الباب الرابع عشر

التكاملات المضاعفة

ندرس في هذا الباب حساب التكامل لاقترانات بمتغيرين أو بثلاث متغيرات ، اذ أنه يؤلف امتدادا للتكامل المحدد لاقتران بمتغير واحد الذي سبق ودرسناه في الباب الخامس .

(14.1) التكاملات الثنائية

يذكر القارىء أننا عرفنا التكامل المحدد لاقتران $y = f(x)$ على الفترة المغلقة $[a , b]$ بأنه نهاية مجاميع ريمان $R(f,p)$ عندما نجعل $\|P\| \to 0$. نستخدم هنا اسلوبا مشابها لنعرف التكامل الثنائي للاقتران $z = f(x,y)$ المعرف على المستطيل :

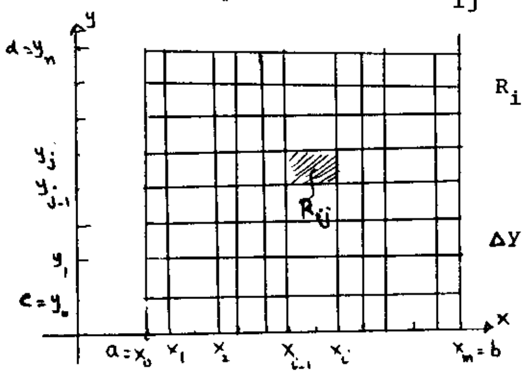
$$R : a \le x \le b \quad , \quad c \le y \le d$$

لكي نجزيء المستطيل R الى مستطيلات جزئية ، نعمد الى فرض تجزئة $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ للفترة $[a , b]$ وتجزئة $P_2 = \{y_0 , y_1, \dots, y_n\}$ للفترة $[c , d]$ حيث :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots\dots\dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots\dots\dots < y_n = d$$

وعندما نرسم المستقيمات العمودية $x = x_i$ لكل $i = 0 , 1 , \dots , m$ وكذلك المستقيمات الافقية $y = y_j$ لكل $j = 0 , 1 , \dots , n$ نحصل على التجزئة
$P = P_1 \times P_2 = \{(x_i, y_j) : i = 0 , 1 , \dots , m \; ; \; j = 0 , 1 , \dots , n\}$
للمستطيل R وينتج عنها المستطيلات الجزئية R_{ij} وعددها mn كما في الشكل (14.1)
يعرف كل منها كما يلي :



الشكل (14.1)

$$R_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1} \le x \le x_i \, , y_{j-1} \le y \le j_i\}$$

لكل $i = 1 , 2 , 3 , \dots , m$

$j = 1 , 2 , 3 , \dots , n$

نضع $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \, , \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$

فتكون مساحة المستطيل R_{ij} هي :

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \; \Delta y_j$$

ثم نختار من كل مستطيل جزئي R_{ij} نقطة (s_i , t_j)

ونحسب المجموع الثنائي :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,t_j)A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,t_j)\Delta x_i\Delta y_j=f(s_1,t_1)\Delta x_1\Delta y_1+\dots+f(s_1,t_n)\Delta x_1\Delta y_n$$

$$+f(s_2,t_1)\Delta x_2\Delta y_1+\dots+f(s_2,t_n)\Delta x_2\Delta y_n$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+f(s_m,t_1)\Delta x_m\Delta y_1+\dots+f(s_m,t_n)\Delta x_m\Delta y_n$$

الذي نطلق عليه اسم مجموع ريمان الثنائي للاقتران $z=f(x,y)$ حسب التجزئة P .

نعرف مقياس التجزئة P ، نكتبه $\|P\|$ ، بأنه طول القطر الأكبر بين اقطار المستطيلات R_{ij} . والان نضع التعريف التالي :

تعريف (14.1) افرض الاقتران $f(x,y)$ معرفا على المستطيل $R=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$

(أ) نقول إن العدد الحقيقي L نهاية مجاميع ريمان $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,t_j)\Delta A_{ij}$ اذا لأي $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,t_j)\Delta A_{ij} - L\right| < \epsilon$$

لجميع التجزئات P على R التي تحقق $\|P\| < \delta$ ولأي اختيارات (s_i,t_j) في R_{ij} .

في هذه الحالة نكتب

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,t_j)\Delta A_{ij} = L$$

(ب) اذا نهاية $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,t_j)\Delta A_{ij}$ موجودة نسميه التكامل الثنائي للاقتران $z=f(x,y)$ على المستطيل R ونكتب

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,t_j)\Delta A_{ij}=\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

ونقول أن $f(x,y)$ قابل للتكامل على R .

مثل (14.1) احسب $\iint_R k\,dx\,dy$ عندما k عدد ثابت و R المستطيل :

$a \le x \le b \quad , \quad c \le y \le d$.

الحل : نفرض تجزئة منتظمة $P_1=\{x_0,\dots,x_m\}$ للفترة المغلقة $[a,b]$ وتجزئة منتظمة $P_2=\{y_0,y_1,\dots,y_n\}$ للفترة المغلقة $[c,d]$. يكون $\Delta x_i=\frac{b-a}{m}$ ، $\Delta y_i=\frac{d-c}{n}$. فاذا (s_i,t_j) نقطة في المستطيل الجزئي R_{ij} فان $f(s_i,t_j)=k$.

لذلك نجد أن :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,t_i)\Delta x_i\Delta y_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} k\,\frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}$$

$$= k\,\frac{b-a}{m}\,\frac{d-c}{n}\,(m\,n)$$
$$= k\,(b-a)\,(d-c)$$

أي أن مجموع ريمان الثنائي عدد ثابت مهما تكن التجزئة المنتظمة P ولأي طريقة نختار بها النقاط (s_i, t_j) . لذلك نجد أن :

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} f(s_i, t_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j = k\,(b-a)\,(d-c)$$

وهذا يعني أن :

$$\iint_R k\,dx\,dy = k\,(b-a)\,(d-c)$$

عندما $f(x,y) \geq 0$ لكل $(x,y) \in R$ فان $f(s_i,t_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$ هو حجم متوازي السطوح الذي قاعدته المستطيل R_{ij} وارتفاعه $f(s_i,t_j)$. ونستطيع أن نعتمده لتقريب حجم المجسم الذي قاعدته المستطيل R_{ij} ويحده من الأعلى السطح $z=f(x,y)$. لذلك يمكننا أن نعتبر مجموع ريمان الثنائي $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(s_i,s_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$ يقرب حجم المجسم الذي قاعدته المستطيل R ويحده من الأعلى السطح $z=f(x,y)$.

مبرهنة (14.2) افرض أن الاقتران $z=f(x,y)$ قابل للتكامل على المستطيل R وان $f(x,y) \geq 0$ لكل $(x,y) \in R$. ان حجم المجسم الذي قاعدته المستطيل R ويحده من الأعلى السطح $z = f(x,y)$ هو :

$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

مثل (14.2) اكتب تكاملا ثنائيا يمثل حجم المجسم الذي يقع تحت السطح $z = x + 2y + 1$ وقاعدته المستطيل : $R:\ 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 2$

الحل : يحد المجسم من الاعلى السطح $z=f(x,y)=x + 2y + 1$ بينما قاعدة المستطيل R . لذلك الحجم المطلوب هو :

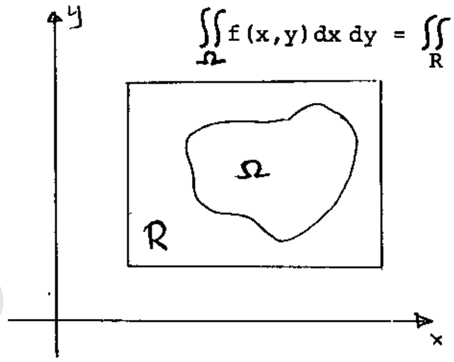
$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R (x + 2y + 1)\,dx\,dy$$

التكامل الثنائي على منطقة محددة

نستطيع الآن أن نعرف التكامل الثنائي لاقتران $z = f(x,y)$ متصل على منطقة محددة Ω في المستوى xy . ما نحتاجه هنا هو أن نجعل المنطقة Ω داخل مستطيل R كما في الشكل (14.2) ونأخذ اقترانا $z=F(x , y)$ بحيث $F(x,y)=f(x,y)$ عندما $(x,y) \in \Omega$ بينما $F(x,y) = 0$ عندما (x,y) في R وليست في Ω . فاذا كان التكامل الثنائي للاقتران $F(x,y)$ على المستطيل R موجودا فان التكامل الثنائي للاقتران

$z=f(x,y)$ على المنطقة Ω نعرفه بأنه :

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R} F(x,y)\,dx\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$



الشكل(14.2)

والآن أي الاقترانات قابلة للتكامل ؟ الجواب ليس سهلا قياسا على ما عرفنا في حال اقتران ذي متغير واحد . ولكن الاقتران المتصل قابل للتكامل، كما في المبرهنة التالية ، التي نقدمها دون برهان .

<u>مبرهنة (14.3)</u> اذا كان الاقتران $z=f(x , y)$ متصلا على منطقة محددة تتألف حدودها من عدد منته من الاجزاء التي تتصل عند اطرافها وكل جزء منحنى ممهد ، فان $z=f(x , y)$ قابل للتكامل على هذه المنطقة .

مرة اخرى ، اذا كان $z=f(x , y)$ متصلا على المنطقة Ω ويحقق $f(x,y) \geq 0$ لكل $(x,y) \in \Omega$ فان حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة Ω ويحده من الأعلى السطح $z = f(x , y)$ هو :

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

<u>خصائص التكامل الثنائي</u>

نعدد هنا خصائص للتكامل الثنائي تشبه خصائص وجدناها في التكامل المحدد لاقتران ذي متغير واحد . نفرض أن الاقترانات والمناطق التي تظهر في هذه الخصائص لها الأوصاف التي تضمن وجود التكامل الثنائي المعني :

(أ) اذا c عدد ثابت فان :
$$\iint_{\Omega} c\, f(x,y)\,dx\,dy = c\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

(ب)
$$\iint_{\Omega} [f(x,y) + g(x,y)]\,dx\,dy = \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy$$

(جـ) اذا المنطقة Ω اتحاد لمنطقتين " غير متداخلتين " Ω_1 و Ω_2 فان :
$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

(د) اذا $f(x,y) \leq g(x,y)$ لكل $(x,y) \in \Omega$ فان ;
$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{\Omega} g(x,y)\,dx\,dy$$

تمارين (14.1)

(1) افرض المستطيل : $R = \left\{(x,y) : a \le x \le b \ ,\ c \le y \le d\right\}$. احسب $\iint\limits_R xy\ dx\ dy$ باستعمال تعريف (14.1) ومستخدما تجزئات منتظمة لكل من الفترتين $[a,b]$ و $[c,d]$ مع أخذ النقطة $(s_i\ ,\ t_j)$ لتكون المركز للمستطيل R_{ij} .

(2) أي التكاملين $\iint\limits_R (4x^3y + 4xy^3)\,dx\,dy$ و $\iint\limits_R (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)\,dx\,dy$ الأكبر ؟

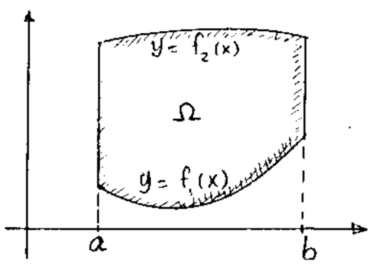
(3) احسب مجموع ريمان الثنائي للاقتران $f(x,y) = x^2 + 4y$ على المستطيل $0 \le x \le 2$ ، $0 \le y \le 3$ حسب التجزئة $P_1 = \{0\ ,\ 1\ ,\ 2\}$ للفترة $[0,2]$ والتجزئة $P_2 = \{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\}$ للفترة $[0\ ,\ 3]$ وافرض (s_i, t_j) رأس المستطيل R_{ij} من الاعلى الى اليمين .

(4) احسب مجموع ريمان الثنائي للاقتران $f(x,y) = 2x + x^2y$ على المستطيل $-2 \le x \le 2$ ، $-1 \le y \le 1$ حسب التجزئة $P_1 = \{-2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\}$ للفترة $[-2\ ,\ 2]$ والتجزئة $P_2 = \left\{-1, -\frac{1}{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 1\right\}$ للفترة $[-1\ ,\ 1]$ وافرض (s_i, t_j) رأس المستطيل R_{ij} من الأسفل الى اليسار .

(14.2) حساب التكامل الثنائي

ان حساب التكامل الثنائي لاقتران $z = f(x,y)$ متصل على المنطقة Ω باستخدام التعريف (14.1) يكاد يكون مستحيلا بسبب التعقيدات التي تصادفنا عند حساب مجاميع ريمان الثنائية . لذا نحتاج الى اسلوب سهل يمكننا من حساب التكامل الثنائي على غرار الاسلوب الذي مكننا من تيسير حساب التكامل لاقتران ذي متغير واحد . هنا نلجأ الى التكامل التتابعي الذي نستخدمه عندما تأخذ المنطقة Ω أحد الشكلين المميزين التاليين :

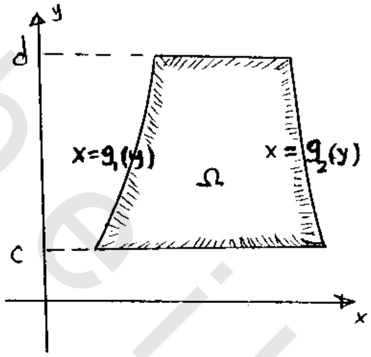
(أ) **الشكل الأول** : تكون فيه المنطقة كما في الشكل (14.3) تقع الى الأعلى من رسم الاقتران $y = f(x_1)$ والى الأسفل من رسم الاقتران $y = f_2(x)$ من $x = a$ الى $x = b$. أي أن :



الشكل (14.3)

$$\Omega = \left\{(x,y) : a \le x \le b \ , \ f_1(x) \le y \le f_2(x)\right\}$$

والاقترانان $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متصلان على الفترة $[a,b]$. في هذه الحالة يكون التكامل التتابعي هو $\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dx\,dx$ حيث نحسب التكامل المحدد $\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy$ مع ابقاء x ثابتا ، ثم نحسب التكامل للناتج بدلالة x على الفترة المغلقة $[a\ ,\ b]$.



الشكل(14.4)

(ب) <u>الشكل الثاني</u>: تكون فيه المنطقة كما في الشكل (14.4) اذ أنها :

$$\Omega = \left\{(x,y) : c \le y \le d \ , \ g_1(y) \le x \le g_2(y)\right\}$$

والاقترانان $g_1(y)$ ، $g_2(y)$ متصلان على الفترة المغلقة $[c\ ,\ d]$. في هذه الحالة يكون التكامل التتابعي هو $\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$ ونجريه بحساب التكامل المحدد $\int_{g_1(x)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx$ في اثناء ذلك يبقى y ثابتا ثم نحسب التكامل المحدد للناتج بدلالة y على الفترة المغلقة $[c\ ,\ d]$.

<u>مثل (14.3)</u> احسب التكامل التتابعي $\int_0^2 \int_x^3 (x^2 + y)\,dy\,dx$.

<u>الحل</u> : بما أن :

$$\int_0^2 \int_x^3 (x^2 + y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\int_x^3 (x^2 + y)\,dy \right) dx$$

نبدأ بحساب التكامل المحدد $\int_x^3 (x^2+y)\,dy$ وفي هذه الأثناء نحافظ على x ثابتا :

$$\int_x^3 (x^2 + y)\,dy = x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \Big|_x^3$$

$$= 3x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 9/2$$

ثم نحسب التكامل المحدد التالي :

$$\int_0^2 \left(3x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}\right) dx$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + 9/2\, x \Big|_0^2$$

$$= 8 - 4 - \frac{4}{3} + 9$$

$$= \frac{35}{3}$$

أي أن

$$\int_0^2 \int_x^3 (x^2 + y)\,dy\,dx = \frac{35}{3}$$

مثل (14.4) احسب التكامل التتابعي $\int_0^1 \int_0^y y\,dx\,dy$.

الحـــل : هذا التكامل نجريه بالتتابع التالي :

$$\int_0^1 \int_0^y y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^y y\,dx\right) dx$$

لذا نحســب أولا :

$$\int_0^y y\,dx = y\,x \Big|_0^y = y^2$$

ثـــم نجـــد :

$$\int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

أي أن

$$\int_0^1 \int_0^y y\,dx\,dy = \frac{1}{3}$$

مبرهنة (14.4) (مبرهنة فيوبيني)

افرض أن الاقتران $z = f(x,y)$ متصل على المنطقة Ω .

(أ) اذا المنطقة Ω لها الشكل الأول فان :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

(ب) اذا المنطقة Ω لها الشكل الثاني فان :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

مثل (14.5) احسب $\iint_\Omega x^3 y\,dx\,dy$ عندما $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \;,\; 0 \le y \le x\}$.

الحـــل : المنطقة Ω هي من الشكل الأول لذلك نستخدم (4) لنجد :

$$\iint_\Omega x^3 y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x x^3 y\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 y^2 \Big|_0^x\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^5\,dx = \frac{1}{12}x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

مثل (14.6) احسب $\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dx\,dy$ عندما $\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 \;,\; y^2 \le x \le y\}$.

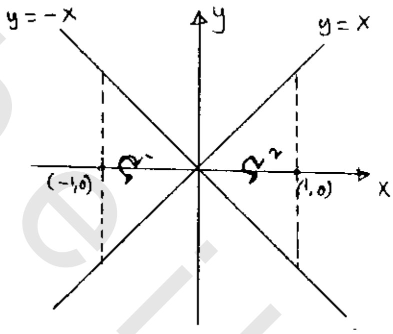
الحـــل : المنطقة Ω هي من الشكل الثاني لذلك نستخدم (5) لنجد :

$$\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y^2}^y \sqrt{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{2}{3}x^{3/2}y^{1/2} \Big|_{y^2}^y dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (y^2 - y^{7/2})\,dy = \frac{2}{3}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{2}{9}y^{9/2}\right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{27}$$

احيانا لا تكون المنطقة Ω من أي الشكلين الاول أو الثاني ولكن يمكن كتابتها كاتحاد منطقتين أو اكثر كل واحدة من أحد هذين الشكلين . عندئذ نكتب التكامل الثنائي على Ω كمجموع عدد من التكاملات الثنائية كل منها يمكن حسابه بتكامل تتابعي .



الشكل (14.5)

مثل (14.7) احسب $\iint_{\Omega} 3x^2 y^2 \, dx\, dy$ عندما Ω المنطقة بين المنحنيين $y = x$ ، $y = -x$ من $x = -1$ الى $x = 1$. انظر الشكل (14.5) .

الحل : نستطيع أن نكتب $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ حيث

$$\Omega_1 = \{(x,y) : -1 \le x \le 0 \;,\; x \le y \le -x\}$$

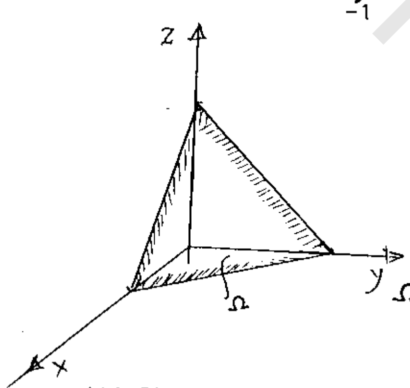
$$\Omega_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \;,\; -x \le y \le x\}$$

وبناء على ذلك نجد أن :

$$\iint_{\Omega} 3x^2y^2 \, dx\, dy = \iint_{\Omega_1} 3x^2y^2 \, dx\, dy + \iint_{\Omega_2} 3x^2y^2 \, dx\, dy$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{x}^{-x} 3x^2y^2 \, dy\, dx + \int_{0}^{1}\int_{-x}^{x} 3x^2y^2 \, dy\, dx$$

$$= -2\int_{-1}^{0} x^5 \, dx + \int_{0}^{1} 2x^5 \, dx = \frac{2}{3}$$



الشكل (14.5)

مثل (14.8) احسب حجم المجسم في الثمن الأول وتحده السطوح $2x + y + z = 4$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$.

الحل : كما يظهر في الشكل (14.5) فان هذا المجسم قاعدته المنطقة

$$\Omega = (x,y) : 0 \le x \le 2 \;,\; 0 \le y \le 4 - 2x$$

التي لها الشكل الأول ويحد المجسم من الاعلى المستوى $2x + y + z = 4$. عندما ندع $z = f(x,y) = 4 - 2x - y$ ونستخدم (3) فاننا نجد أن :

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2x} (4 - 2x - y)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} 4y - 2xy - \frac{1}{2} y^2 \Big|_{0}^{4-2x} dx$$

$$= \int_{0}^{2} (8 - 8x + \frac{3}{2} x^2)\, dx = 4$$

مثل (14.9) احسب حجم المجسم في الثمن الأول وتحده السطوح $z = y^2$ ، $y = x$ ، $x = 4$.

الحل : هذا المجسم قاعدته المثلث

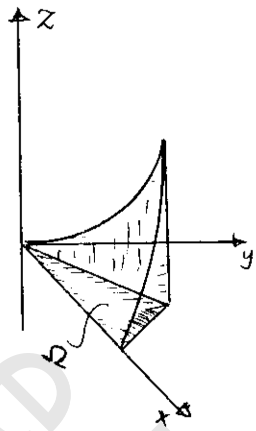
$$\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le y \ , \ 0 \le y \le x\}$$

ويحده من الأعلى السطح $z = f(x,y) = y^2$. انظر الشكل (14.6) . من هنا نجد أن الحجم هو :

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 \int_0^x y^2\,dy\,dx$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^x dx = \int_0^4 \frac{x^3}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{12} x^4 \Big|_0^4 = \frac{64}{3}$$



الشكل (14.6)

حساب المساحة بالتكامل الثنائي

نستطيع أن نستخدم تكاملا ثنائيا لنحسب مساحة منطقة Ω في المستوى وذلك بفرض $f(x,y) = 1$ مما يمكننا أن نفسر $\iint_{\Omega} dx\,dy$ بأنه حجم مجسم قاعدته Ω وله سمك منتظم يساوي وحدة واحدة . أي أن :

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = V = (1) \times (\Omega \text{ مساحة })$$

وهذا يعني أن :

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = (\Omega \text{ مساحة المنطقة }) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

مثل (14.10) احسب مساحة المنطقة التي تحدها المنحنيات $y^2 = -x$ ، $x - y = 4$ ، $y = -1$ ، $y = 2$.

الحل : المنطقة Ω هي من الشكل الثاني حيث

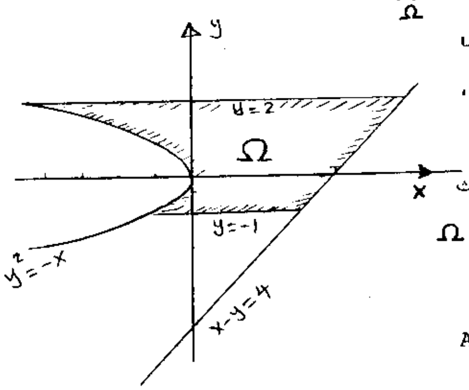
$$\Omega = (x,y) : -1 \le y \le 2 \ , \ -y^2 \le x \le 4 + y$$

انظر الشكل (14.7) . مساحتها A هي :

$$A = \iint_{\Omega} dx\,dy = \int_{-1}^{2} \int_{-y^2}^{4+y} dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x \Big|_{-y^2}^{4+y}\right) dy = \int_{-1}^{2} (4 + y + y^2)\,dy$$

$$= 4y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-1}^{2} = \frac{33}{2}$$



الشكل (14.7)

تمارين (14.2)

في التمارين (1) - (8) احسب التكامل التتابعي وارسم المنطقة Ω التي يجري عليها التكامل :

(1) $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{1-x}^{x} x^2 y \; dy\, dx$

(2) $\displaystyle\int_{2}^{8}\int_{0}^{\ln x} e^{y}\, dy\, dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y)\, dy\, dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{2y} (4x - y)\, dx\, dy$

(5) $\displaystyle\int_{3}^{5}\int_{y}^{2y} \frac{x}{y}\, dx\, dy$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x}^{x^2} (3x - y)\, dy\, dx$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1+\cos y} x^2 \sin y\, dx\, dy$

(8) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-y-1}^{y-1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

في التمارين (9) - (20) احسب التكامل الثنائي :

(9) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{x}{x^2 + 1}\, dx\, dy$ عندما $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \;,\; 0 \le y \le 1\}$.

(10) $\displaystyle\iint_{\Omega} x\, y^2\, e^{xy}\, dx\, dy$ عندما $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \;,\; 0 \le y \le 2\}$.

(11) $\displaystyle\iint_{\Omega} \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy$ عندما Ω المنطقة التي تحدها المستقيمات $x = 1$ ، $y = 0$، $y = x$.

(12) $\displaystyle\iint_{\Omega} x \ln y\, dx\, dy$ عندما Ω المنطقة التي تحدها المنحنيات $xy=1$ ، $x = 2$، $y = 1$.

(13) $\displaystyle\iint_{\Omega} (y + 1)\, dx\, dy$ عندما Ω المنطقة بين المنحنيين $y = \sin x$، $y = \cos x$، من $x = 0$ الى $x = \frac{\pi}{4}$.

(14) $\displaystyle\iint_{\Omega} x^3 \cos xy\, dx\, dy$ عندما Ω المنطقة التي تحدها المنحنيات $y = x^2$ ، $y = 0$، $y = 2$.

(15) $\displaystyle\iint_{\Omega} (x^{1/2} - y^2)\, dx\, dy$ عندما Ω المنطقة بين المنحنيين $y = x^2$، $y = x^{1/4}$.

(16) $\displaystyle\iint_{\Omega} (x^2 + 3y^2)\, dx\, dy$ عندما $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}$.

(17) $\displaystyle\iint_{\Omega} \sqrt{xy}\, dx\, dy$ عندما $\Omega = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 \;,\; y^2 \le x \le y\}$.

(18) $\displaystyle\iint_{\Omega} (x^4 + y^2)\, dx\, dy$ عندما Ω المنطقة بين المنحنيين $y = x^3$ ، $y = x^2$.

(19) $\displaystyle\iint_{\Omega} 3x^2 y^2\, dx\, dy$ عندما Ω المنطقة بين المنحنيين $y = x$ ، $y = -x$ من $x = -1$ الى $x = 1$.

(20) $\iint\limits_{\Omega}(4-y^2)\,dx\,dy$ عندما Ω المنطقة بين المنحنيين $y^2 = 2x$ ، $y^2 = 8 - 2x$.

في التمارين (21) - (26) استعمل تكاملا ثنائيا لتحسب مساحة المنطقة Ω التي تحدها المنحنيات المنصوص عليها :

(21) $2y - x - 4 = 0$, $x^2 = 4y$ (22) $x = 4y - y^2$, $y = x$

(23) $xy = 6$, $x + y = 5$ (24) $x = e$, $y = x$, $xy = 1$

(25) $y = -2$, $y = x - 1$, $y = \ln x$ (26) $x = 4 - 3y^2$, $x = y^2$

في التمارين (27) - (32) ارسم المنطقة Ω التي يجري عليها التكامل التتابعي. بدّل ترتيب اجراء التكامل واحسب التكامل التتابعي الناتج :

(27) $\int_0^1 \int_{2x}^{2} e^{y^2}\,dy\,dx$ (28) $\int_0^9 \int_y^3 \sin x^3\,dx\,dy$

(29) $\int_0^2 \int_1^{e^x} dy\,dx$ (30) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos x^2\,dx\,dy$

(31) $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}\,dy\,dx$ (32) $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x\,e^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

في التمارين (33) - (40) استخدم تكاملا ثنائيا لتحسب حجم ما يلي :

(33) المجسم T الذي تحده المستويات الاحداثية الثلاث والمستوى $x + y + z = 3$.

(34) المجسم T في الثمن الأول وتحده المستويات الاحداثية والمستويان $x + 2y = 2$ ، $x + 4y + 2z = 8$.

(35) المجسم T الذي تحده المستويات الاحداثية ، السطح $z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ والمستويان $x = -2$ ، $y = 3$.

(36) المجسم T في الثمن الأول وتحده السطوح : $x^2 + y^2 = 9$ ، $z = 2x$ ، $y = 0$ ، $z = 0$.

(37) المجسم T في الثمن الأول وتحده السطوح : $z = 4 - x^2$ ، $x + y = 2$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$.

(38) المجسم T الذي تحده السطوح : $z = x^2 + 4$ ، $y = 4 - x^2$ ، $x + y = 0$ ، $z = 0$.

(39) المجسم T الذي تحده السطوح : $x^2 + y^2 = 1$ ، $z = 0$ ، $2x + 2y + 3z = 6$.

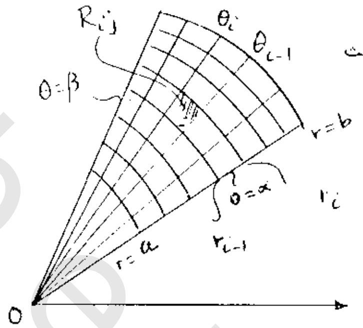
(40) المجسم T في الثمن الأول وتحده السطوح : $4x^2 + z^2 = 1$ ، $y = x$ ، $y = 0$ ، $z = 0$.

(41) مجسم T قاعدته المنطقة Ω في المستوى xy ويحده من الاعلى السطح $z = x^2 + y^2$ وحجمه هو : $V = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

ارسم المنطقة Ω ثم اكتب الحجم V بتكامل تتابعي جديد بعد تبديل التتابع الذي يجري فيه التكامل .

(14.3) التكاملات الثنائية بالاحداثيات القطبية

ندرس في هذا البند حساب تكامل ثنائي لاقتران $f(r,\theta)$ على منطقة Ω معطـاة بالاحداثيات القطبية ·



الشكل (14.8)

نبدأ بمنطقة بسيطة R كما في الشكل (14.8) حيث

$$R = \{(r,\theta) : a \le r \le b \ , \ \alpha \le \theta \le \beta\}$$

نفرض تجزئة $\{r_0, r_1, \dots, r_m\}$ للفترة المغلقة $[a,b]$ وتجزئة $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\}$ للفترة المغلقة $[\alpha,\beta]$ · ينتج عنهما تجزئة P للمنطقة R الى مناطق R_{ij} عددها $m \times n$ وكل منها " شبه مستطيل " يقع بين دائرتين لهما القطب مركز مشترك ونصفا قطريهما r_i ، r_{i-1} · وبين شعاعين θ_{j-1} ، θ_j ينطلقان من القطب ·

نختار النقطة $(\bar{r}_i , \bar{\theta}_j)$ مركز المنطقة R_{ij} (أي أن $\bar{r}_i = \frac{r_{i-1}+r_i}{2}$ ، $\bar{\theta}_j = \frac{\theta_{j-1}+\theta_j}{2}$)·

نجعل $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ، $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ · مساحة المنطقة R_{ij} هي :

$$\begin{aligned}\Delta A_{ij} &= \frac{1}{2}\Delta\theta_j\, r_i^2 - \frac{1}{2}\Delta\theta_j\, r_{i-1}^2\\ &= \frac{1}{2}\Delta\theta_j\,(r_i^2 - r_{i-1}^2)\\ &= \frac{1}{2}\Delta\theta_j\,(r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})\\ &= \bar{r}_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j\end{aligned}$$

والآن نحسب مجموع ريمان :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\bar{r}_i,\bar{\theta}_j)\,\Delta A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\bar{r}_i,\bar{\theta}_j)\,\bar{r}_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j \quad \dots\dots\dots \ (7)$$

واذا الاقتران $f(r,\theta)$ متصل على المنطقة R فان النهاية :

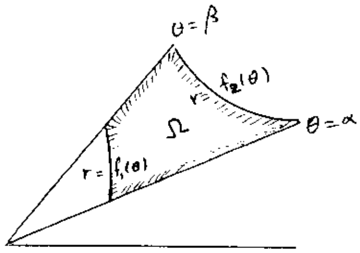
$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\bar{r}_i,\bar{\theta}_j)\,\bar{r}_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j$$

موجودة ونسميها التكامل الثنائي للاقتران $f(r,\theta)$ على المنطقة R ونكتب :

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \iint_R f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\bar{r}_i,\bar{\theta}_j)\,\bar{r}_i\,\Delta r_i\,\Delta\theta_j \quad \dots(8)$$

افرض أن الاقتران $z = f(r,\theta)$ متصل على المنطقة Ω التي تظهر في الشكل (14.9) حيث :

$$\Omega = \{(r,\theta) : \ \le \theta \le \ \ , \ f_1(\theta) \le r \le f_2(\theta)\}$$



الشكل (14.9)

والاقترانان $f_1(\theta)$ ، $f_2(\theta)$ متصلان ويحققان $0 \le a \le f_1(\theta) \le f_2(\theta) \le b$ والعددان b , a ثابتان . نضع Ω داخل "شبه مستطيل" $R = \{(r,\theta) : a \le r \le b \ , \ \alpha \le \theta \le \beta\}$. نأخذ اقترانا $F(r,\theta)$ معرفا على R و $F(r,\theta) = f(r,\theta)$ عندما $(r,\theta) \in \Omega$ بينما $F(r,\theta) = 0$ عندما $(r,\theta) \in R$ ولكن $(r,\theta) \notin \Omega$. اذا التكامل الثنائي $\iint_R F(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$ موجود فاننا نعرف :

$$\iint_\Omega f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta = \iint_R F(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

اذا $f(r,\theta) \ge 0$ لكل $(r,\theta) \in \Omega$ فان حجم المجسم الذي قاعدته Ω ويحده من الاعلى السطح $z = f(r,\theta)$ هو :

$$V = \iint_\Omega f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

واذا $f(r,\theta) = 1$ لكل $(r,\theta) \in \Omega$ فان التكامل الثنائي في (10) يعطي مساحة المنطقة Ω . أي أن :

$$A = \iint_\Omega r\, dr\, d\theta = (\text{مساحة المنطقة } \Omega) \qquad \ldots\ldots \quad (11)$$

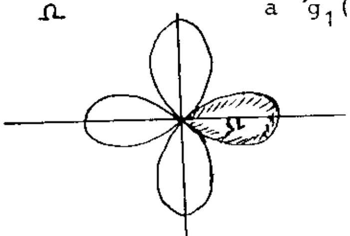
نحسب التكامل الثنائي بالاحداثيات القطبية على النحو التالي :

(أ) اذا المنطقة $\Omega = \{(r,\theta) : \alpha \le \theta \le \beta \ , \ f_1(\theta) \le r \le f_2(\theta)\}$ والاقترانان $f_1(\theta)$ ، $f_2(\theta)$ متصلان ويحققان $0 \le f_1(\theta) \le f_2(\theta)$ فان :

$$\iint_\Omega f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_\alpha^\beta \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

(ب) اذا المنطقة $\Omega = \{(r,\theta) : a \le r \le b \ , \ g_1(r) \le \theta \le g_2(r)\}$ والاقترانان $g_1(r)$ ، $g_2(r)$ متصلان ويحققان $0 \le g_1(r) \le g_2(r)$ فان :

$$\iint_\Omega f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_a^b \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} f(r,\theta)\, r\, d\theta\, dr \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$



الشكل (14.10)

مثل (14.11) احسب مساحة المنطقة Ω التي تقع داخل احدى بتلات الوردة $r = 2\cos 2\theta$.

الحل : نأخذ البتله $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ التي يقسمها المحور القطبي الى نصفين ، يكفي أن نحسب مساحة المنطقة $\Omega_1 = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le 2\cos^2\theta\}$,

انظر الشكل (14.10) ، نجد أن :

$$A = \iint_{\Omega} r\,dr\,d\theta = 2\iint_{\Omega_1} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos 2\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos^2 2\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\theta)\,d\theta$$

$$= 2(\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

قاعدة تحويل الاحداثيات

افرض أن الاقتران $z = f(x,y)$ معرف على المنطقة Ω في مستوى xy ، في بعض الحالات يكون من الأنسب لنا أن نحسب التكامل الثنائي $\iint_R f(x,y)\,dA$ بعد تحويله بالاحداثيات القطبية ، والمبرهنة التالية ، نذكرها دون برهان ، توفر القاعدة التي نستخدمها في تلك الحالات .

مبرهنة (14.5)

افرض أن الاقتران $z = f(x,y)$ متصل على المنطقة Ω ، يكون :

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

و المنطقة G في مستوى $r\theta$ يرسلها التحويل $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ الى المنطقة Ω في مستوى xy .

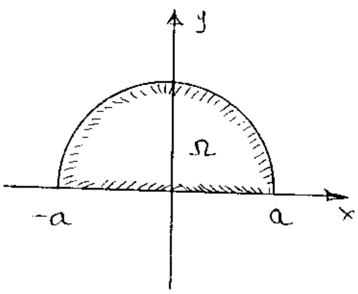
مثل (14.12) استخدم الاحداثيات القطبية لتحسب

$$\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx \ .$$

الحل : المنطقة Ω التي يجري عليها التكامل التتابعي تظهر في الشكل (14.11) ، فهي :

$$\Omega = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \pi \ , \ 0 \le r \le a\}$$

بينما $(x^2+y^2)^{3/2} = (r^2)^{3/2} = r^3$ ، باستعمال (15) نحصل على :



الشكل (14.11)

$$\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{a} (r^3)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^a d\theta = \int_0^{\pi} \frac{a^5}{5}\,d\theta = \frac{\pi a^5}{5}$$

مثل (14.13) جد حجم المجسم T الذي يقع داخل الكرة $x^2+y^2+z^2=25$ وخارج الاسطوانة $x^2+y^2=9$. انظر الشكل (14.12)

الحـــل : ان مستوى xy يقسم المجسم T الى نصفين النصف العلوي T_1 قاعدته المنطقة المستوية $\Omega=\{(r,\theta) : 3 \le r \le 5 \;,\; 0 < \theta < 2\pi\}$ ويحد T_1 من الأعلى سطح نصف الكرة $z = f(x,y) = \sqrt{25-(x^2+y^2)}$ ، اي ان :

$$f(x,y) = f(r\cos\theta \,,\, r\sin\theta) = \sqrt{25-r^2}$$

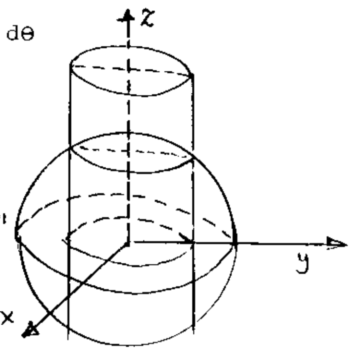
نحسب الآن حجم المجسم T لنجد :

$$V = 2\iint_{\Omega} \sqrt{25-(x^2+y^2)}\; dx\,dy = 2\iint_{\Omega} \sqrt{25-r^2}\; r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_3^5 r\sqrt{25-r^2}\; dr\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(25-r^2)^{3/2}\Big|_3^5\; d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{64}{3}\, d\theta = \frac{256\pi}{3}$$



الشكل (14.12)

تمارين (14.3)

في التمارين (1) - (6) احسب التكامل التتابعي باستخدام الاحداثيات القطبية :

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \cos(x^2+y^2)\, dx\,dy$ (4) $\displaystyle\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2\, dy\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\,dx$ (6) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x y\, dy\,dx$

في التمارين (7) - (9) استعمل الاحداثيات القطبية لتحسب التكامل الثنائي :

(7) $\displaystyle\iint_{\Omega} (x^2+y^2)^{3/2}\, dx\,dy$ عندما $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

(8) $\displaystyle\iint_{\Omega} x^2(x^2+y^2)^3\, dx\,dy$ عندما Ω هي المنطقة بين المنحنيين $y=\sqrt{1-x^2}$ ، $y=0$.

(9) $\displaystyle\iint_{\Omega} \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dx\,dy$ عندما Ω هي المنطقة بين الدائرتين $x^2+y^2=a^2$ ، $x^2+y^2=b^2$ ، $0<a<b$.

في التمارين (10) - (18) احسب مساحة المنطقة Ω التي تقع :

(10) داخل المنحني $r = 2-2\cos\theta$ وخارج الدائرة $r=3$.

(11) داخل المنحني $r = 3 + 2\sin\theta$.

(12) في الربع الأول داخل المنحني $r = \sqrt{2 - \sin 2\theta}$.

(13) في الربع الأول داخل المنحني $r = 1 + \sin\theta$.

(14) داخل الدائرة $r = \frac{3}{2}$ والى يمين المستقيم $4r\cos\theta = 3$.

(15) داخل الدائرة $r = 3\cos\theta$ وخارج الدائرة $r = \cos\theta$.

(16) داخل المنحني $r = 1 + \cos\theta$ وخارج الدائرة $r = 1$.

(17) داخل الدائرة $r = 1$ وخارج المنحني $r = 1 + \cos\theta$.

(18) داخل الدائرة $r = 1$ والى يمين المنحني $r(1 + \cos\theta) = 1$.

في التمارين (19) - (24) احسب حجم المجسم T الذي يحده :

(19) من الأسفل المستوى xy ومن الاعلى السطح $z = 1 - (x^2 + y^2)$.

(20) من الأسفل المستوى xy ومن الأعلى السطح $x^2 + y^2 + z^6 = 5$.

(21) من الأسفل المستوى xy ومن الاعلى المستوى $z = y + b$ ومن الجوانب الاسطوانة الدائرية $x^2 + y^2 = b^2$.

(22) من الأسفل المستوى xy ومن الأعلى السطح $z = 1 - (x^2 + y^2)$ ومن الجوانب الاسطوانة الدائرية $x^2 + y^2 - x = 0$.

(23) من الأسفل المستوى xy ومن الأعلى السطح الكروي $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ومن الجوانب الاسطوانة الدائرية $x^2 + y^2 = 1$.

(24) من الأسفل المستوى xy ومن الأعلى السطح $z = 4r^2$ ومن الجوانب الاسطوانة الدائرية $r = 3\sin\theta$.

(25) نعرف التكامل المعتل :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{a\to 0} \iint_{\Omega_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

حيث Ω_a المنطقة داخل الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$. اثبت أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi$$

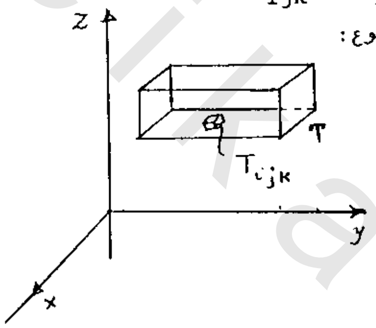
(14.4) التكاملات الثلاثيــة

ان الاسلوب الذي استخدمناه لتعريف وحساب التكامل الثنائي نعيده هنا لنقدم التكامل الثلاثي .

افرض أن الاقتران $f(x,y,z)$ متصل على متوازي السطـوح القائـم :

$$T = \{(x,y,z) : a \le x \le b \ , \ c \le y \le d \ , \ g \le z \le h\}$$

نفرض التجزئة $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$ للفترة $[a,b]$ والتجزئة $P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ للفترة $[c\ ,\ d]$ والتجزئة $P_3 = \{z_0, z_1, \ldots\ldots, z_n\}$ للفترة $[g,h]$. باستخدام مستويات تمر بنقاط هذه التجزئات الثلاث وكل منها يوازي أحد المستويات الاحداثية نحصل على تجزئة $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ لمتوازي السطوح T تتكون من متوازيات سطوح جزئية T_{ijk} عددها $l\,m\,n$. حجم T_{ijk} هو $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$.



نختار نقطة (u_i, v_j, w_k) في T_{ijk} ونحسب المجموع :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} f(u_i, v_j, w_k)\, \Delta V_{ijk}$$

ونسميه مجموع ريمان للاقتران $f(x,y,z)$ حسب التجزئة P .

الشكل (14.13)

تعريف (14.5)

اذا النهايــــة

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} f(u_i, v_j, w_k)\, \Delta V_{ijk}$$

موجودة نسميها التكامل الثلاثي للاقتران $f(x,y,z)$ على المجسم T ونكتب :

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv = \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} f(u_i, v_j, w_k)\, \Delta V_{ijk} \ldots (15)$$

هنا $\|P\|$ (مقياس P) هو طول اكبر قطر لمتوازيات السطوح T_{ijk} . كما اننا نعرف نهاية مجموع ريمان الثلاثي بالاسلوب نفسه الذي استخدمناه لتعريـف مجمـوع ريمـان الثنائـي .

والآن لتعريف التكامل الثلاثي للاقتران $f(x,y,z)$ على مجسم محدود T فاننا نجعل المجسم T داخل متوازي سطوح قائم T' ونعرف اقترانا $F(x,y,z)$ على T' بـان نأخذ $F(x,y,z) = f(x,y,z)$ عندما $(x,y,z) \in T$ بينمـا $F(x,y,z) = 0$ عندمـا

$(x,y,z)\in T'$ لكن $(x,y,z)\notin T$. اذا التكامل الثلاثي $\iiint_{T'} F(x,y,z)\,dv$ موجود

نعرف التكامل الثلاثي للاقتران $f(x,y,z)$ على T بانه :

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv = \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{T'} F(x,y,z)\,dv \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

كتطبيق فيزيائي للتكامل الثلاثي ، افرض أن جسما صلبا له شكل المجسم T في الفضاء الثلاثي وان كثافة هذا الجسم متغيرة ويمثلها اقتران $\rho(x,y,z)$ متصل على T . ان كتلة هذا الجسم هي :

$$M = \iiint_T \rho(x,y,z)\,dv \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

وعندما $\rho(x,y,z) = 1$ لكل $(x,y,z)\in T$ واذا V حجم الجسم فان :

$$v = 1 \times v \quad = (\text{الحجم} \times \text{الكثافة}) \quad = \quad (\text{الكتلة})$$

اي أن :

$$V = \iiint_T dv = \iiint_T dx\,dy\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

ان عملية حساب التكامل الثلاثي لاقتران $f(x,y,z)$ متصل على مجسم T من التعريف مباشرة معقدة ان لم تكن احيانا مستحيلة . لذا نلجأ الى حساب تكامل تتابعي مناسب ليعطينا قيمة التكامل الثلاثي . يعتمد التكامل التتابعي الذي نختاره على شكل المجسم T ونوضح ذلك بالحالتين التاليتين حيث اعتمدنا على موقع المجسم T بالنسبة الى مستوى xy . وعلى غرارهما نتعامل مع الحالات الاخرى عندما نعتمد على موقع T بالنسبة الى مستوى yz أو مستوى xz .

(أ) افرض أن :

$$T = \{(x,y,z) : a \le x \le b \ , \ g_1(x) \le y \le g_2(x) \ , \ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$$

حيث جميع الاقترانات التي تظهر في هذا الوصف متصلة . ان المجسم T هو مجموعة كل النقاط (x,y,z) في R^3 التي تقع الى الأعلى من السطح $z=h_1(x,y)$ والى الأسفل من السطح $z=h_2(x,y)$. أما مسقطه في مستوى xy فهو المنطقة $\Omega=\{(x,y) = a \le x \le b \ , \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ التي لها الشكل الأول .

اذا الاقتران $f(x,y,z)$ متصل على المجسم T فان :

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv = \iint_{\Omega} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right) dA$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

نحسب التكامل التتابعي في (19) باجراء التكامل المحدد للاقتران $f(x,y,z)$ بدلالة z (في اثناء ذلك نعتبر x , y ثابتين) من $h_1(x,y)$ الى $h_2(x,y)$. ثم نكامل الناتج بدلالة y (في اثناء ذلك نعتبر x ثابتا) من $g_1(x)$ الى $g_2(x)$. اخيرا نكامل الناتج بدلالة x من a الى b .

(ب) افرض أن :

$$T = \{(x,y,z) : c \le y \le d \ , \ g_1(y) \le x \le g_2(y) \ , \ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}$$

وجميع الاقترانات التي تظهر في هذا الوصف متصلة . ان المجسم T هو مجموعة كل النقاط (x,y,z) في R^3 التي تقع الى الاعلى من السطح $z = h_1(x,y)$ والى الاسفل من السطح $z = h_2(x,y)$. بينما مسقط T في مستوى xy هو المنطقة $\Omega = \{(x,y) : c \le y \le d \ , \ g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$ التي لها الشكل الثاني .

اذا الاقتران $f(x,y,z)$ متصل على المجسم T فان :

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv = \iint_\Omega \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dA \right.$$

$$= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_1(y)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy \ \ ....(20)$$

مثل (14.14) احسب التكامل التتابعي $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^z (x+y+z)\,dy\,dz\,dx$.

الحل : نحسب التكاملات المحددة بالتتابع التالي :

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^z (x+y+z)\,dy\,dz\,dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} (xy + \frac{1}{2}y^2 + zy)\Big|_0^z \,dz\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} (xz + \frac{3}{2}z^2)\,dz\,dx = \int_0^1 (\frac{1}{2}xz^2 + \frac{1}{2}z^3\Big|_0^{x^2} \,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^5 + x^6)\,dx = \frac{1}{2}(\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{13}{84}$$

مثل (14.15) احسب $\iiint_T y\,dv$ اذا المجسم T يقع في الثمن الأول وتحده المستويات الاحداثية الثلاث والمستوى $x + y + z = 1$.

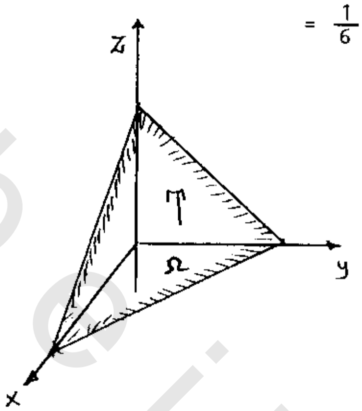
الحل : ان المجسم T يحوي النقاط التي تحقق $0 \le z \le 1 - x - y$ ومسقطه في مستوى xy هو المنطقة $\Omega = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 - x\}$ التي تأخذ الشكل الأول . انظر الشكل (14.14) . لذلك نجد أن :

$$\iiint_T y\,dv = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right|_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\, dx = -\frac{1}{24} (1 - x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$



الشكل(14.14)

مثل (14.16) احسب حجم المجسم T الذي يقع بين السطحين $z = x^2 + y^2$، $2z = 1 - x^2 - y^2$.

الحــل : يتقاطع السطحان في منحني C هـو :

$$2x^2 + 2y^2 = 1 - x^2 - y^2$$

أي أن :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$$

وعلى ذلك فـالمجسم T يحوي النقـــاط (x,y,z) التــي تحقق :

$$x^2 + y^2 \le z \le \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2)$$

ومسقطه في مستوى xy قرص دائري مركزه نقطة الأصل ونصف قطره $\frac{1}{\sqrt{3}}$. أي أن :

$$\Omega = \left\{(r,\theta) : 0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{3}} \ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

نحسب الآن حجم المجسم T لنجد :

$$V = \iiint_T dv = \iint_\Omega \left(\int_{x^2+y^2}^{\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)} dz \right) dA$$

$$= \frac{1}{2} \iint_\Omega (1 - 3x^2 - 3y^2)\, dA$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1 - 3r^3)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\theta$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{12}$$

مثل (14.17) احسب حجم المجسم T في الثمن الأول وتحده السطوح $z = x^2$ ، $z = x^3$ ، $y = z^2$ ، $y = 0$.

الحــل : ان النقـاط (x,y,z) في المجسم T تحقق $0 \le y \le z^2$ ومسقطه في مستــوى xz هو المنطقة : $\Omega = \left\{(x,z) : 0 \le x \le 1 \ ,\ x^3 \le z \le x^2 \right\}$. نحسب حجم المجسم T ونجد أن:

$$V = \iiint_T dv = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \int_0^{z^2} dy\, dz\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} z^2 \, dz \, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^6 - x^9) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} (\frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} \Big|_0^1 = \frac{1}{70}$$

مثل (14.18) احسب كتلة المجسم T الذي تحده المستويات $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، $z = \pm 1$ ، وكثافته هي $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

الحـل : ان كتلة المجسم T هي :

$$M = \iiint_T \rho(x,y,z) \, dv = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dz$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \Big|_{-1}^{1} \, dy \, dx$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + \frac{1}{3}) \, dy \, dx = 2 \int_{-1}^{1} (x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{3} y \Big|_{-1}^{1} \, dx$$

$$= 4 \int_{-1}^{1} (x^2 + \frac{1}{3}) \, dx = 4 (\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

تمارين (14.4)

في التمارين (1) – (6) ارسم المجسم T الذي يجري عليه التكامل التتابعي ثم احسب التكامل :-

(1) $\int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x \, dy \, dz \, dx$

(2) $\int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y \, dz \, dy \, dx$

(3) $\int_2^3 \int_0^{3y} \int_1^{yz} (2x + y + z) \, dx \, dz \, dy$

(4) $\int_0^1 \int_x^1 \int_x^y xy\, z \, dz \, dy \, dx$

(5) $\int_{-1}^1 \int_0^z \int_0^{x+z} x^2 y z^2 \, dy \, dx \, dz$

(6) $\int_1^2 \int_0^{\ln z} \int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \, dy \, dz$

في التمارين (7) – (9) ارسم المجسم T ثم استخدم ست طرق مختلفة لتكتب تكاملا تتابعيا يمثل التكامل الثلاثي $\iiint_T f(x,y,z) \, dv$ عندما :

(7) المجسم T تحده السطوح $x + 2y + 3z = 6$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$.

(8) المجسم T يحده السطحان $z = 9 - 4x^2 - y^2$ ، $z = 0$.

(9) المجسم T تحده السطوح $x^2 + y^2 = 9$ ، $z = 0$ ، $z = 2$.

(10) افرض أن حجم المجسم T هو :

$$V = \iiint_T dv = \int_0^2 \int_0^{9-x^2} \int_0^{2-x} dz \, dy \, dx$$

ارسم المجسم T ثم ضع حدود التكامل المطلوبة في ما يلي لتحصل في كل حالة على التكامل التتابعي الذي يحسب الحجم :

(أ) $$V = \int_{?}^{?}\int_{?}^{?}\int_{?}^{?} dy\,dx\,dz$$

(ب) $$V = \int_{?}^{?}\int_{?}^{?}\int_{?}^{?} dy\,dz\,dx$$

(جـ) $$V = \int_{?}^{?}\int_{?}^{?}\int_{?}^{?} dz\,dx\,dy + \int_{?}^{?}\int_{?}^{?}\int_{?}^{?} dz\,dx\,dy$$

في التمارين (11) - (17) احسب التكامل الثلاثي :

(11) $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dv$ والمجسم T تحده السطوح $x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 0$ ، $y = 3$ ، $z = -1$ ، $z = 1$.

(12) $\iiint_T xy\,z\,dv$ والمجسم T تحده السطوح $x = 0$ ، $x = 2$ ، $y = -1$ ، $y = 3$ ، $z = 1$ ، $z = 5$.

(13) $\iiint_T x\,dv$ والمجسم T يقع في الثمن الأول وتحده المستويات الاحداثية والمستويات $x + z = 2$ ، $y = 5$.

(14) $\iiint_T z^2\,dv$ والمجسم T يقع بين الكرتين $x^2+y^2+z^2=4$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

(15) $\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dv$ والمجسم T يقع في الثمن الأول وتحده السطوح $z^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 1$.

(16) $\iiint_T \cos y\,dv$ والمجسم T في الثمن الأول وتحده السطوح $z=xy$ ، $z = 0$ ، $x+y=\pi$.

(17) $\iiint_T x\,e^{x+y+z}\,dv$ والمجسم T تحده المستويات الاحداثية وكذلك المستويات $x = 1$ ، $y = \ln 2$ ، $z = \ln 3$.

في التمارين (18) - (25) احسب حجم المجسم T :

(18) في الثمن الأول وتحده المستويات الاحداثية والمستوى $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

(19) تحده السطوح $z + x^2 = 4$ ، $y + z = 4$ ، $y = 0$ ، $z = 0$.

(20) يحده السطحان $x^2 + z^2 = 4$ ، $y^2 + z^2 = 4$.

(21) تحده السطوح $y = 2 - z^2$ ، $y = z^2$ ، $x + z = 4$ ، $x = 0$.

(22) تحده السطوح $z = 9 - x^2$ ، $z = 0$ ، $y = -1$ ، $y = 2$.

(23) تحده المستويات $z = 10 - 2x - 5y$ ، $z = 0$ ، $x = 0$ ، $x = y$ ، $y = 1$.

(24) يحده السطحان $2z = x^2 + y^2$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

(25) تحده السطوح $z = x^2 + y^2$ ، $z = 2x^2 + y^2$ ، $x = y$ ، $x = 3y$ ، $y = 1$.

(26) جد كتلة المجسم T الذي يحده السطحان $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ ، $z = 3x^2 + \frac{1}{4}y^2$ ، الذي كثافته $\rho(x,y,z)$ تتناسب مع بعد النقطة (x,y,z) عن السطح السفلي .

(27) جد كتلة المجسم T الذي تحده المستويات $x + y + z = 1$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ وكثافته $\rho(x,y,z) = \frac{1}{2}(x + y + z)$.

(28) جد كتلة المجسم T الذي تحده المستويات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ ، $z = 0$ ، $z = 1$ وكثافته $\rho(x,y,z)$ تتناسب مع بعد النقطة (x,y,z) عن احد سطوحه .

(29) جد كتلة المجسم T الذي يحده السطحان $x = z^2 + 2y^2$ ، $x = 4 - z^2$ وكثافته $\rho(x,y,z)$ تتناسب مع بعد النقطة (x,y,z) عن محور z .

(30) افرض أن V حجم المجسم T الذي يقع بين السطحين $y = 4 - z^2$ ، $y = |x|$. افرض أن Ω_{xy} ، Ω_{yz} ، Ω_{xz} مساقط T في مستوى xy ، مستوى yz ، مستوى xz على التوالي . فيما يلي اكتب المعلومات المطلوبة لتحصل على المعادلات الصحيحة :

(أ) $V = \iint_{\Omega_{xy}} ?\ ?\ dx\,dy$ (ب) $V = \iint_{\Omega_{xy}} \left(\int_{?}^{?} dz\right) dx\,dy$

(جـ) $V = \iint_{\Omega_{yz}} ?\ ?\ dy\,dz$ (د) $V = \int_{?}^{?}\int_{?}^{?}\int_{?}^{?} dx\,dy\,dz$

(14.5) التكاملات الثلاثية بالاحداثيات الاسطوانية والكروية

افرض أن الاقتران $f(r,\theta,z)$ متصل على المجسم :

$$Q = \{(r,\theta,z) : a \le r \le b \ , \ \alpha \le \theta \le \beta \ , \ c \le z \le d\} \quad \ldots\ldots\ldots \ (21)$$

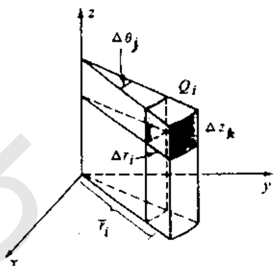
نفرض التجزئة $P_1 = \{r_0, r_1, \ldots, r_l\}$ للفترة $[a , b]$ والتجزئة $P_2 = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m\}$ للفترة $[\alpha , \beta]$ والتجزئة $P_3 = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ للفترة $[c , d]$. نحصل على تجزئة $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ للمجسم Q الى مجسمات Q_{ijk} عددها $l \times m \times n$. ان حجم المجسم Q_{ijk} هو (انظر الشكل (14.16)) : $\Delta V_{ijk} = \bar{r}_i \Delta r_i \, \Delta\theta_j \, \Delta z_k$ حيث $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ، $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ ، $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ، $\bar{r}_i = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}$.

نختار نقطة (u_i, v_j, w_k) في المجسم Q_{ijk} ونعرف التكامل الثلاثي للاقتران $f(r,\theta,z)$ على المجسم Q كنهاية مجموع ريمان على النحو التالي :

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)\,dv = \iiint_Q f(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} f(u_i, v_j, w_k)\; V_{ijk} \quad \ldots(22)$$

حيث مقياس التجزئة $\|P\|$ هو طول أكبر قطر للمجسمات Q_{ijk} . وكما في السابق ، تمكننا النتيجة التالية من حساب التكامل الثلاثي بتكامل تتابعي :



الشكل (14.16)

$$\iiint_Q f(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_a^b \int_\alpha^\beta \int_c^d f(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \; (23)$$

والتكامل التتابعي في (23) هو أحد ست تكاملات تتابعية كل واحد منها يعطينا قيمة التكامل الثلاثي للاقتران $f(r,\theta,z)$ على المجسم Q .

افرض الآن أن الاقتران $f(r,\theta,z)$ متصل على مجسم محدود T يمكن احاطته بمجسم Q كما في (19) . نعرف اقترانا $F(r,\theta,z)$ على Q كامتداد للاقتران $f(r,\theta,z)$ بالاسلوب نفسه الذي استخدمناه في الحالات المشابهة السابقة . واذا كان $\iiint_Q F(r,\theta,z)\,dv$ موجودا نعرف :

$$\iiint_T f(r,\theta,z)\,dv = \iiint_Q F(r,\theta,z)\,dv \quad \ldots\ldots\ldots \; (24)$$

واذا المجسم T يقع بين السطحين $z = h_1(r,\theta)$ ، $z = h_2(r,\theta)$ فان :

$$\iiint_T f(r,\theta,z)\,dv = \iint_\Omega \left(\int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,r\,dz \right) dr\,d\theta \quad \ldots\ldots\ldots \; (25)$$

وهنا المنطقة Ω هي مسقط المجسم T في المستوى xy .

مثل (14.19) احسب التكامل الثلاثي للاقتران $f(r,\theta,z) = k\,r\,z$ (k عدد ثابت) على المجسم T الذي تحده السطوح $r = 1$ ، $r^2 + z^2 = 4$ ، $r = 0$.

الحـل : هنا المجسم T هـو :

$$T = \left\{(r,\theta,z) : 0 \le r \le 1 \;,\; 0 \le \theta \le 2\pi \;,\; 0 \le z \le \sqrt{4 - r^2}\right\}$$

نستطيع الآن أن نحسب التكامل الثلاثي لنجد :

$$\iiint_T f(r,\theta,z)\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} k\,r\,z\;dz\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r(4-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{7k}{8}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7k\pi}{8}$$

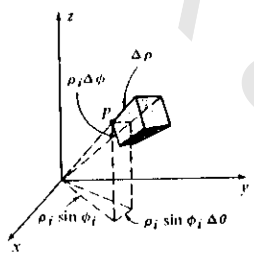
ننتقل الآن الى قاعدة تكامل ثلاثي بالاحداثيات الكروية . افرض أن الاقتـــران $f(\rho,\phi,\theta)$ متصل على المجسم :

$$Q = \{(\rho,\phi,\theta) : a \le \rho \le b \;,\; c \le \phi \le d \;,\; \alpha \le \theta \le \beta\} \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

نعرف التكامل الثلاثي $\iiint_Q f(\rho,\phi,\theta)\,dv$ على أنه نهاية مجموع ريمان ثلاثي نكتبه بالاسلوب نفسه الذي اتبعناه من الحالات السابقة . وهنا :

$$dv = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

لكي نرى ذلك ، ارجع الى الشكل (14.17) حيث يظهر احد الأجزاء Q_i التي تنتج عن تجزئة P للمجسم Q . نعامل Q_i على انه متوازي سطوح قائم واحد رؤوسه النقطة $A(\rho_i , \phi_i , \theta_i)$. ابعاد Q_i هي $\Delta\rho$ ، $\rho_i\,\Delta\phi$ ، $\rho_i \sin\phi_i\,\Delta\theta$.



الشكل(14.17)

لذلــك فــان :

$$\Delta V_i \approx \rho_i^2 \sin\phi_i\,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta$$

كما في الحالات السابقة ، نصل الى القاعدة التالية :

$$\iiint_Q f(\rho,\phi,\theta)\,dv = \int_\alpha^\beta\int_c^d\int_a^b f(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad \ldots\ldots\ldots (27)$$

والتكامل التتابعي في (27) هو احد ست تكاملات تتابعية يمكننا أن نستعمل أيا منها لحساب التكامل الثلاثي $\iiint_Q f(\rho,\phi,\theta)\,dv$.

اخيرا ، نعرف التكامل الثلاثي $\iiint_T f(r,\phi,\theta)\,dv$ على مجسم محدود T بان نجعل T داخل مجسم Q من النوع (23) ونأخذ اقترانا $F(\rho,\phi,\theta)$ كامتـــداد للاقتـــران $f(r,\phi,\theta)$ الى Q بالاسلوب نفسه الذي اتبعناه في الحالات المشابهـة السابقـة .

اذا $\iiint_Q F(\rho,\emptyset,\theta)\,dv$ موجود فاننا نعرف :

$$\iiint_T f(\rho,\emptyset,\theta)\,dv = \iiint_Q F(\rho,\emptyset,\theta)\,dv \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

ونحسب $\iiint_T f(\rho,\emptyset,\theta)\,dv$ بتكامل تتابعي مناسب تبعا لشكل المجسم T .

مثل (14.20) احسب كتلة المجسم $T = \{(x,y,z) : 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ وكثافته $f(\rho,\emptyset,\theta) = \frac{1}{1+\rho^2}$.

الحل : ان كتلة هذا المجسم الكروي هي :

$$M = \iiint_T f(\rho,\emptyset,\theta)\,dv = \iiint_T \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \sin\emptyset \, d\rho \, d\emptyset \, d\theta$$

وهنا $T = \{(\rho,\emptyset,\theta) : 0 \le \rho \le 1 \ , \ 0 \le \emptyset \le \pi, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. لذلك نحصل على :

$$M = \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \sin\emptyset \, d\theta \, d\emptyset \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \sin\emptyset \, d\emptyset \, d\rho$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\, d\rho = 4 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\rho^2}\right) d\rho$$

$$= 4\pi \left(\rho - \tan^{-1}\rho\right) \Big|_0^1 = 4\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 4\pi - \pi^2$$

افرض أن الاقتران $f(x,y,z)$ متصل على المجسم T . يكون أيسر لنا أحيانا أن نحسب التكامل الثلاثي $\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ باستخدام الاحداثيات الاسطوانية أو الكروية . فيما يلي نضع بدون برهان القاعدتين اللتين تسمحان لنا باجراء هذا التحويل :

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv = \iiint_{T_1} f(r\cos\theta \, , \, r\sin\theta \, , \, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz \quad \ldots\ldots\ldots (29)$$

هنا T_1 المجسم في فضاء $r\,\theta\,z$ الذي ينتقل الى المجسم T في فضاء $x\,y\,z$ بوساطة التحويل : $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ ، $z = z$.

أما القانون الثاني :

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dv = \iiint_{T_2} f(\rho\sin\emptyset\cos\theta, \rho\sin\emptyset\sin\theta, \rho\cos\emptyset)\, \rho^2 \sin\emptyset \, d\rho\, d\emptyset\, d\theta \ldots (30)$$

هنا T_2 مجسم في فضاء $\rho\,\emptyset\,\theta$ ينتقل الى المجسم T في فضاء $x\,y\,z$ بوساطة التحويل : $x = \rho\sin\emptyset\cos\theta$ ، $y = \rho\sin\emptyset\sin\theta$ ، $z = \rho\cos\emptyset$.

مثل (14.21) استخدم الاحداثيات الاسطوانية لتحسب $\iiint_T (x^2 + y^2)\,dv$ اذا المجسم T تحده السطوح $x^2 + y^2 = 2x$ ، $z = 0$ ، $z = 2$.

الحل : ان المعادلة $x^2 + y^2 = 2x$ تصبح بالاحداثيات الاسطوانية $r = 2\cos\theta$.

من هنا نجد أن $T = \{(r,\theta,z) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} , 0 \le r \le 2\cos\theta, 0 \le z \le 2\}$. والآن نستخدم (29) لنجد :

$$\iiint_T (x^2 + y^2)\,dv = \iiint_{T_1} r^3\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^2 r^3\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3\,dr\,d\theta$$

$$= 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= 2\pi + 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\theta\,d\theta = 3\pi$$

مثل (14.22) استخدم الاحداثيات الكروية لتحسب $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dv$ اذا T هو المجسم الكروي $0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.

الحل : ان المجسم الكروي T هو :

$$T = \{(\rho,\phi,\theta) : 0 \le \rho \le 2 , 0 \le \phi \le \pi , 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

وعندما نستخدم (30) نحصل على :

$$\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dv = \iiint_{T_2} \rho^3 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 \rho^3 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{2} \int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$= 8\int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi$$

تمارين (14.5)

في التمارين (1) - (12) استخدم الاحداثيات الاسطوانية لتحسب :

(1) حجم المجسم T الذي تحده السطوح $z = x^2 + y^2$ ، $x^2 + y^2 = 4$ ، $z = 0$.

(2) حجم المجسم T الذي يحده السطحان $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ، $x^2 + y^2 = 4$.

(3) كتلة المجسم T الذي يحده السطحان $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $z = 4$ وكثافته $\rho(x,y,z)$

تتناسب طرديا مع بعد النقطة (x,y,z) عن محور z .

(4) كتلة المجسم $T = \{(x,y,z) : 1 \le z \le 5 - x^2 - y^2 , x^2 + y^2 \ge 1\}$ عندما كثافته $\rho(x,y,z)$ تتناسب طرديا مع بعد النقطة (x,y,z) عن مستوى xy .

(5) $\iiint_T xz \, dv$ اذا المجسم T يقع في الثمن الأول وتحده السطوح $z = x^2 + y^2$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 4$.

(6) $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dv$ اذا المجسم T تحده السطوح $x^2 + y^2 = 3$ ، $z = 1$ ، $z = -1$.

(7) $\iiint_T x^2 y^2 \, dv$ وحدود المجسم T هي السطحان $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $z = 2$.

(8) $\iiint_T y^2 z \, dv$ اذا المجسم T يقع الى الاعلى من السطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ والى الاسفل من السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

(9) حجم المجسم T الذي تحده السطوح $x^2 + y^2 = az$ ، $x^2 + y^2 = 2ax$ ، $z = 0$.

(10) حجم المجسم T الذي يحده من الأعلى السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ومن الأسفل السطح $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$.

(11) حجم المجسم T الذي يحده من الأعلى $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ومن الأسفل $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

(12) حجم المجسم T الذي يقع بين الاسطوانتين $x^2 + y^2 = 1$ ، $x^2 + y^2 = 4$ الى الأعلى من مستوى xy واسفل السطح $x^2 + y^2 + 4z^2 = 36$.

في التمارين (13) - (24) استخدم الاحداثيات الكروية لتحسب :

(13) حجم المجسم T الذي تقتطعه من كرة مصمتة نصف قطرها a بوساطة مستويين يلتقيان على امتداد قطر للكرة والزاوية بينهما α .

(14) حجم المجسم T الذي يكون الجزء المشترك بين الكرتين $\rho = 2\sqrt{2} \cos \phi$ ، $\rho = 2$.

(15) حجم المجسم T الذي يحيط به السطح $\rho = 1 - \cos \phi$.

(16) حجم المجسم T الذي تقتطعه من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$ بالمخروط $z^2 = 4(x^2 + y^2)$.

(17) حجم المجسم T الذي يحيط به السطح $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8z$.

(18) كتلة المجسم T الذي يقع بين السطحين $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = 144$ اذا كثافته $\rho(x,y,z)$ تتناسب طرديا مع بعد النقطة (x,y,z) عن نقطة الاصل.

(19) كتلة المجسم T الذي له شكل نصف كرة قطرها 2a اذا كثافته $\rho(x,y,z)$ تتناسب مع بعد النقطة (x,y,z) عن مركز الكرة .

(20) كتلة المجسم الكروي T الذي نصف قطره a اذا كثافته $\rho(x,y,z)$ تتناسب طرديا مع بعد النقطة (x,y,z) عن سطح T .

(21) كتلة مجسم مخروطي دائري قائم T نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h اذا كثافته $\rho(x,y,z)$ تتناسب طرديا مع بعد النقطة (x,y,z) عن رأس T .

(22) $\iiint_T (x^2+y^2)\,dv$ اذا المجسم T يحده من الأسفل $z=-\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ ومن الأعلى $x^2+y^2+z^2=1$.

(23) $\iiint_T \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ اذا المجسم T هو الكرة المصمتة $0 \le x^2+y^2+z^2 \le 1$.

(24) $\iiint_T yz\,dv$ اذا المجسم T هو القشرة الكروية $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ التي تقع في الثمن الأول .

في التمارين (25) - (28) استخدم الاحداثيات الاسطوانية لتحسب :

(25) $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\,dx\,dy$$

(26) $$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$$

(27) $$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z^3\,dz\,dy\,dx$$

(28) $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$$

في التمرينين (29) - (30) استخدم الاحداثيات الكروية لتحسب :

(29) $$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$$

(30) $$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$$

(14.6) تطبيقات للتكاملات المضاعفة

صادفنا في البنود السابقة اكثر من تطبيق للتكاملات المضاعفة . فلقد استخدمناها في حساب : المساحات ، والكتلة ، والحجوم . نضيف في هذا البند تطبيقات فيزيائية للتكاملات المضاعفة . ولكن نبدأ بالتعريف التالي .

تعريف (14.6)

(أ) اذا $y = f(x)$ متصل على الفترة $[a,b]$ فان :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$$ (معدل الاقتران $f(x)$ على الفترة $[a,b]$)

(ب) اذا $z = f(x,y)$ متصل على منطقة مستوية Ω مساحتها A فان :

$$\frac{1}{A}\iint_\Omega f(x,y)\,dA =$$ (معدل الاقتران $f(x,y)$ على المنطقة Ω)

(جـ) اذا $w = f(x,y,z)$ متصل على منطقة T في R^3 وحجمها V فان :

$$\frac{1}{V}\iiint_T f(x,y,z)\,dV =$$ (معدل الاقتران $f(x,y,z)$ على المنطقة T)

مثل (14.22) جسم على شكل اسطوانة مصمتة T حيث :

$$T = \left\{(x,y,z) : -a \le x \le a \;,\; -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2} \;,\; 0 \le z \le h\right\}$$

اذا كثافة الجسم هي $\rho(x,y,z) = y^2\sqrt{a^2-x^2}$ ، احسب معدل كثافة الجسم .

الحـــل : معدل كثافة الجسم هو معدل الاقتران $\rho(x,y,z) = y^2\sqrt{a^2-x^2}$ على المنطقة T وهي اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها a وارتفاعها h . لذا فان حجم الجسم V هو $V = \pi a^2 h$. نحسب الآن معدل الاقتران ρ لنجد :

$$\frac{1}{V}\iiint_T \rho(x,y,z)\,dV = \frac{1}{\pi a^2 h}\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^h y^2\sqrt{a^2-x^2}\;dz\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\sqrt{a^2-x^2}\;dy\,dx$$

$$= \frac{2}{3\pi a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^2\,dx$$

$$= \frac{32\,a^3}{45\,\pi}$$

العـــزوم

افرض صفيحة معدنية G لها شكل منطقة مستطيلة R في مستوى xy وان كثافة الصفيحة تساوي $\rho(x,y)$ ، وهنا $\rho(x,y)$ متصل على R . افرض تجزئة P للمستطيل R ينتج عنها اجزاء مستطيلة $\{R_i : i = 1,\dots,n\}$ عددها n . نجعل ΔA_i مساحة R_i

ونختار النقطة (u_i , v_i) في R_i لكل $i = 1 , \ldots , n$. عندما تكون ابعاد R_i صغيرة فيمكننا أن نأخذ العدد $\rho(u_i,v_i)\,\Delta A_i$ تقريبا لكتلة R_i . واذا اعتبرنا هذه الكتلة تتركز في النقطة (u_i,v_i) عندئذ نستطيع أن نعتبر العدد $v_i\,\rho(u_i,v_i)\,\Delta A_i$ تقريبا لعزم R_i حسب محور x (أو حول محور x) . لذلك يكون المجموع $\sum_{i=1}^{n} v_i\,\rho(u_i , v_i)\,\Delta A_i$ تقريبا لعزم الصفيحة G حول محور x . بصورة مشابهة يكون المجموع $\sum_{i=1}^{n} u_i\,\rho(u_i , v_i)\,\Delta A_i$ تقريبا لعزم الصفيحة G حسب محور y . نعلم أن نهاية هذه المجاميع ، عندما المقياس $\|P\|$ يؤول للصفر ، تكون تكاملا ثنائيا مما يوصلنا الى القواعد التالية .

ان عزم الصفيحه M_x حسب محور x وكذلك عزمها M_y حسب محور y هما :

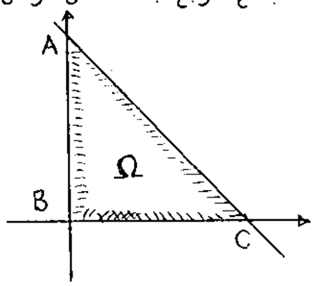
$$M_y = \iint_{\Omega} x\,\rho(x , y)\,dA \qquad , \qquad M_x = \iint_{\Omega} y\,\rho(x , y)\,dA \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

ونعرف مركز ثقل الصفيحة بأنه النقطة $(\bar{x} , \bar{y})$ حيث :

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} \qquad , \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

وهنا $M = \iint_{\Omega} \rho(x , y)\,dA$ هي كتلة الصفيحة G الذي لها شكل المنطقة .

<u>مثل (14.23)</u> صفيحة معدنية لها شكل مثلث ABC متساوي الساقين فيه $AB = BC = a$ والزاوية ABC قائمة . كثافته في أي نقطة (x , y) تتناسب مع مربع بعدها عن الرأس B . جد مركز ثقل الصفيحة .



الشكل (14.18)

<u>الحل</u> : نستخدم نظاما احداثيا متعامدا نقطة الاصل فيه تنطبق على النقطة B كما في الشكل (14.18) ، فتكون الكثافة هي $\rho(x,y) = k\,(x^2 + y^2)$. كما أن معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين A , C هي $y = a - x$. نبدأ بأن نحسب الكتلة M لنجد :

$$M = \iint_{\Omega} \rho(x,y)\,dA = k \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$= k \int_0^a \left[x^2 (a - x) + \frac{1}{3}(a - x)^3\right] dx$$

$$= k \left[\frac{1}{3} a x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{12}(a - x)^4\right]_0^a = \frac{k a^4}{6}$$

ثم نحسب M_x و M_y على التوالي لنجد :

$$M_x = \iint_{\Omega} y\, \rho(x,y)\, dA = k \int_0^a \int_0^{a-x} y(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= k \int_0^a \left[\frac{1}{2} x^2 (a-x)^2 + \frac{1}{4} (a-x)^4\right] dx$$

$$= k \left[\frac{1}{6} a^2 x^3 - \frac{1}{4} a x^4 + \frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{20} (a-x)^5 \right|_0^a$$

$$= \frac{k a^5}{15}$$

$$M_y = \iint_{\Omega} x\, \rho(x,y)\, dA = k \int_0^a \int_0^{a-x} x(x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \frac{k a^5}{15}$$

بذلك يكون

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{k a^5}{15}}{\frac{k a^4}{6}} = \frac{2a}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{k a^5}{15}}{\frac{k a^4}{6}} = \frac{2a}{5}$$

ومركز الثقل النقطة $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$.

اذا كانت الصفيحة G متجانسة الكثافة فان $\rho(x,y) = c$ ، c ثابت . هذا يعني أن (الكتلة) $\iint_{\Omega} \rho(x,y)\, dA = c \iint_{\Omega} dA = cA$ ، وهنا A مساحة الصفيحة G . عندئذ نحصل على :

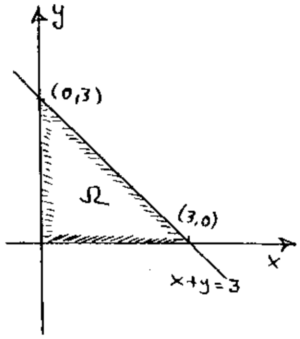
$$M_x = \iint_{\Omega} y\, \rho(x,y)\, dA = c \iint_{\Omega} y\, dA \qquad \text{........(33)}$$

$$M_y = \iint_{\Omega} x \rho(x,y)\, dA = c \iint_{\Omega} x\, dA \qquad \text{........(34)}$$

أي أن $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} x\, dA$ ، $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} y\, dA$. هذا يعني أن $\bar{x}$ هو معدل الاحداثي x على المنطقة Ω ، كما أن $\bar{y}$ هو معدل الاحداثي y على المنطقة Ω . نلاحظ في هذه الحالة أن مركز الثقل يعتمد على الشكل الهندسي للمنطقة Ω ، ولذلك فان مركز الثقل ينطبق عندئذ على المركز الهندسي للمنطقة Ω في حال وجوده . كما أنه من الواضح أن مركز الثقل يقع على أي مستقيم تماثل للمنطقة Ω .

مثل (14.24) صفيحة معدنية على شكل المنطقة Ω التي تحدها المنحنيات $x + y = 3$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ وكثافتها ثابتة $\rho(x,y) = c$. جد مركز ثقل الصفيحة .

الحل : ان المنطقة Ω ، كما تظهر في الشكل (14.19) ، متماثلة حول المستقيم



الشكل (14.19)

$y = x$. بما أن مركز ثقل الصفيحة يقع على هذا المستقيم ، لذا $\bar{x} = \bar{y}$ ويكفي أن نحسب أحدهما .

كما أن الكثافة ثابت c لذلك :

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} x \, dA = \frac{2}{9} \int_0^3 \int_0^{3-x} x \, dy \, dx$$

$$= \frac{2}{9} \int_0^3 x(3-x)\, dx$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = 1$$

ومركز الثقل هو النقطة (1 , 1) .

نعمم هذه القواعد الى الوضع في ثلاثة ابعاد . افرض أن جسما له الشكل نفسه كما للمنطقة T في الفضاء R^3 وأن كثافته تساوي $\rho(x,y,z)$ حيث ρ اقتران متصل على المنطقة T . فان عزم الجسم :

حسب مستوى xy هو $M_{xy} = \iiint_T z\, \rho(x,y,z)\, dV$ ......(35)

حسب مستوى xz هو $M_{xz} = \iiint_T y\, \rho(x,y,z)\, dV$ ......(36)

حسب مستوى yz هو $M_{yz} = \iiint_T x\, \rho(x,y,z)\, dV$ ......(37)

كذلك نعرف مركز ثقل الجسم بأنه النقطة $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ حيث :

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad , \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \qquad ....(38)$$

و M كتلة الجسم .

اما اذا كانت كثافة الجسم ثابتة ، ولنقل $\rho(x,y,z) = c$ ، فان $M = cV$ ، وهنا V حجم الجسم . نجد عندئذ أن :

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_T z\, dV \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_T y\, dV \quad , \quad \bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_T x\, dV \qquad .....(39)$$

هذا يعني أن $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ ، $\bar{z}$ هي معدلات الاحداثيات x ، y ، z (على التوالي) على المنطقة T . هنا أيضا ينطبق مركز ثقل الجسم على المركز الهندسي للمنطقة T في حال وجوده . كما أن مركز الثقل يقع في أي مستوى تماثل للمنطقة T وكذلك في كل مستقيم تماثل لها .

مثل (14.25) جسم على شكل المنطقة T في الثمن الأول وتحدها المستويات الاحداثية

الثلاث والمستوى $x + y + z = 1$ ، اذا كثافة الجسم هي $\rho(x,y,z) = yz$ ، جد مركز ثقل الجسم .

الحل : نبدأ بأن نكتب : $T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1 \,,\, 0 \le y \le 1-x \,,\, 0 \le z \le 1-x-y\}$.

ثم نحسب الكتلة M لنجد :

$$M = \iiint_T \rho(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} yz\,dz\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\, y\,(1-x-y)^2\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{24}\,(1-x)^4\,dx = \frac{1}{120}$$

ثم نحسب M_{yz} ، M_{xz} ، M_{xy} بالتتابع لنجد :

$$M_{yz} = \iiint_T x\rho(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x\,y\,z\,dz\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\,xy\,(1-x-y)^2\,dy\,dx$$
$$= \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4\,dx = \frac{1}{720}$$

$$M_{xz} = \iiint_T y\rho(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y^2\,z\,dz\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\,y^2\,(1-x-y)^2\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{60}\,(1-x)^5\,dx = \frac{1}{360}$$

$$M_{xy} = \iiint_T z\,(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y\,z^2\,dz\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{3}\,y\,(1-x-y)^3\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{60}\,(1-x)^5\,dx = \frac{1}{360}$$

لذلك فان $\bar{x} = \dfrac{\frac{1}{720}}{\frac{1}{120}} = \dfrac{1}{6}$ ، $\bar{y} = \dfrac{\frac{1}{360}}{\frac{1}{120}} = \dfrac{1}{3}$ ، $\bar{z} = \dfrac{\frac{1}{360}}{\frac{1}{120}} = \dfrac{1}{3}$

ومركز الثقل النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.

عزم القصور الذاتي

عندما نضع كتلة m في نقطة P تبعد مسافة a عن مستقيم l فان عزم القصور الذاتي لها حسب المحور l هو $I_l = a^2 m$.

افرض كتلا m_1 ، m_2 ، .... ، m_k موضوعة في نقاط المستوى $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ ، .... ، $P_k(x_k,y_k)$ على التوالي . نعرف <u>عزم القصور الذاتي</u> I_x حسب محور x وكذلك <u>عزم القصور الذاتي</u> I_y حسب محور y لهذا النظام ، الذي يتكون من كتل عددها k ، على النحو التالي :

$$I_y = \sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 \quad , \quad I_x = \sum_{i=1}^{k} m_i y_i^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (40)$$

حتى نعمم هذا التعريف ، افرض صفيحة معدنية G على شكل المنطقة Ω في مستوى xy وكثافة الصفيحة هي $\rho(x,y)$ حيث الاقتران ρ متصل على المنطقة Ω . نأخذ تجزئة P للمنطقة Ω لنحصل على اجزاء R_1 ، .... ، R_n . افرض مساحة R_i هي ΔA_i ، $i=1,\ldots,n$. نختار نقطة (u_i,v_i) في R_i . اذا كان مقياس التجزئة $\|P\|$ صغيرا فيمكننا أن نقرب كتلة الجزء R_i بالعدد $\rho(u_i,v_i)\,\Delta A_i$. واذا اعتبرنا هذه الكتلة تتركز في النقطة (u_i , v_i) فنستطيع أن نأخذ العدد $v_i^2\,\rho(u_i,v_i)\,\Delta A_i$ كتقريب لعزم القصور الذاتي للجزء R_i حسب محور x . عندما نأخذ النهاية للمجموع $\sum_{i=1}^{n} v_i^2\,\rho(u_i,v_i)\,\Delta A_i$ عندما المقياس $\|P\|$ يذهب الى الصفر فاننا نحصل على تكامل ثنائي يحسب لنا عزم القصور الذاتي للصفيحة G حسب محور x . من هنا نحصل على القواعد التالية .

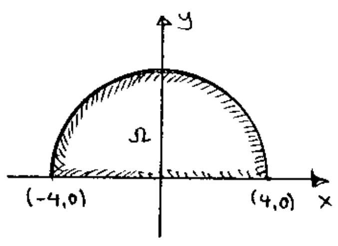
ان عزم القصور الذاتي للصفيحة G :

حسب محور x هو $\quad I_x = \iint_{\Omega} y^2 \rho(x,y)\,dA \quad \ldots\ldots (41)$

حسب محور y هو $\quad I_y = \iint_{\Omega} x^2 \rho(x,y)\,dA \quad \ldots\ldots (42)$

حسب نقطة الأصل (أو القطب) هو $\quad I_o = \iint_{\Omega} (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dA \quad \ldots\ldots (43)$

<u>مثل (14.26)</u> صفيحة معدنية على شكل المنطقة التى رسمناها في شكل (14.20) وكثافتها هي $\rho(x,y) = ky$. احسب I_x للصفيحة .



الشكل (14.20)

<u>الحل</u> : نلاحظ أن :

$\Omega = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \pi ,\ \emptyset \le r \le 2\}$. لذلك

$$I_x = \iint_{\Omega} y^2\,\rho(x,y)\,dA = \iint_{\Omega} k\,y^3\,dA$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} k\,r^4\,\sin^3\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{32k}{5}\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{32k}{5}\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta$$
$$= \frac{128\,k}{15}$$

نضع الآن تعميما لتعريف عزم القصور الذاتي في ثلاثة أبعاد . افرض جسما H له الشكل نفسه كما للمنطقة T في الفضاء R^3 . كثافة الجسم H هي $\rho(x,y,z)$ ، حيث الاقتران ρ متصل على المنطقة T . ان عزوم القصور الذاتي I_x ، I_y ، I_z حسب المحاور الاحداثية x, y , z على التوالي للجسم H هي :

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dV \qquad \ldots\ldots\ldots \ (44)$$
$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dV \qquad \ldots\ldots\ldots \ (45)$$
$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\,\rho(x,y,z)\,dV \qquad \ldots\ldots\ldots \ (46)$$

مثل (14.27) جسم متجانس على شكل اسطوانة دائرية قائمة مصمتة نصف قطرها R وارتفاعها h . جد عزم القصور الذاتي لهذا الجسم حول محور الاسطوانة .

الحل : نستخدم نظاما احداثيا متعامدا بحيث ينطبق محور z فيه على محور الاسطوانة وتنطبق نقطة الاصل فيه على مركز قاعدة الجسم الدائرية . عندئذ يكون للجسم الشكل نفسه كما للمنطقة T ، حيث

$$T = \left\{(r,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi ,\ 0 \le r \le R ,\ 0 \le z \le h\right\}$$

نضع $\rho(x,y,z) = k$ ، k ثابت ، ونحسب I_z لنجد :

$$I_z = \iiint_T k(x^2+y^2)\,dV = k\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{h} r^3 \, dz\, dr\, d\theta$$
$$= hk\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^3 \, dr\, d\theta$$
$$= \frac{hk\,R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}\pi hk\,R^4$$

افرض أن كتلة جسم (أو صفيحة معدنية) تساوي M وان عزم القصور الذاتي له حول مستقيم l يساوي I_l . نسمي العدد k_l الذي يحقق المعادلة $k_l^2 = M I_l$ نصف قطر التدويم للجسم حسب محور l . والعدد k_l نفسره بأنه بعد نقطة وضعنا فيها كتلة M عن محور l لنحصل على عزم القصور الذاتي نفسه الذي للجسم . نكتب k_x ، k_y ، k_z لتدل على نصف قطر التدويم حسب المحاور الاحداثية x , y , z على التوالي .

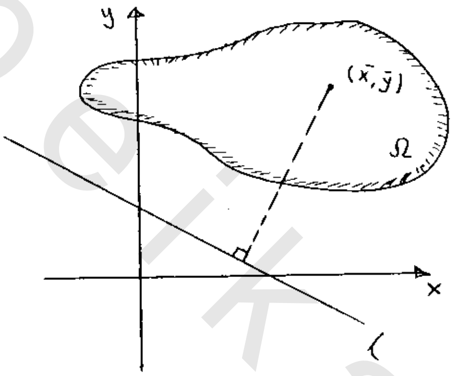
نختم هذا البند بتطبيق لمركز الثقل كما توفره المبرهنة التالية .

مبرهنة (14.7) (مبرهنة پاپُس لحساب حجم مجسم الدوران)

افرض منطقة Ω في مستوى xy ومستقيم l يقع في هذا المستوى ولا يقطع المنطقة Ω . افرض أن T مجسم الدوران الذي ينتج عندما تدور المنطقة Ω حول محور l . ان حجم مجسم الدوران T يساوي حاصل ضرب مساحة المنطقة Ω في محيط الدائرة التي يرسمها مركز ثقل Ω . أي أن :

(47)..... (حجم مجسم الدوران T) = (مساحة Ω) x (المسافة التي قطعها مركز ثقل Ω)

انظر الشكل (14.21) .



الشكل (14.21)

مثل (14.28) احسب حجم مجسم الدوران الذي ينتج عندما تدور حول محور x المنطقة Ω التي تقع بين المنحنيين $y = x^2$ ، $x = y^2$.

الحل : نستخدم مبرهنة پاپس لنحسب حجم مجسم الدوران . اذا النقطة $(\bar{x}, \bar{y})$ مركز ثقل المنطقة Ω فان بعدها عن محور الدوران (محور x) يساوي $\bar{y}$. نبدأ بأن نحسب :

$$A = \iint_\Omega dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \frac{1}{3}$$

والآن نحسب $\bar{y}$ لنحصل على :

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_\Omega y\, dA = 3 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\, dy\, dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^4)\, dx = 9/20$$

لذلك فان الحجم V لمجسم الدوران هو :

$V =$ (مساحة المنطقة Ω) x (محيط الدائرة التي يرسمها مركز الثقل)

$$= (2\pi)\ (9/20)\ (\tfrac{1}{3}) = \frac{3\pi}{10}$$

تمارين (14.6)

للتمارين (1) - (7) جد مركز ثقل المنطقة المذكورة :

(1) المنطقة Ω بين المنحنيين $y = 4x - x^3$ ، $y = 2x - 3$.

(2) المنطقة Ω بين المنحنيين $y^3 = x^2$ ، $2y = x$.

(3) المنطقة Ω بين المنحنيين $y^2 = 2x$ ، $y = x - x^2$.

(4) المنطقة Ω بين المنحنيين $x + 1 = 0$ ، $x + y^2 = 0$.

(5) المنطقة T التي تقع بين المستويات $x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 1$ ، $y = 2$ ، $z = -2$ ، $z = 1 + x + y$.

(6) المنطقة T رباعية السطوح ورؤوسها $(0,0,0)$ ، $(a,0,0)$ ، $(0,b,0)$ ، $(0,0,c)$.

(7) المنطقة T التي يحدها من الاعلى السطح $x^2 + z = 4$ ومن الأسفل المستوى $x + z = 2$ ومن الجوانب المستويان $y = 0$ ، $y = 3$.

في التمارين (8) - (13) افرض أن الصفيحة (أو الجسم) متجانسه ولها الشكل نفسه كما للمنطقة Ω (أو T) ، احسب كلا من :

(أ) الكتلة . (ب) العزوم . (جـ) مركز الثقل :

(8) المنطقة Ω تقع بين المنحنيين $y = x^2$ ، $x = y^2$.

(9) المنطقة Ω تقع بين المحورين الاحداثيين والمنحني $y = 1 - x^3$.

(10) المنطقة Ω التي اعلى محور x وتحت القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(11) المنطقة Ω التي بين الدائرتين $x^2 + y^2 = 4$ ، $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

(12) المنطقة Ω بين المحورين الاحداثيين الموجبين والمنحني $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

(13) المنطقة Ω بين المحورين الاحداثيين والمنحني $x + y = 1$.

في التمارين (14) - (18) جد الكتلة ومركز الثقل لصفيحه معدنية كثافتها $\rho(x , y)$ وعلى شكل المنطقة Ω :

(14) $\Omega = \{(x,y) : -1 \le x \le 1 \quad , \quad 0 \le y \le 1\}$ ، $\rho(x,y) = x^2$

(15) $\rho(x,y) = x + y$ ، والمنطقة Ω داخل المثلث الذي رؤوسه $(0 , 0)$ ، $(1 , 2)$ ، $(0 , 3)$.

(16) $\rho(x,y) = xy$ ، والمنطقة Ω في الربع الأول بين القطع المكافيء $y = x^2$ ، والمستقيم $y = 1$.

(17) $\rho(x,y) = x$ ، والمنطقة Ω اعلى محور x وتحت الدائرة $x^2 + y^2 = 1$.

(18) $\rho(x,y) = y$ ، والمنطقة Ω اعلى محور x وتحت المنحني $y = 9 - x^2$.

للتمارين(19) - (22) كثافة الجسم تساوي (x,y,z) وله الشكل نفسه كما للمنطقة T المذكورة ، احسب :

(أ) الكتلة . (ب) العزوم . (ج) مركز الثقل :

(19) $\rho(x,y,z) = yz$ ، والمنطقة T رباعية السطوح رؤوسها $(0,0,0)$ ، $(a,0,0)$ ، $(0,b,0)$ ، $(0,0,c)$.

(20) $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ، والمنطقة T يحدها من الاعلى المستوى $z = y$ ومن الاسفل مستوى xy ومن الجوانب المستويات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$.

(21) $\rho(x,y,z) = 1+y$ ، والمنطقة T تحدها السطوح $y = 0$ ، $y = 3$ ، $z = 2 - x$ ، $z = 4 - x^2$.

(22) $(x,y,z) = x y z$ ، والمنطقة T تقع بين المستويات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 2$ ، $z = 0$ ، $z = 4-y$.

(23) صفيحة معدنية على شكل المنطقة المستطيلة Ω التي تقع بين المستقيمات $x = 0$، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 2$. اذا الكثافة $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$ ، احسب I_x ، I_y .

(24) مكعب معدني مصمت متجانس طول ضلعه a ، احسب عزم قصوره الذاتي حول مستقيم يمر بأحد أضلاعه .

(25) جسم على شكل الاسطوانة الدائرية القائمة $4x^2 + y^2 = a^2$ ، $0 \leq z \leq h$ وكثافته تساوي $\rho(x,y,z) = 1+z$. اكتب التكامل الثلاثي الذي يحسب عزم قصوره الذاتي حول محور z .

(26) صفيحة معدنية متجانسه على شكل المنطقة Ω التي تقع بين المنحنيين $x = y$ ، $y = x^2$. احسب I_x ، I_y .

(27) تم تدوير المنطقة المثلثة Ω التي رؤوسها $(1 , 1)$ ، $(3 , 1)$ ، $(2 , 2)$ حول محور x . احسب حجم مجسم الدوران الناتج .

(28) اذا المنطقة Ω في تمرين (27) دارت حول المستقيم $y = x$ ، احسب حجم مجسم الدوران الناتج .

(29) تم تدوير المنطقة Ω التي تقع بين المنحنيين $y = x^2$ ، $y= 8 - x^2$ حول محور y . احسب حجم مجسم الدوران الناتج .