أو الثاني (انظر اثبات مبرهنة جرين) . وانظر الشكل (15.31) .



الشكل (15.31)

(2) اقسم السطح الى n من الاجزاء (السطوح المصغرة) S_k مساحة كل منها ΔS_k مناظرة الى تجزئة P مفروضة على R قسمت R الى مستطيلات R_k مساحة احدها ΔA_k .

(3) اذا $\|P\|$ هو مقياس التجزئة P ، فهو طول القطر الاكبر للمستطيل R_k .

(4) افرض (x_k, y_k, z_k) احدى نقاط S_k .

(5) احسب المجموع $\sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k$

هذه الفرضيات تؤدي الى التعريف التالي

تعريف (15.18) افرض S هو السطح $z = f(x,y)$ المعرف على المنطقة R في مستوى xy وافرض $f(x,y)$ له مشتقات جزئية متصلة على R .

واذا P تجزئة على R ، واذا $G(x,y,z)$ متصل على S ، فان تكامل G على السطح S ، رمزه $\iint_S G(x,y,z)\,dS$ هو

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k, z_k)\; S_k \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

ولحساب (34) نستعمل التفاضلة dS (تعريف (15.17)) لنحصل على

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(x,y,g(x,y))\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\;\; dA \;\ldots\ldots\; (35)$$

لاحظ انه اذا $G \equiv 1$ على S فان (35) يعطي مساحة السطح S . كما انه اذا G يمثل كثافة مادة السطح S عند كل نقاطه ، فان (35) تعطي كتلة السطح .

صيغ أخرى

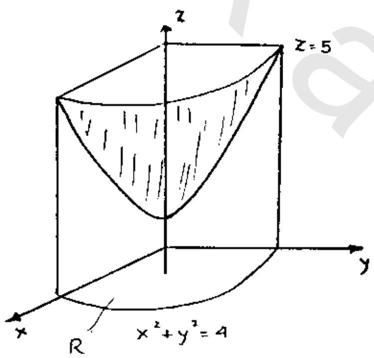
اذا معادلة السطح S هي $y = g(x,z)$ واسقاطه على مستوى xz هو R ، فان تكامل $G(x,y,z)$ على هذا السطح هو

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(x,g(x,z),z)\sqrt{g_x^2 + g_z^2 + 1}\;dA \;\ldots\ldots\; (36)$$

اما اذا معادلة السطح S هي $x=h(y,z)$ واسقاطه على مستوى yz هو R ، فان تكامل $G(x,y,z)$ على هذا السطح هو

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G((y,z),y,z)\sqrt{h_y^2 + h_z^2 + 1}\;dA \;\ldots\ldots\; (37)$$

مثل (15.32) جد كتلة سطح مكافئي $z = 1 + x^2 + y^2$ في الثمن الاول اذا $1 \le z \le 5$ علما بان كثافته في اي نقطة من نقاطه تتناسب مع بعدها عن مستوى xy .



(15.32)الشكل

الحل : اسقاط ذلك الجزء من السطح على مستوى xy هو في الربع الاول $x^2+y^2=4$. انظر الشكل (15.32)

الكثافة $\rho(x,y,z) = kz$

$$z = 1 + x^2 + y^2 = f(x,y)$$

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\,dS$$

$$= k\iint_R (1 + x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\;\;dA$$

$$= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (1+r^2)\sqrt{1 + 4r^2}\;\;r\,dr\,d\theta$$

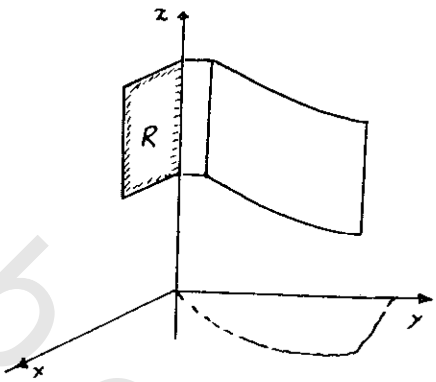
$$= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} [r(1+4r^2)^{1/2} + r^3(1+4r^2)^{1/2}]\,dr\,d\theta$$

$$= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\tfrac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2} + \tfrac{1}{12}r^2(1+4r^2)^{3/2} - \tfrac{1}{120}(1+4r^2)^{5/2}\Big|_0^2\;d\theta$$

$$= k\,\frac{\pi}{2}\left[\frac{5(17)^{3/2}}{12} - \frac{17^{5/2}}{120} - \frac{3}{40}\right] \approx 19.2k$$

مثل (15.33) احسب $\iint_S x\,z^2\,dS$ اذا S ذلك الجزء من الاسطوانة $y = 2x^2 + 1$ في الثمن

الاول المحدود بالمستويات : $x = 0$ ، $x = 2$ ، $z = 4$ ، $z = 8$.



الشكل(15.33)

<u>الحل</u> : اسقاط S هو في مستوى xz ،
انظر الشكل(15.33) ، المنطقة R .
نفرض $g(x,z) = 2x^2 + 1$ ، لذلك
$g_x = 4x$ ، $g_z = 0$. الآن نحسب

$$\iint_S xz^2\,dS = \int_0^2\int_4^8 xz^2\sqrt{1+16x^2}\;dz\,dx$$
$$= \int_0^2 \frac{z^3}{3}x\sqrt{1+16x^2}\,\Big|_4^8\,dx$$
$$= \frac{448}{3}\int_0^2 x\,(1+16x^2)^{1/2}\,dx$$
$$= \frac{28}{9}\,(1+16x^2)^{3/2}\,\Big|_0^2$$
$$= \frac{28}{9}\,[65^{3/2} - 1] \approx 1627.3$$

وقد لا تكون المشتقات الجزئية في المعادلة (35) موجودة في كل نقاط S ، عندها يمكن معاملة التكامل (35) كانه تكامل معتل .

<u>مثل (15.34)</u> احسب $\iint_S (1+z)\,dS$ على السطح S : $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

<u>الحل</u> : اذا $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ فان اسقاط S على مستوى xy هو الدائرة $x^2 + y^2 = 1$. كذلك

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\;,\quad f_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

لذلك f_x ، f_y غير موجودتين على $x^2+y^2 = 1$.

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\;,\quad x^2+y^2 < 1$$

وعامل التفاضلة غير موجود على $x^2 + y^2 = 1$. لذلك نجعل R الحلقة R_b كما يلي

$$R_b = \left\{(x,y) :\; 0 \le x^2 + y^2 < b \;,\; b < 1\right\}$$

وعندها يصير التكامل المعتل

$$\iint_S (1+z)\,dS = \lim_{b\to 1^-}\iint_{R_b}\left(1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\;dA$$
$$= \lim_{b\to 1^-}\iint_{R_b}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)dA$$

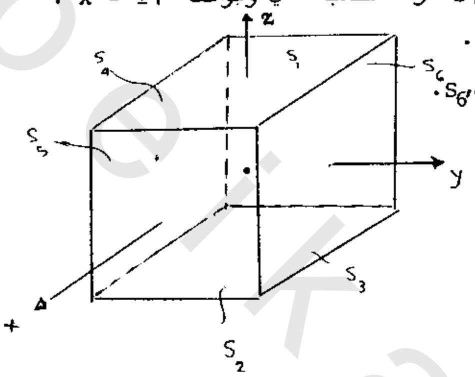
$$= \lim_{b \to 1^-} \int_0^{2\pi} \int_0^b \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}\right) r \, dr \, d\theta$$

$$= \lim_{b \to 1^-} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - (1 - r^2)^{1/2}\right] \Big|_0^b \, d\theta$$

$$= \lim_{b \to 1^-} 2\pi\left[-\sqrt{1 - b^2} + \frac{b^2}{2} + 1\right] = 3\pi$$

اما اذا كان السطح S مؤلفا من عدة سطوح S_i كل منها له معادلته وبقية الشروط الأخرى متوفرة ، فان التكامل على S هو مجموع التكاملات على S_i .

مثل (15.35) احسب $\iint_S (x + y + z) \, dS$ والسطح S هو المكعب الذي وجوهه $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، $z = \pm 1$. انظر الشكل (15.34) .



الحل : السطح S مؤلف من السطوح $S_1, \ldots, S_6$.

معادلة السطح S_1 هي $z = f_1(x,y) = 1$

$-1 \le x \le 1$ ، $-1 \le y \le 1$

عوض في (35)

$$\iint_{S_1} g \, dS = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x+y+1)\sqrt{0+0+1} \; dy \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(xy + \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^1 dx = \int_{-1}^{1} (2x+z) \, dx$$

$$= (x^2 + 2x)\Big|_0^1 = 4$$

الشكل (15.34)

معادلة السطح S_2 هي $f(x,y) = -1$ ،

$-1 \le x \le 1$ ، $-1 \le y \le 1$. لذلك

$$\iint_{S_2} g \, dS = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x + y - 1)\sqrt{1} \; dy \, dx = -4$$

وبسبب التماثل في المكعب فان التكاملات على سطوح المكعب الاخرى هي 4 أو -4 حسب اشارة $f_i(x,y)$. أي أن

$$\iint_{S_1} g \, dS = \iint_{S_3} g \, dS = \iint_{S_5} g \, dS = 4$$

$$\iint_{S_2} g \, dS = \iint_{S_4} g \, dS = \iint_{S_6} g \, dS = -4$$

لذلك

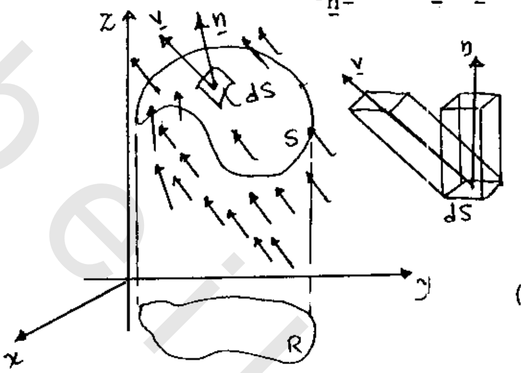
$$\iint_S g \, dS = 4 + 4 + 4 - (4 + 4 + 4) = 0$$

تكامل حقل متجه

افرض $\underline{v}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\underline{i} + N(x,y,z)\,\underline{j} + P(x,y,z)\,\underline{k}$

هي سرعة مائع يتدفق من خلال غشاء S . انظر الشكل(15.35) . فان حجم المائع المتدفق في وحدة المساحة السطحية dS في وحدة الزمن يمكن تقريبها كما يلي

$$(\text{Comp}_{\underline{n}}\underline{v})\, dS = \underline{V} \cdot \underline{n}\; dS = (\text{الارتفاع} \times \text{مساحة القاعدة})$$



الشكل(15.35)

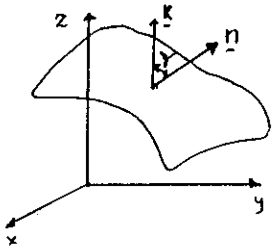
حيث $\text{Comp}_{\underline{n}}\underline{v}$ هي مركبة $\underline{V}$ باتجاه $\underline{n}$ ، $\underline{n}$ هو ناظم الوحدة للسطح . لذلك فان مجموع حجم المائع المتدفق من خلال S في وحدة الزمن يسمى __تدفق $\underline{V}$ خلال S__ ومعادلته

$$(\text{التدفق}) = \iint_S (\underline{v} \cdot \underline{n})\, dS \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

وفي حال كون S سطحا مغلقا فانه اذا $\underline{n}$ ناظم خارجي (داخلي) يكون التدفق خارج (داخل) السطح .

__ملاحظة__ :

(1) نختار السطح S قابلا للتوجيه أي له وجهان مثل الكرات والمكافئيات . والناظم $\underline{n}$ قد يكون موجبا اذا مركبة $\underline{k}$ فيه موجبة ، وهو سالب اذا مركبة فيه سالبة .



الشكل(15.36)

كما انه لأي سطح S معادلته $z = f(x,y)$ فان

$$\underline{n} = \frac{-f_x\underline{i} - f_y\underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

وهذا $\underline{n}$ موجب . ويسمى ناظم الوحدة العلوى.

اما $\underline{n}-$ فهو ناظم الوحدة السفلي . لذلك فان التدفق هو

$$_S\ \underline{v} \cdot \underline{n}\; dS = {}_R\ (-Mf_x - Nf_y + P)\,dx\,dy \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

(2) افرض γ الزاوية بين $\underline{n}$ ، $\underline{k}$. انظر الشكل(15.36)

فان $\underline{n} \cdot \underline{k} = \|\underline{n}\|\,\|\underline{k}\| \cos\gamma$

لذلك $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$

او $\sec\gamma = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$ .... (41)

لذلك يمكن كتابة (35) كما يلي

$$\iint_S G(x,y,z)\,dS = \iint_R G(x,y,z)\sec\gamma\,dA \quad ...... \quad (42)$$

(3) اذا $\rho(x,y,z)$ اقتران الكثافة للسطح S عند النقطة (x,y,z) فانه يمكن حساب العزوم وعزم القصور الذاتي كما يلي

$$M_{yz} = \iint_S x\rho\,dS \quad , \quad M_{xz} = \iint_S y\rho\,dS \quad , \quad M_{xy} = \iint_S z\rho\,dS \quad (43)$$

كذلك تكون احداثيات مركز الثقل $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ كما يلي

$$\bar{x} = M_{yz}/M \quad , \quad \bar{y} = M_{xz}/M \quad , \quad \bar{z} = M_{xy}/M \quad .... \quad (44)$$

حيث M هي الكتلة : $M = \iint_S \rho\,dS$

اما عزوم القصور الذاتي فهي

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\rho\,dS \quad , \quad I_y = \iint_S (x^2+z^2)\rho\,dS \quad , \quad I_z = \iint_S \rho(x^2+y^2)\,dS$$

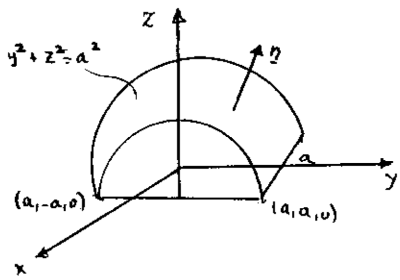
$$I_L = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\rho\,dS = \iint_S r^2\rho\,dS$$

حيث r هي المسافة من (x,y,z) الى المستقيم L .

اما نصف قطر التدويم من المستقيم L فهو

$$R_L = \sqrt{I_L/M}$$

مثل (15.36) جد تدفق $\underline{v} = yz\,\underline{i} + z^2\underline{k}$ خارجا من خلال السطح S المقطوع من اسطوانة $y^2+z^2 = a^2$ ، $z \geq 0$ ، والمستويين $x = 0$ ، $x = a$ ، انظر الشكل (15.37) .



الشكل(15.37)

<u>الحـل</u> :

$$\underline{n} = \frac{2y\,\underline{j} + 2z\,\underline{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\,\underline{j} + 2z\,\underline{k}}{2a} = \frac{y}{a}\underline{j} + \frac{z}{a}\underline{k}$$

كذلك $dS = \frac{a}{z}\,dA$

$$\underline{v}\cdot\underline{n} = (yz\,\underline{j} + z^2\underline{k})\cdot(\frac{y}{a}\underline{j} + \frac{z}{a}\underline{k}) = \frac{z}{a}(y^2+z^2) = \frac{z}{a}(a^2) = az$$

(على السطح S)

$$\iint_S \underline{v}\cdot\underline{n}\,dS = \iint_R az\,\frac{a}{z}\,dA = \iint_R a^2\,dA = a^2(a^2) = a^4$$

مثل (13.37) افرض $\underline{v} = zi - xj + yk$ تمثل سرعة مائع يتدفق خلال سطح S هو جزء من المستوى $z = 12 - 3x + 2y$ في الثمن الاول . جد هذا التدفق .

الحل :

$$\underline{n} = \frac{3\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{14}}$$

$$\underline{v}\cdot\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3z+2x+y) = \frac{1}{\sqrt{14}}(36-7x+7y)$$

التدفق

$$\iint_S \underline{v}\cdot\underline{n}\, dS = \frac{1}{\sqrt{14}} \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{2}x-6} (36 - 7x + 7y)\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \int_0^4 \left(36y - 7xy + \frac{7y^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}x-6} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \int_0^4 \left[96x - 216 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{7}{2}\left(\frac{3}{2}x - 6\right)^2\right] dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \left[48x^2 - 216x - \frac{7}{2}x^3 + \frac{7}{9}\left(\frac{3}{2}x - 6\right)^3\right]\Big|_0^4$$

$$= -\frac{320}{\sqrt{14}} \approx -85.524$$

تمارين (15.5)

(1) جد مساحة السطح الذي هو جزء من المستوى $2x + 3y + 4z = 12$ محدود بالمستويات الاحداثية في الثمن الاول .

(2) جد مساحة السطح الذي هو جزء من المستوى $2x + 3y + 4z = 12$ ، ويقع فوق المنطقة التي يحدها منحني $r = \sin 2\theta$.

(3) جد مساحة السطح الذي هو جزء من الاسطوانة $x^2 + y^2 = 16$ فوق منطقة في الربع الاول يحدها $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = 0$ ، $y = 5$.

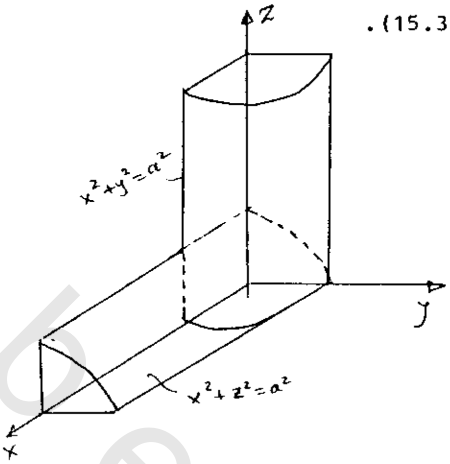
(4) جد مساحة السطوح التي هي من الكرة $x^2+y^2+z^2=2$ داخل المخروط $z^2=x^2+y^2$.

(5) جد مساحة السطح لذلك الجزء من الكرة $x^2+y^2+z^2 = 25$ فوق منطقة في الربع الاول يحدها $x = 0$ ، $y = 0$ ، $4x^2 + y^2 = 25$. (ارشاد : كامل اولا بالنسبة الى x) .

(6) جد مساحة السطح لذلك الجزء من رسم $z = x^2 - y^2$ في الثمن الاول داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$.

(7) جد مساحة السطح لذلك الجزء من الاسطوانة $y^2 + z^2 = a^2$ الذي يقع داخل

الاسطوانة $x^2 + y^2 = a^2$. انظر الشكل (15.38).



الشكل (15.38)

(8) جد مساحة السطح لتلك الاجزاء من المخروط $z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ التي تقع داخل الاسطوانة $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

(9) جد مساحة السطح الذي معادلته $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ اذا $0 \leq 3(x^2+y^2) \leq z^2$ ، $z \geq 2$.

(10) جد مساحة السطح الذي معادلته $3z^2 = (x + y)^3$ على المنطقة التي يحدها $x + y \leq 2$ ، $x \geq 0$ ، $y \geq 0$.

(11) جد مساحة السطح لذلك الجزء من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ ويقع داخل المكافئي $x^2 + y^2 = 5z$.

(12) جد مساحة السطح لذلك الجزء من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ قطعة المخروط $z = x^2+y^2$.

تكاملات على السطوح

للتمارين (13) - (20) احسب التكاملات $\iint\limits_S G(x,y,z)\,dS$

(13) $G(x,y,z) = x$ ، S ذلك الجزء من الاسطوانة $z = 2 - x^2$ في الثمن الاول المحدود بالمستويات $x = 0$ ، $y = 0$ ، $y = 4$, $z = 0$.

(14) $G(x,y,z) = xy(9 - 4z)$ ، S هو السطح في التمرين (13).

(15) $G(x,y,z) = xz^3$ ، S هو المخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ داخل الاسطوانة $x^2+y^2=1$.

(16) $G(x,y,z) = z^2$ ، S ذلك الجزء من المستوى $z = x + 1$ داخل الاسطوانة $y = 1 - x^2$ ، $0 \leq y \leq 1$.

(17) $G(x,y,z) = 24\sqrt{yz}$ ، S ذلك الجزء من الاسطوانة $y = x^2$ في الثمن الاول يحده $y = 0$ ، $y = 4$ ، $z = 0$ ، $z = 3$.

(18) $G(x,y,z) = (1+4y^2+4z^2)^{1/2}$ ، S ذلك الجزء من المكافئي $x = 4 - y^2 - z^2$ في الثمن الاول خارج الاسطوانة $y^2 + z^2 = 1$.

(19) $G(x,y,z) = x + y + z$ ، S ذلك الجزء من المكعب في الثمن الاول تحده

المستويات $x = 1$ ، $y = 1$ ، $z = 1$.

(20) $G(x,y,z) = xyz$ ، S ذلك الجزء من متوازي السطوح تحدده المستويات $x = \pm a$ ، $y = \pm b$ ، $z = \pm c$.

التدفق خلال سطح

للتمارين (21) - (26) $\underline{v}$ هو حقل متجه . جد تدفق $\underline{v}$ خلال السطح S . استعمل ناظم الوحدة العلوي $\underline{n}$ للسطح S .

(21) $\underline{v} = x\underline{i} + 2z\underline{j} + y\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من الاسطوانة $y^2 + z^2 = 4$ في الثمن الاول يحده $x = 0$ ، $x = 3$ ، $y = 0$ ، $z = 3$.

(22) $\underline{v} = z\,\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من المكافئي $z = 5 - x^2 - y^2$ داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$.

(23) $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ ، S هو السطح في التمرين (22) .

(24) $\underline{v} = -x^3y\underline{i} + yz^3\underline{j} + xy^3\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من المستوى $z = x + 3$ في الثمن الاول داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 2x$.

(25) $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ في الثمن الاول.

(26) $\underline{v} = \dfrac{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ، S هو السطح في التمرين (25) .

الكتلة والعزوم

للتمارين (27) - (32) جد الكتلة أو العزوم المطلوبة للسطح المفروض حسب اقتران الكثافة (x,y,z) .

(27) S ذلك الجزء من المستوى $x + y + z = 1$ في الثمن الأول والكثافة عند النقطة p تتناسب طرديا مع مربع المسافة من مستوى yz .

(28) S هو نصف الكرة $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ، $\rho(x,y,z) = |xy|$.

(29) S هو ذلك الجزء من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ في الثمن الاول . والكثافة ثابتة . جد مركز الكتلة $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

(30) S هو ذلك الجزء من الاسطوانة $y^2 + z^2 = a^2$ قطع الجزء العلوي منها $x = 0$ ، $x = a$. والكثافة ثابتة . جد مركز الكتلة $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

(31) S قشرة كروية نصف قطرها a ، جد الكتلة اذا

(أ) الكثافة ρ في أي نقطة تساوي مسافة النقطة من قطر ثابت في الكرة .

(ب) الكثافة ρ في أي نقطة هي مربع المسافة بين النقطة وقطر ثابت في الكرة .

(32) جد عزم القصور الذاتي حول محور z لذلك الجزء من سطح مكعب قطعه المستويات $x = 1$ ، $y = 1$ ، $z = 1$ في الثمن الاول ، اذا الكثافة ثابتة .

(33) اذا $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ تمثل الحرارة ، وان جريان الحرارة هو حسب $\underline{F} = -\underline{\nabla} T$. جد تدفق الحرارة خارج الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. (المساحة السطحية للكرة $4\pi a^2$) .

(34) جد تدفق $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ خارجا من مكعب وحدة $0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1$ ، $0 \le z \le 1$. (التدفق خارج المكعب هو مجموع التدفقات من وجوهه الستة) .

(15.6) مبرهنة ستوكس

مبرهنة ستوكس هي تعميم في ثلاثة ابعاد لمبرهنة جرين ، تربط بين التكامل على سطوح و التكامل على منحنيات تحد هذه السطوح .

ولقد ذكرنا الصيغة التالية في بند صيغ اخرى لمبرهنة جرين

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \oint_C \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \iint_R \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{k}\ dA \qquad \ldots\ldots \qquad (29)$$

هذه الصيغة لمنطقة R في بعدين يحدها منحن C .

الآن نفرض سطحا S معادلته $z = f(x,y)$. وهذا الاقتران متصل له مشتقات متصلة على المنطقة R في مستوى xy . اذا C هو منحن بسيط مغلق ممهد يحد S واسقاطه على مستوى xy هو C_{xy} الذي يحد R . فان الاتجاه الموجب للمنحني C_{xy} يحدد الاتجاه الموجب للمنحني C . افرض $\underline{T}$ متجه مماس وحدة المنحني C عند أيّ من نقاطه. وان $\underline{n}$ هو ناظم وحدة علوي للسطح S الذي نسميه سطحا ممهدا . انظر الشكل(15.39).

مع هذه الفرضيات نقدم مبرهنة ستوكس

مبرهنة (15.19) (مبرهنة ستوكس)

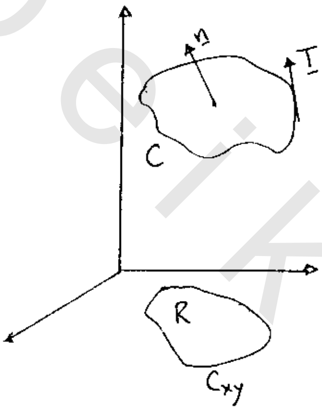
افرض $\underline{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\underline{i} + N(x,y,z)\underline{j} + P(x,y,z)\underline{k}$ حقلا متجها مركباته M ، N ، P متصلة لها مشتقات متصلة على منطقة تحوي S سطحا ممهدا ناظمه

العلوي $\underline{n}$. اذا المنحني الممهد C هو حدود S يقطع في الاتجاه الموجب فان

$$\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \oint_C \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \iint_S \nabla\times\underline{F}\cdot\underline{n}\,dS \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

<u>البرهان</u> : يمكن كتابة (46) كما يلي

$$\oint_C M\,dx + N\,dy + P\,dz =$$
$$\iint_R \left[\left(\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\right]dx\,dy$$



الشكل (15.39)

ونبرهن هذه العبارة على ثلاث مراحل ببرهنة كل من

$$\oint_C M\,dx = -\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$\oint_C N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z}\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx\,dy$$

$$\oint_C P\,dz = \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx\,dy$$

نفرض ان C ممهد موجه ايجابيا مَعْلَمته

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}\ ,\ t\in[0\ ,\ 1]$$

لذلك اسقاطه في xy وهو المنحني C_{xy} معلمته

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)j \quad ,\quad t\in[0\ ,\ 1]$$

بالاتجاه الموجب . انظر الشكل(15.39)

$$\oint_C M\,dx = \int_0^1 M(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$
$$= \int_0^1 M[x(t),y(t),f(x(t),y(t))]x'(t)dt$$
$$= \int_0^1 G[x(t),y(t)]x'(t)dt \ ,\ G(x,y) = M(x,y,f(x,y))$$
$$= \oint_{C_{xy}} G\,dx$$

من مبرهنة جرين فان

$$= -\iint_R \frac{\partial G}{\partial y}\,dx\,dy$$

باستعمال قاعدة السلسلة نجد

$$= -\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z}\,\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx\,dy$$

وبرهان العبارة التالية مماثل . لذلك نبرهن العبارة الاخيرة .

$$\oint_C P\,dz = \int_0^1 P(x,f(y(t),z(t))z'(t)dt$$

$$= \int_0^1 P[x(t),y(t),f(x(t),y(t))]\frac{df}{dt}(x(t),y(t))\,dt$$

$$= \int_0^1 H[x(t),y(t)]\left[\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)\right]dt$$

$$= \oint_{C_{xy}} H\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + H\frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

من مبرهنة جرين

$$= \iint_R \left(H\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - H\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx\,dy$$

بما ان $f_{xy} = f_{yx}$ فان

$$= \iint_R \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx\,dy$$

باستعمال قاعدة السلسلة

$$= \iint_R \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\right]dx\,dy$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx\,dy$$

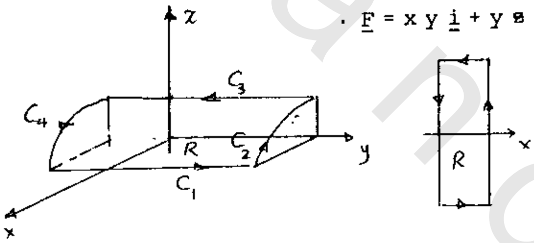
مثل (15.38) اذا S جزء من الاسطوانة $z = 1 - x^2$ ، $0 \le x \le 1$ ، $-2 \le y \le 2$

تحقق من مبرهنة ستوكس اذا $\underline{F} = xy\,\underline{i} + yz\,\underline{j} + xz\,\underline{k}$.

الحل : السطح S والمنحني

$C_4 \cup C_3 \cup C_2 \cup C_1 = C$

كما في الشكل (15.40) .



الشكل (15.40)

التكامل على السطح S

$$\underline{F} = xy\,\underline{i} + yz\,\underline{j} + xz\,\underline{k}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = -y\,\underline{i} - z\,\underline{j} - x\,\underline{k}$$

اذا $z = f(x,y) = 1 - x^2$ فان

$$\underline{n} = \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$\iint_S \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n}\,dS = \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2+1}}\,dS$$

باستعمال (36)

$$= \iint_R (-2xy - x)\,dA$$

$$= \int_0^1 \int_{-2}^{2} (-2xy-x)\,dy\,dx = \int_0^1 [-xy^2 - xy]\Big|_{-2}^{2} dx$$

$$= \int_0^1 (-4x)\,dx = -2$$

التكامل على المنحني C

نعلـم ان $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$

على $C_1 : x = 1$ ، $z = 0$ لذلك $\int_{C_1} y(0) + y(0)\,dy + 0 = 0$

على $C_2 : y = 2$ ، $z = 1 - x^2$ ، $dy = 0$ $dz = -2x$ لذلك

$$\int_{C_2} 2x\,dx + 2\,(1-x^2)\,0 + x(1-x^2)(-2x\,dx) = \int_0^1 (2x - 2x^2 + 2x^4)\,dx = -\frac{11}{15}$$

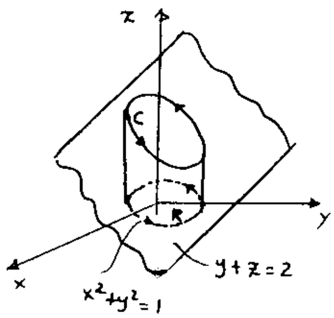
على $C_3 : x = 0$ ، $z = 1$ ، $dx = 0$ ، $dz = 0$ لذلك $\int_{C_3} 0 + y\,dy + 0 = \int_{-2}^{2} y\,dy = 0$

على $C_4 : y = -2$ ، $z = 1 - x^2$ ، $dy = 0$ ، $dz = -2x\,dx$ لذلك

$$\int_{C_4} -2x\,dx - 2(1-x^2)\,0 + x(1-x^2)(-2x\,dx) = \int_0^1 (-2x - 2x^2 + 2x^4)\,dx = -\frac{19}{15}$$

وجمع هذه النتائج يؤدي الى $\oint_C = 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -2$

مثل (15.39) احسب $\oint_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$ ، حيث C هو اثر الاسطوانة $x^2 + y^2 = 1$ في المستوى $y + z = 2$ ، انظر الشكل (15.41) .



الحـل : افرض $\underline{F} = z\underline{i} + x\underline{j} + y\underline{k}$

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$$

بما ان $z = f(x,y) = 2 - y$

فـان $\underline{n} = \frac{\underline{j} + \underline{k}}{\sqrt{2}}$

الشكل(15.41)

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_S \nabla \times \underline{F} \cdot \underline{n}\,dS = \iint_S \sqrt{2}\,dS = \sqrt{2} \iint_S dS$$

$$= \sqrt{2} \iint_R dA = \sqrt{2}\,\pi$$

امتدادات اخرى لمبرهنة ستوكس

(1) افرض سطحين موجهين S_1 ، S_2 لهما المنحني C يحدهما ، وكلاهما يـؤدي الـى التوجيه نفسه للمنحني C . اذا $\underline{n}_1$ ، $\underline{n}_2$ ناظما S_1 ، S_2 على التوالـي ، فانــه حسب مبرهنة ستوكس:

$$\iint_{S_1} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n}_1 \, dS = \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_{S_2} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n}_2 \, dS \quad \ldots (47)$$

لأي حقل متجه $\underline{F}$ مركباته متصلة المشتقات الجزئية على S_1 ، S_2 . وفائدة هذه الملاحظة ان التكامل على احد هذين السطحين قد يكون اسهل من التكامل على السطح الآخر .

مثل (15.40) افرض S_1 نصف الناقصي

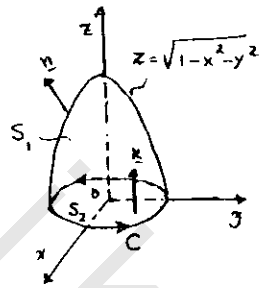
$$z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

موجه بحيث ان ناظمه $\underline{n}$ متجه الى اعلى. انظر الشكل(15.42) .

اذا

$$\underline{F}(x,y,z) = x^2\,\underline{i} + y^2\,\underline{j} + z^2 \tan xy\,\underline{k}$$

احسب $\iint_{S_1} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$



الشكل(15.42)

الحــل :

$$\underline{\nabla} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \tan xy \end{vmatrix} = xz^2 \sec^2 xy\,\underline{i} - yz^2 \sec^2 xy\,\underline{j}$$

لكنه بدلا من حساب

$$\iint_{S_1} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$$

نلاحظ أن S_2 هو قرص $x^2 + y^2 = 1$ وان ناظمه هو $\underline{k}$. لذلك نجري التكامل عليه اذ ان C مشترك بين S_1 ، S_2 ولهما الاتجاه نفسه

$$\iint_{S_1} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = \iint_{S_2} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$$
$$= \iint_{S_2} 0 \, dS = 0$$

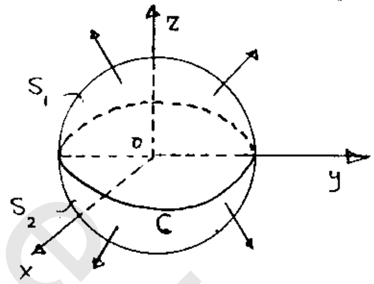
(2) اذا كــان C منحني الحدود للسطحين S_1 ، S_2 ولكن توجه C بالنسبة الى S_1 هو عكس توجهه بالنسبة الى S_2 فان

$$\iint_{S_1} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = -\iint_{S_2} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$$

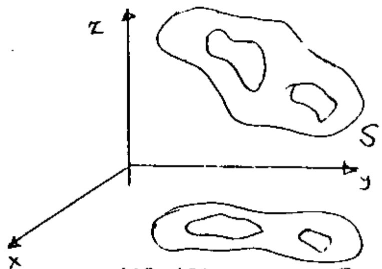
مثل (15.41) اذا S هي كرة الوحدة $x^2 + y^2 + z = 1$ ، موجه لكي يظل الناظم $\underline{n}$ متجها خارجا . اذا $\underline{F}$ أي حقل متجه مركباته ذات مشتقات جزئية متصلة على S . فان $S = S_1 \cup S_2$ حيث S_1 هو الجزء العلوي من الكرة بينما S_2 هو الجزء السفلي ، عندها يكون ناظم S_1 في اتجاه يخالف اتجاه ناظم S_2 . انظر الشكل(15.42) . وكلا S_1 ، S_2 لهما منحنى الحدود $x^2 + y^2 = 1$ ، لذلك

$$\iint_S \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n}\, dS = \iint_{S_1} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n}\, dS + \iint_{S_2} \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n}\, dS = 0$$

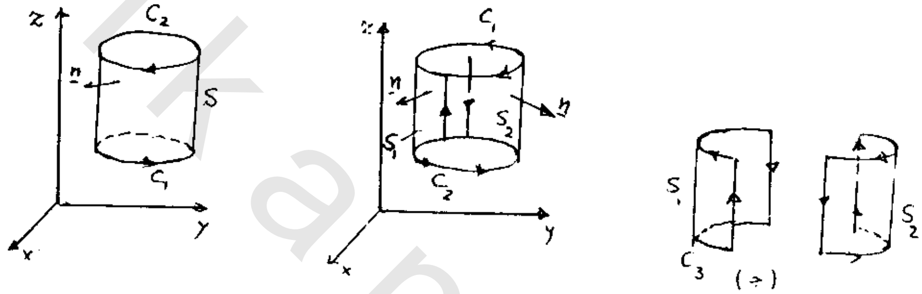
(3) يمكن تعميم مبرهنة ستوك لتتحقق على سطوح مختلفة منها ما هو متعدد الاتصالية انظر الشكل(15.43) . أو لسطوح اسطوانات . انظر الشكل(15.44) .



الشكل (15.42)



الشكل (15.43)



(أ) (ب)

الشكل (15.44)

ملاحظة تاريخية : جورج ستوكس (1819-1903) رياضي ايرلندي كان استاذا في جامعة كامبردج ، يعرف ايضا بمساهمته في امتحان جائزة سمث . اما هذه المبرهنة فهي اصلا للرياضي الفيزيائي وليم طومسون (لورد كلفن فيما بعد) (1824 - 1907) ، الذي بعث بها الى ستوكس سنة 1850.

تمارين (15.6)

للتمرينين (1) ، (2) تحقق من مبرهنة ستوكس

(1) $\underline{F}=5y\underline{i} - 5x\underline{j} + 3\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من المستوى $z=1$ داخل الاسطوانة $x^2+y^2=4$.

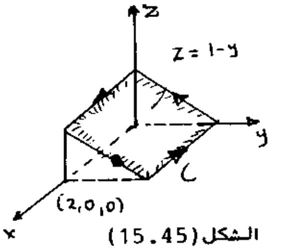
(2) $\underline{F}=2z\underline{i} - 3x\underline{j} + 4y\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من المكافئي $z=16-x^2-y^2$ ، $z \geq 0$.

للتمارين (3) - (15) استعمل مبرهنة ستوكس لتجد التكاملات

(3) $\oint_C (2z+x)\,dx + (y-z)\,dy + (x+y)\,dz$ ، C هو المثلث رؤوسه (0,0,1) ،

(0,1,0) ، (1,0,0) .

(4) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، $\underline{F}=z^2y\cos xy\,\underline{i}+z^2x(1+\cos xy)\,\underline{j}+2z\sin xy\,\underline{k}$ ، C هو حدود المستوى $z = 1 - y$ كما في الشكل (15.45) .



الشكل (15.45)

(5) $\oint_C xy\,dx + 2yz\,dy + xz\,dz$

حيث C هو كما في التمرين (4) .

(6) $\iint_S \underline{\nabla}\times \underline{F}\cdot \underline{n}\,dS$ اذا $\underline{F} = y\underline{i} + (y-x)\underline{j} + z^2\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من الكرة $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$ ، $z \geq 0$.

(7) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، اذا $\underline{F}=y^3\underline{i}-x^3\underline{j}+z^3\underline{k}$ ، C هو أثر الاسطوانة $x^2+y^2=1$ في المستوى $x + y + z = 1$.

(8) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، اذا $\underline{F}=y^2\underline{i}+xy\underline{j} - 2xz\underline{k}$ ، S نصف الكرة $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ ، $\underline{n}$ متجه الى اعلى .

(9) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، اذا $\underline{F}=y\underline{i} - x\underline{j} + z\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من الاسطوانة $x^2 + y^2 = 1$ بين المستويين $z = 0$ ، $z = 1$ وذلك الجزء من المستوى $z = 1$ داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 1$ ، $\underline{n}$ متجه بعيدا من محور z على الاسطوانة ، وعلويا بالنسبة الى المستوى .

(10) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، $\underline{F} = \dfrac{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}}$ ، C تقاطع المكافئي $2z = x^2 + y^2$ والاسطوانة $x^2+y^2 = 2x$.

(11) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، $\underline{F}=xz\underline{i} + y^2\underline{j} + x^2\underline{k}$ ، C تقاطع المستوى $x + y + z =$ والاسطوانة الناقصية $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

(12) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، $\underline{F}=3y\underline{i} + 2z\underline{j} - x\underline{k}$ ، C مثلث رؤوسه (1,0,0) ، (0,1,0) ، (0,0,1) .

(13) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، $\underline{F}=y(x^2+y^2)\underline{i}-x(x^2+y^2)\underline{j}$ ، C هو المستطيل رؤوسه (0,0,0) ، (1,0,0) ، (1,1,1) ، (0,1,1) .

(14) $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ ، $\underline{F} = \ln(y^2+1)\underline{i}+x\underline{j}+(x+y)\underline{k}$ ، C هو المستطيل في مستوى xy رؤوسه : (0,0) ، (3,0) ، (3,1) ، (0,1) .

(15) $\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$ ، $\underline{F}=(x^2+z)\underline{i}+(y^2+x)\underline{j}+(z^2+y)\underline{k}$ ، C هو تقاطع الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ مع المخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ارشاد . استعمل المعادلة (47)).

للتمارين (16) - (19) استعمل مبرهنة ستوكس والمعادلة (47) حيث تنطبق لحساب

$$\iint_S \underline{\nabla} \times \underline{F} \cdot \underline{n}\, dS$$

(16) $\underline{F}=xz\underline{i} + (y^2+2x)\underline{j} + x\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من المكافئي $z = 9 - x^2 - y^2$ فوق مستوى xy ، $\underline{n}$ متجه الى اعلى .

(17) $\underline{F}=x\underline{i} + (x^2+y^2+z^2)\underline{j} + z(y^4-1)\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من الاسطوانة $x^2 + z^2 = 1$ فوق مستوى xy وبين المستويين $y = -1$ ، $y = 1$ ، $\underline{n}$ متجه الى اعلى .

(18) $\underline{F}=z^2y\underline{i} - x\underline{j} + z\sin x^2y^2z\,\underline{k}$ ، S ذلك الجزء من الاسطوانة $x^2 + y^2 = 15$ بين المستويين $z = -1$ ، $z = 2$. $\underline{n}$ متجه بعيدا عن محور z .

(19) $\underline{F}=x\sin z\underline{i} + xy\underline{j} + yz\underline{k}$ ، S كل وجوه المكعب رؤوسه (0,0,0) ، (1,1,0) ، (0,1,0) ، (0,0,1) ، (1,0,1) ، (1,1,1) ، (0,1,1) عدا الوجه في المستوى $z = 1$. $\underline{n}$ متجه بعيدا عن المكعب .

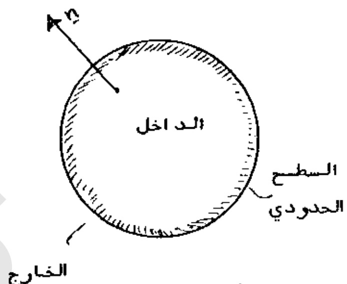
(15.7) مبرهنة التباعد

مبرهنة التباعد هي الامتداد الآخر والأخير لمبرهنة جرين في ابعاد عليا . نبدأ بمنطقة مصمتة D . نسمي D منطقة مصمتة بسيطة اذا امكن التعبير عنها بانها المنطقة المحصورة بين رسمي اقترانين على منطقة بسيطة في كل من المستويات الاحداثية . مثلا D منطقة مصمتة بسيطة اذا وجد اقترانات $F_1(x,y)$ ، $F_2(x,y)$ بحيث ان $F_1(x,y) \leq z \leq F_2(x,y)$ اذا $(x,y,z) \in D$ حيث $(x,y) \in R_{xy}$. وكذلك يوجد اقترانات $G_1(x,z)$ ، $G_2(x,z)$ ومنطقة R_{xz} بحيث ان $G_1(x,z) \leq y \leq G_2(x,z)$ اذا $(x,y,z) \in D$ ، حيث $(x,z) \in R_{xz}$. واخيرا يوجد اقترانات $H_1(y,z)$ ، $H_2(y,z)$ ومنطقة R_{yz} بحيث ان $H_1(y,z) \leq x \leq H_2(y,z)$ اذا $(x,y,z) \in D$ بحيث ان $(y,z) \in R_{yz}$.

مناطق مثل الكرات ، وانصافها ، والناقصية والمكعبات ، وذوات الوجوه الاربعة هي مناطق مصمتة بسيطة . وتتميز كل منطقة بسيطة مصمتة بان لها داخلا وخارجا يفصلهما سطح حدودي . انظر الشكل (15.46) .

هذا السطح موجه ، بفضل ناظم اتجاهه خارج D .

وهذا يوصلنا الى مبرهنة التباعد . وقد تسمى مبرهنة جاوس نسبة الى الرياضي العبقري الالماني كارل فردريك جاوس(1777 - 1855) ، امير الرياضيات كما سموه .



منطقة مصمتة بسيطة

الشكل (15.46)

مبرهنة (15.20) افرض D منطقة مصمتة بسيطة يحدها سطح موجه S بالناظم n متجه خارجا من D . اذا F حقل متجه مركباته ذات مشتقات جزئية متصلة في D فان

$$\iint_S \underline{F} \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_D \underline{\nabla} \cdot \underline{F}\, dV \qquad \ldots\ldots \qquad (48)$$

ويلاحظ ان هذه النتيجة هي تعميم في ثلاثة ابعاد لصيغة مبرهنة جرين (30) . فهي تربط بين التكامل على منطقة و التكامل على السطح الذي يحدها . لذلك فهي امتداد آخر للمبرهنة الاساسية في التكامل .

البرهان : اذا $\underline{F} = M\underline{i} + N\underline{j} + P\underline{k}$ فان (48) تصير

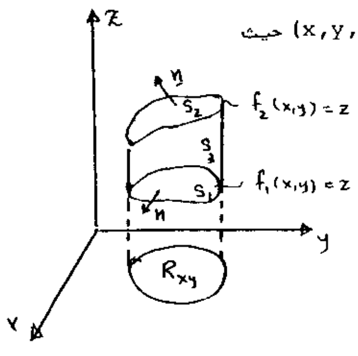
$$\iint_S M\underline{i} \cdot \underline{n}\, dS + \iint_S N\underline{j} \cdot \underline{n}\, dS + \iint_S P\underline{k} \cdot \underline{n}\, dS =$$
$$\iiint_D \frac{\partial M}{\partial x} dV + \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y} dV + \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} dV$$

لذلك يكفي ان نبرهن على ان

$$\iint_S M\underline{i} \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x} dV, \quad \iint_S N\underline{j} \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y} dV$$
$$\iint_S P\underline{k} \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} dV$$

هذه العلاقات متماثلة . لذلك نبرهن الثالثة فقط .

من الفرضيات ، فان D هي مجموعة النقاط (x, y, z) حيث $F_1(x, y) \le z \le F_2(x, y)$ ، $(x, y) \in R_{xy}$. انظر الشكل (15.47) .



الشكل(15.47)

الآن التكامل الحجمي

$$\iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} dV = \iint_{R_{xy}} \left[\int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z)\, dz\right] dA$$
$$= \iint_{R_{xy}} [P(x, y, F_2(x, y)) - P(x, y, F_1(x, y))]\, dA \quad (*)$$

وبالنسبة الى التكامل على السطح نلاحظ ان S مؤلف من السطوح الثلاثة

S_1 : السطح السفلي نقاطه $(x,y,F_1(x,y))$, $(x,y) \in R_{xy}$

S_2 : السطح العلوي نقاطه $(x,y,F_2(x,y))$, $(x,y) \in R_{xy}$

S_3 : السطح الجانبي نقاطه (x,y,z) ، حيث $F_1(x,y) < z < F_2(x,y)$, $(x,y) \in R_{xy}$

وفي بعض المناطق مثل الكرات فان S_3 غير موجود .

على S_1 فان $\underline{n}$ متجه الى اسفل ، لذلك

$$\iint_{S_1} P\,\underline{k}\cdot\underline{n}\,dS = -\iint_{R_{xy}} P(x,y,F_1(x,y))\,dA$$

على S_2 فان $\underline{n}$ متجه الى اعلى ، لذلك

$$\iint_{S_2} P\,\underline{k}\cdot\underline{n}\,dS = \iint_{R_{xy}} P(x,y,F_2(x,y)\,dA$$

على S_3 فان $\underline{n}$ معامد للمتجه $\underline{k}$ ، لذلك

$$\iint_{S_3} P\,\underline{k}\cdot\underline{n}\,dS = 0$$

$$\iint_{S} P\,\underline{k}\cdot\underline{n}\,dS = -\iint_{R_{xy}} P(x,y,F_1(x,y))\,dA + \iint_{R_{xy}} P(x,y,F_2(x,y))\,dA$$

$$= \iint_{R_{xy}} [P(x,y,F_2(x,y)) - P(x,y,F_1(x,y))]\,dA$$

وهو التعبير المساوي لما في (*) . وبذلك نكون قد برهنا المطلوب .

مثل (15.42) اذا S هو الكرة $x^2+y^2+z^2=9$ واذا $\underline{F} = 4x\,\underline{i} - 3y\,\underline{j} + 5z\,\underline{k}$

احسب $\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS$.

الحل : من الاسهل ايجاد التكامل على المنطقة D .

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{F} = 4 - 3 + 5 = 6$$

$$\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS = \iiint_D \underline{\nabla}\cdot\underline{F}\,dV = \iiint_D 6\,dV = 6\left(\frac{4}{3}\pi\,27\right) = 216\,\pi$$

مثل (15.43) اذا D المنطقة المحدودة بمستوى xy ، ونصف الكرة العلوي من $x^2+y^2+z^2=9$. اذا $\underline{F} = x^3\,\underline{i} + y^3\,\underline{j} + z^3\underline{k}$ احسب $\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS$ حيث S هو حدود D .

الحل :
$$\underline{\nabla}\cdot\underline{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS = \iiint_D \underline{\nabla}\cdot\underline{F}\,dV = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\,dV$$

باستعمال الاحداثيات الكروية

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2} 3\rho^2 \, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{96}{5}\int_0^{2\pi} (-\cos\phi)\Big|_0^{\pi/2} d\theta$$

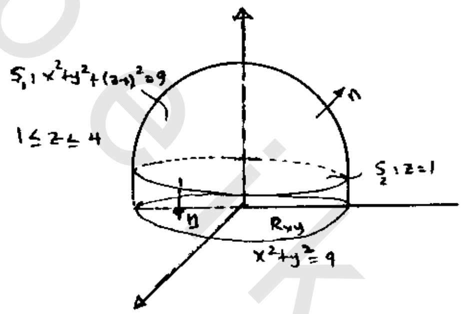
$$= \frac{96}{5}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{192}{5}\pi$$

مثل(15.44) اذا D المنطقة التي يحدها نصف الكرة $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ والمستوى $z = 1$.

تحقق من مبرهنة التباعد ، اذا

$$\underline{F} = x\underline{i} + y\underline{j} + (z-1)\underline{k}$$

الحل : المنطقة هي في الشكل (15.48) .



التكامل الحجمي $\quad \underline{\nabla} \cdot \underline{F} = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\iiint_D \underline{\nabla} \cdot \underline{F} \, dV = 3\iiint_D dV = 3\left(\frac{2}{3}\pi \, 3^3\right) = 54\pi$$

الشكل(15.48)

التكامل على السطوح $S = S_1 \cup S_2$ حيث S_1 نصف الكرة ، S_2 هو المستوى $z = 1$.

نعتبر S_1 سطح مناسيب معادلته $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$ لذلك

$$\underline{n} = \frac{\underline{\nabla} g}{\|\underline{\nabla} g\|} = \frac{x\underline{i} + y\underline{j} + (z-1)\underline{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (y-1)^2}}$$

$$= \frac{x}{3}\underline{i} + \frac{y}{3}\underline{j} + \frac{z-1}{3}\underline{k} \;, \quad \underline{F} \cdot \underline{n} = 3$$

$$\iint_{S_1} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = \iint_{R_{xy}} 3\left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right) dA$$

باستعمال الاحداثيات القطبية

$$= 9\int_0^{2\pi}\int_0^{3} (9 - r^2)^{-1/2} \, r \, dr \, d\theta = 54$$

على S_2 فان $\underline{n} = -\underline{k}$ لذلك $\underline{F} \cdot \underline{n} = -z + 1$ وهذا على المستوى $z = 1$ اي ان $-z + 1 = 0$.

والتكامل

$$\iint_{S_2} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = 0$$

وهكذا تتحقق مبرهنة التباعد .

مثل (15.45) اذا $\underline{F} = xy\,\underline{i} + y^2 z\,\underline{j} + z^3\underline{k}$ احسب $\iint_S \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$ حيث S هو مكعب وحدة :

$0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1$ ، $0 \le z \le 1$.

الحـــل :
$$\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS = \iiint_D \underline{\nabla}\cdot\underline{F}\,dV$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{F} = y + 2yz + 3z^2$$

$$\iiint_D \underline{\nabla}\cdot\underline{F}\,dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\,dy\,dz$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y^2 z + 3y z^2\right)\Big|_0^1 dz$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z + 3z^2\right)dz$$
$$= \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} + z^3\right)\Big|_0^1 = 2$$

تمارين (15.7)

للتمارين (1) – (11) استعمل مبرهنة التباعد لتحسب $\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\,dS$

(1) $\underline{F} = z\underline{i} + x\underline{j} + y\underline{k}$ ، D هو نصف الكرة $0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

(2) $\underline{F} = 3x\underline{i} - 2y\underline{j} + 4z\underline{k}$ ، D هو كـــرة $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$

(3) $\underline{F} = x^2yz\underline{i} + xy^2z\underline{j} + xyz^2\underline{k}$ ، D هو المنـــدوق $0 \le x \le a$ ، $0 \le y \le b$ ، $0 \le z \le c$.

(4) $\underline{F} = x^2\underline{i} + y^2\underline{j} + z^2\underline{k}$ ، D هو المجسم الذي حـــدوده $x + y + z = 4$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$.

(5) $\underline{F} = x^2\underline{i} + y^2\underline{j} + z^2\underline{k}$ ، D هو المكافئي $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$

(6) $\underline{F} = x\underline{i} + 2y\underline{j} + 3z\underline{k}$ ، D هو المكعب $0 \le x \le 1$ ، $0 \le y \le 1$ ، $0 \le z \le 1$.

(7) $\underline{F} = (x+z^2)\underline{i} + (y-z^2)\underline{j} + x\underline{k}$ ، D هو المجسم $0 \le x \le 2\ ,\ 0 \le y^2 + z^2 \le 1$.

(8) $\underline{F} = 2z\underline{i} + x\underline{j} + z^2\underline{k}$ ، D هو المجسم الاسطوانـــي $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ ، $0 \le z \le 2$.

(9) $\underline{F} = \dfrac{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \dfrac{\underline{r}}{\|\underline{r}\|^3}$ ، D هو الكرة $0 \le (x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-1)^2 \le r^2$

(10) $\underline{F} = x^3\underline{i} + y^3\underline{j} + z^3\underline{k}$ ، D هو المخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $z = 1$.

(11) $\underline{F} = (x^3 + \tan yz)\underline{i} + (y^3 - e^{xz})\underline{j} + (3z + x^3)\underline{k}$ ، S هو الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ ، $z = 0$ ، $z = 3$ ، $\underline{n}$ هو الناظم بالاتجاه الخارجي .

(12) اذا $\underline{F} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ واذا D هو المنطقة التي تنطبق عليها شروط مبرهنة التباعد . اثبت ان حجم D هو

$$V(D) = \frac{1}{3}\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\; dS \qquad (49)$$

(13) استعمل (49) لتجد معادلة حجم مخروط دائري قائم ، نصف قطر قاعدته a ، وارتفاعه h .

(14) اذا $\underline{F} = \underline{r}/\|\underline{r}\|^3$ ، اثبت $\underline{\nabla}\cdot\underline{F} = 0$.

(15) اذا $\underline{F}$ حقل متجه ثابت ، اثبت ان $\iint_S \underline{F}\cdot\underline{n}\; dS = 0$.

(16) عرفنا اللابلاسي $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla} f) = \nabla^2 f = f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$. اثبت ان $\iint_S D_{\underline{n}} f\; dS = \iiint_D \nabla^2 f\; dV$ ، $D_{\underline{n}} f$ هو المشتقة الاتجاهية .

(17) اذا $\nabla^2 f \equiv 0$ في المنطقة D ، اثبت ان

$$\iint_S D_{\underline{n}} f\; dS = \iiint_D \|\underline{\nabla} f\|^2\; dV$$

(18) <u>(متطابقة جرين الاولى)</u> اثبت ما يلي

$$_S\; f D_{\underline{n}} f\; dS = \iiint_D (f\nabla^2 g + \underline{\nabla} f\cdot\underline{\nabla} g)\, dV$$

طبق مبرهنة التباعد على $\underline{F} = f\underline{\nabla} g$. انظر التمارين (26),(27) من (15.4).

مسرد المصطلحات

جاوس	Gauss	نصف قطر التدويم	Radius of gyration
حقل متجه	Vector field	مبرهنة ستوكس	Stokes' theorem
حقل حركي	Dynamic field	سطح ممهد	Smooth surface
غير انضغاطي	Incompressible	متعدد الاتصالية	Multiply connected
دوران حقل	Curl of a field	منطقة مصمتة بسيطة	Simple solid region
لابلاسي	Laplacian	تكامل على الخطوط	Line integral
اتصالي	Connected	تكامل على السطوح	Surface integral
جوردان	Jordan	حقل دائم	Steady - state field
طاقة حركية	Kinetic energy	حقل السرعة	Velocity field

Conservative field حقل محافــظ	Potential energy طاقة وضع
Potential function اقتران الجهد	Green's theorem مبرهنة جرين
Solenoidal خلو من التباعد (ملفّي)	Tangential form صيغة مماسية
Simply connected اتصالية بسيطة	Normal form صيغة ناظمية
Independence of Path الاستقلال عن المسار	Flux التدفــق
Upper unit normal ناظم الوحدة العلوي	Inertia القصور الذاتي
Lower unit normal ناظم الوحدة السفلي	

الفهرست الالفبائي