الباب الثالث عشر

الاقترانات ذوات المتغيرات المتعددة

كانت دراستنا في الحسبان حتى الآن معنية باقترانات ذات متغير مستقل واحد. على ان كثيرا من الظواهر الطبيعية، والقضايا المختلفة تعتمد على اكثر من متغير مستقل. ولذلك سنوسع مفهوم الاقترانات ليشمل اكثر من متغير مستقل. ولهذه الاقترانات سندرس مفاهيم تماثل تلك التي درسناها في حال المتغير الواحد، مثل المجال والمدى، والنهايات والاتصال، والاشتقاق والتكامل، والقيم القصوى. على أن هذا النوع من الاقترانات له خصوصيات لم تظهر في حال الاقترانات ذات المتغير الواحد. وستبقى معالجتنا عامة، دون الخوض في اعماق الدقة والبرهان الرياضي.

(13.1) مقدمة ومفاهيم

نقدم في البداية مفهوما عاما، ثم نخصص دراستنا للحالات التي نريدها.

تعريف (13.1) المجموعة التي عناصرها على النحو $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ حيث x_i عدد حقيقي، نسميها فضاء ذا بعد n. كل عنصر منها يسمى نقطة. ونرمز لهذا الفضاء بالرمز R^n. ونسمي $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ المعدود n المرتب.

تعريف (13.2) الاقتران ذو المتغيرات (المستقلة) عددها n هو مجموعة من الازواج المرتبة $(\underline{x}, w)$، شريطة أن أي زوجين مرتبين ليس لهما العنصر الاول نفسه، والعنصر $\underline{x}$ هو نقطة في الفضاء R^n ذي الابعاد n، w عدد حقيقي. والمجموعة التي تحوي كل النقاط لاقتران ما تسمى مجال الاقتران، والمجموعة التي تحوي كل القيم الممكنة لـ w تسمى مدي الاقتران.

هذا التعريف يوضح أن مجال الاقتران هو مجموعة نقاط في R^n. اما المدى فهو مجموعة نقاط في R^1 (الاعداد الحقيقية). سيكون اكثر اهتمامنا منصبا على الحالات عندما $n = 3$ أو 2.

مثل (13.1) مساحة مستطيل تعتمد على الطول x والعرض y، نعبر عن ذلك

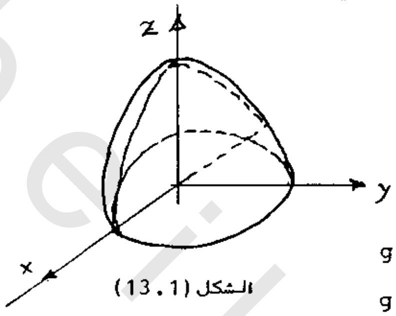
$$A = f(x, y) = xy$$

ومجال f هو مجموعة العناصر (x, y) من R^2. من الواضح أن $0 \le x$، $0 \le y$. كذلك مداه هو $0 \le A$.

مثل (13.2) افرض f اقترانا له متغيران x ، y على النحو

$$z = f(x , y) = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$$

من الواضح أن $25 - (x^2 + y^2) \geq 0$ ، أي أن المجال هو نقاط الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ ، وداخل هذه الدائرة . بينما المدى هو النقاط (الاعداد الحقيقية) z التي تحقق $0 \leq z \leq 5$. وهذا الاقتران له رسم هو نصف كرة علوي . انظر الشكل (13.1) .



الشكل (13.1)

مثل (13.3) ندرس الاقتران

$$g(x,y,z) = x^2 - 6xz + 2yz^2$$

مجال الاقتران المجموعة R^3 ومداه R .

نجد بعض قيم هذا الاقتران

$$g(0,0,0)=0 \;,\; g(1,1,1)=-3 \;,\; g(1,-1,2)=-15$$

$$g(2a,b,-c)=4a^2 + 12ac + 2bc^2$$

$$g(x^2,-y^2,z^2) = x^4 - 6x^2z^2 - 2y^2z^4$$

جبر الاقترانات :

نعرف المجموع والفرق وحاصل الضرب والقسمة لاقترانات ذوات متغيرات متعددة ، مثلما عرفناها لاقترانات من متغير واحد . ونعرفها كما يلي حيث $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$(f \pm g)(\underline{x}) = f(\underline{x}) \pm g(\underline{x})$$

$$(fg)(\underline{x}) = f(\underline{x})\, g(\underline{x})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} \quad , \quad g(\underline{x}) \neq 0$$

تركيب الاقترانات :

اذا $f = f(w)$ ، $w = g(\underline{x})$ حيث $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فان الاقتران المركب

$$(f \circ g)(\underline{x}) = f(g(\underline{x}))$$

ومجال $f \circ g$ هو النقاط $\underline{x}$ في مجال g حيث $g(\underline{x})$ في مجال f .

مثل (13.4) افرض $f(x , y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$ ، $g(t) = \sqrt{t}$ فان

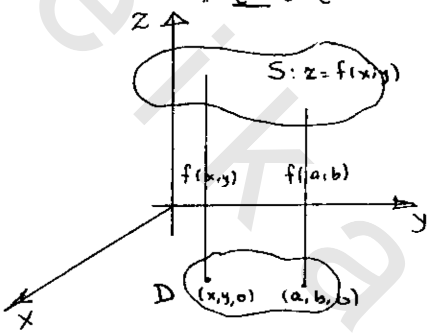
$$F(x , y) = (g \circ f)(x , y) = \sqrt{\ln(4 - x^2 - y^2)}$$

ومجال f هو النقاط (x , y) التي تحقق $4 - x^2 - y^2 > 0$ بينما مجال g هو مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة . لذلك مجال $F = g \circ f$ هو مجموعة الازواج

المرتبـــة (x , y) حيـــث $4-x^2-y^2 > 0$ و $\ln(4-x^2-y^2) \geqslant 0$. بما أن $\ln(4-x^2-y^2) \geq 0$ اذا وفقط اذا $4 - x^2 - y^2 \geq 1$ فان مجال $F = g \circ f$ هو مجموعة الازواج المرتبة (x , y) حيث $4-x^2-y^2 \geq 1$ أي $x^2 + y^2 \leq 3$.

التمثيل البيانـي :

نحن نعيش في عالم من ثلاثة ابعاد (مكانيــة) نصفها بالاحداثيات الكارتيزيـة (x , y , z) . وسطح الورقة أو اللوح هو من بعدين . لذلك نستطيع أن نرسم اشكالا في بعدين أو ثلاثة (أو اربعة على الاكثر كما سنرى) . وقد كانت رسومنا في السابـق منحنيات في بعدين ، تنتج من اقتران له متغير مستقل واحد ومتغير تابع . اما اذا كـــان للاقتـران متغيـران مستقـلان ، فان الشكل الناتج هو سطح في ثلاثة ابعـاد .



الشكل (13.2)

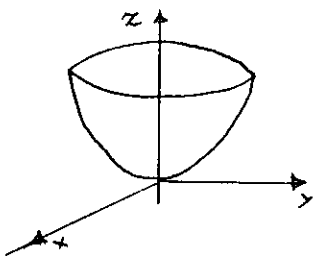
وعادة ما نرسمه من خلال رسم المجـال D الذي يحوي النقـاط $(x,y,0)$ في مستوى xy ، وتكون $f(x,y)$ المسافات فوق D أو تحتها حسب اشارة f . انظر الشكـل (13.2) . كما اننا نقدم في الشكـل (13.3) رسوما حاسوبيــــة لبعـــض السطـوح .

مثل (13.5) المستـوى $ax + by + cz = d$ يمكن كتابتـــه علـــى النحـــو

$$z = \frac{1}{c}(d - ax - by)$$

لذلك فهو سطح ، مجاله R^2 ، ومداه الاعداد الحقيقيـة .

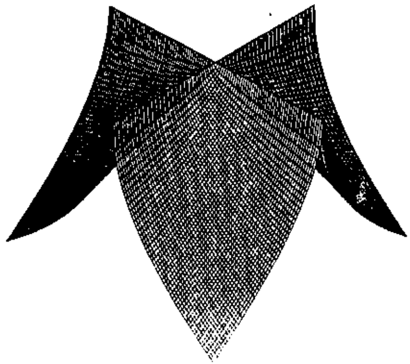
وعند رسم سطح ما ، قد يساعد أن نعرف تقاطع السطح مع مستويات ما ، نسمـي هذا التقاطع أثر السطح في المستوى . وبخاصة للمستويات الاحداثية ، مستوى $xy(z=0)$ ، ومستوى $yz(x = 0)$ ، ومستوى $xz(y = 0)$



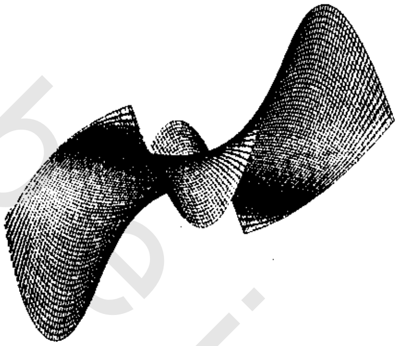
الشكل (13.4)

مثل (13.6) ارسم السطح $z = x^2 + y^2$.

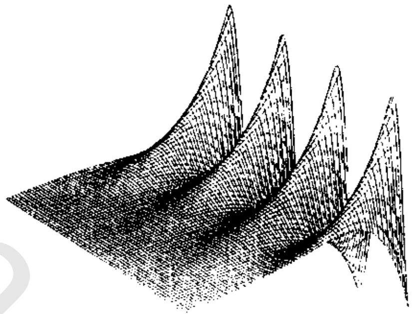
آثار السطح : في مستوى $xy(z=0)$ ، نجـد الاثر هو $x^2+y^2 = 0$ وهذه هي نقطة الاصل. في مستوى $yz(x = 0)$ فـالاثـر هـو $z = y^2$ وهو قطع مكافىء . كذلـك $y = 0$



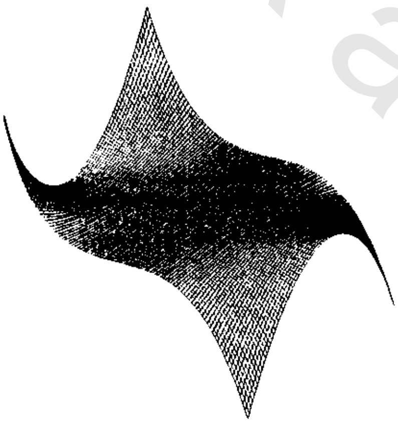
$z = 10\sqrt{|xy|}$



$z = 2y^2 \sin(2x)$



$z = \cos\left[7.17307\left(x + \frac{3}{2}\right) + 2y - 3\right]e$



$z = -10x^3y^2$

الشكل (13.3)

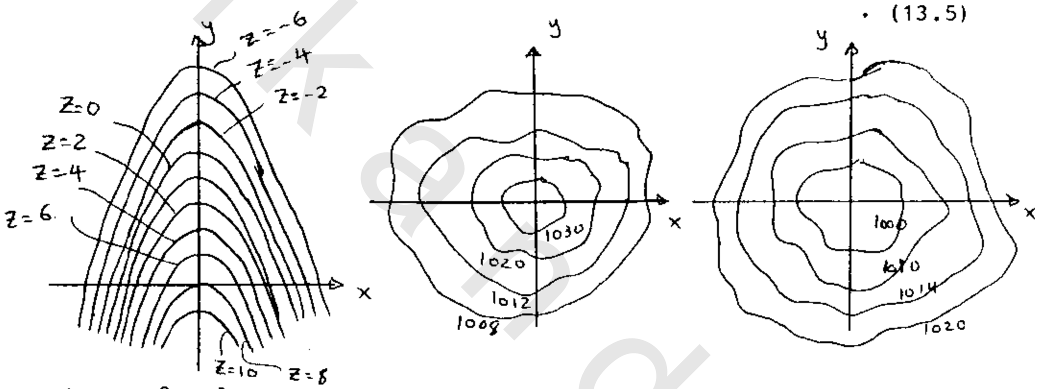
تؤدي الى $z = x^2$ وهو قطع مكافىء ، والشكل الناتج هو المجسم المكافيء ، انظر الشكل (13.4) .

منحنيات المناسيب :

وهناك طريقة اخرى لتمثيل السطوح (ثلاثة ابعاد) على الورق أو اللوح (بعدين)۰

تعريف (13.3) للسطح $S : z = f(x , y)$ نسمي مجموعة النقــــاط $(x , y , 0)$ حيـــث $f(x , y) = c$ منحني المنسوب ۰

وعندما نرسم منحنيات مناسيب عدة لقيم c مختلفة نحصل على خارطــة مناسيب ۰ وهذا ما نراه في الخرائط الطبيعية للتضاريس (الطوبوغرافية) ۰ اذ نــرى منحنيات مرسومة عليها ارقام تمثل منسوبها (ارتفاعا أو انخفاضا) ۰ وهذا ما نراه في خرائط الضغط الجوي للنشرة الجوية ، اذ كل من هذه المنحنيات يمثل نقاطا لها الضغط نفسه ۰ وتدرج هذه المناسيب يؤدي الى منخفض (أو مرتفع جوي) ۰ انظر الشكل (13.5) ۰



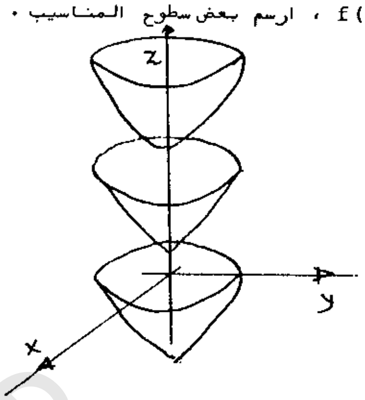
(ج) $c = 8 - x^2 - 2y$ مرتفع جوي (ب) منخفض جوي (أ)

الشكل (13.5)

مثل (13.7) يمثل الشكل (13.5) (ج) منحنيات المناسيب للسطح $z = 8 - x^2 - 2y$.

اذا فرضنا الاقتران $w = f(x , y , z)$ فان مجاله في ابعاد ثلاثة ، والسطح الناتج هو في اربعة ابعاد ، لذلك لا يمكن رسمه مباشرة ۰ واذا اخذنا قيما ثابتة (مختلفة) للبعد w ، نحصل على ما نسميه سطوح المناسيب ۰ لان $c = f(x , y , z)$ هو سطـــح ۰ واذا $f(x , y , z)$ يمثل درجات الحرارة عند النقطة (x , y , z) ، فالسطح الناتج هو سطح تساوي الحرارة ۰ واذا $f(x , y , z)$ يمثل الجهد الكهربائي ، فالسطـــح الناتج هو سطح تساوي الجهد ۰

مثل (13.8) افرض $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ ، ارسم بعض سطوح المناسيب .



الشكل (13.6)

الحل : سطوح المناسيب لها المعادلة

$$k = z - \sqrt{x^2 + y^2}$$

أو

$$z = k + \sqrt{x^2 + y^2}$$

والسطوح الناتجة هي مخروطات دائرية قائمة محورها هو المحور z . انظر الشكل (13.6).

الرسوم الحاسوبية :

يستطيع الحاسوب من خلال برامج معينة رسم منحنيات مناسيب أو سطوح مناسيب . ونقدم بعض هذه المنحنيات والسطوح في الشكلين (13.7) ، (13.8) .

تمارين (13.1)

(1) افرض الاقتران $z = f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$. جد

(أ)	$f(-3, 4)$	(ب)	$f(x^2, y^2)$
(جـ)	$[f(a, b)]^2$	(د)	$f(-x, y)$
(هـ)	$f(x, -y)$	(و)	$f(-x, y) - f(x, -y)$
(ز)	مجال f .	(ح)	مدى f .

(2) افرض الاقتران $w = f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$. جد

(أ)	$g(1, -1, -1)$	(ب)	$g(-a, b, 2c)$
(جـ)	$g(y, x, -y)$	(د)	$[g(x, y, z)]^2$
(هـ)	$[g(x + 2, y - 3, z + 1)]^2$	(و)	مجال g .
(ح)	مدى g .		

للتمارين (3) - (16) جد مجال الاقترانات ومداها

(3) $f(x, y) = \frac{\sqrt{25 - x^2 = y^2}}{x}$ (4) $f(x, y) = y\sqrt{25 - x^2 - y^2}$

(5) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ (6) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x - y}{x + y}}$

(7) $f(x , y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$ (8) $f(x , y) = \sin^{-1} (x + y)$

(9) $f(x , y) = \ln(xy - 1)$ (10) $f(x , y) = \frac{x}{|y|}$

(11) $f(x , y , z) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} y + \tan^{-1} z$

(12) $f(x , y , z) = (x + y)\sqrt{z - 4}$

(13) $H(u , v , w) = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 16}$

(14) $f(r , s , v , p) = rs^2 \tan v + 4sv \ln p$

(15) $g(x , y , z) = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

(16) $f(x , y , u , v , w) = w \ln(x - v) - x u e^{v/w}$

للتمارين (17) - (19) اذا $h = f \circ g$ ، جد $h(x , y)$ ، وجد مجال h ٠

(17) $f(t) = \sin^{-1} t \; ; \; g(x , y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(18) $f(t) = \tan^{-1} t \; ; \; g(x , y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

(19) $f(t) = \sin^{-1} t \; , \; g(x , y , z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$

(20) اذا $f(x,y) = x/y^2$ ، $g(x) = x^2$ ، $h(x) = \sqrt{x}$ ، جـد

(أ) $(h \circ f)(2 , 1)$ (ب) $f(g(2) , h(4))$

(جـ) $f(g(x) , h(x^2))$ (د) $h((g \circ f)(x , y))$

(هـ) $(h \circ g)(f(x , y))$

(21) اذا الجهد الكهربائي عند (x , y) هو $V = 4/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ بالفولط ٠ ارسم منحنيات تساوي الجهد عندما $V = 16$ ، 12 ، 8 ، 4 ، 1 ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ٠

(22) درجة حرارة صفيحة عند (x , y) هو $T = 4x^2 + 2y^2$ بالدرجات ٠ ارسم منحنيات تساوي الحرارة عندما $T = 12$ ، 8 ، 4 ، 1 ، 0 ٠

للتمارين (23) - (28) ارسم منحنيات المناسيب لقيم تختارها

(23) $f(x , y) = y^2 - x^2$ (24) $f(x , y) = 3x - 2y$

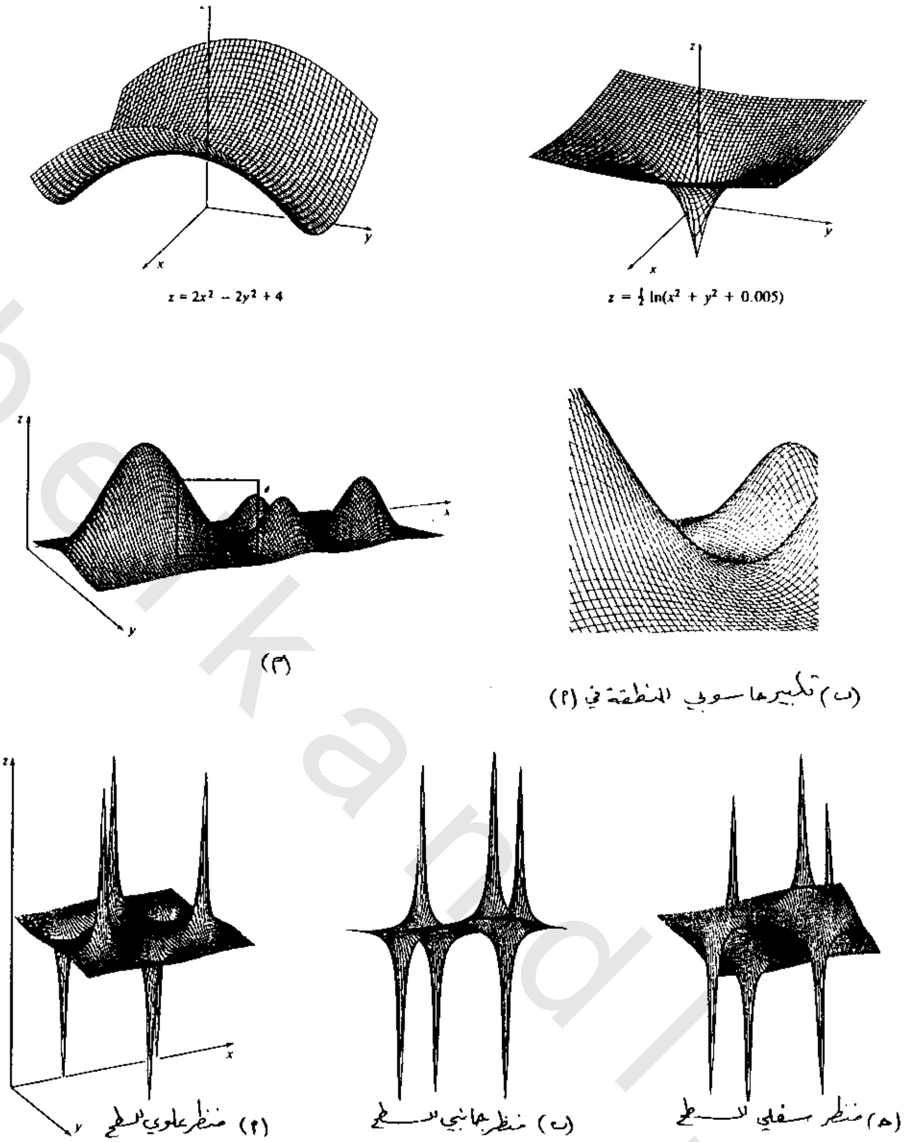
(25) $f(x , y) = x^2 - y$ (26) $f(x , y) = y - \sin x$

(27) $f(x , y) = e^x - y$ (28) $f(x,y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

للتمارين (29) - (32) صف منحنيات المناسيب ، دون أن ترسمها

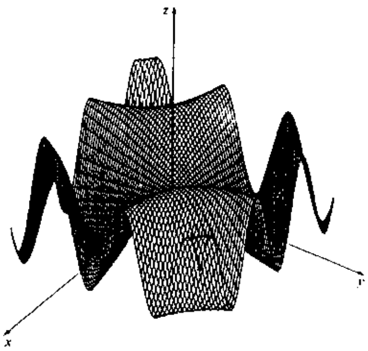
(29) $f(x , y) = x + 2y$ (30) $f(x , y) = y^2 - x$

(31) $f(x , y) = \tan^{-1} (x - y)$ (32) $f(x , y) = e^{y - x^2}$

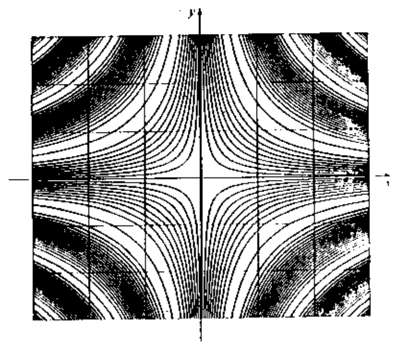


$z = 2x^2 - 2y^2 + 4$
$z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + 0.005)$
(أ)
(ب) تكبير حاسوبي للمنطقة في (أ)
(أ) منظر علوي للسطح
(ب) منظر جانبي للسطح
(جـ) منظر سفلي للسطح

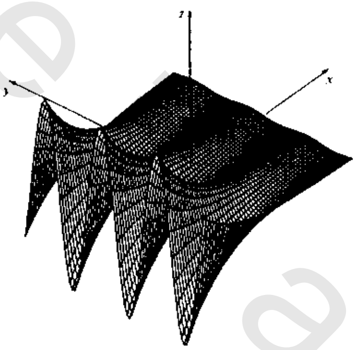
الشكل (13.7)



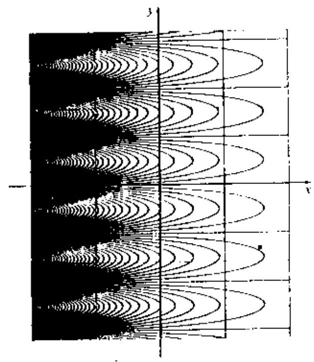
(a) $z = 2 \sin xy$



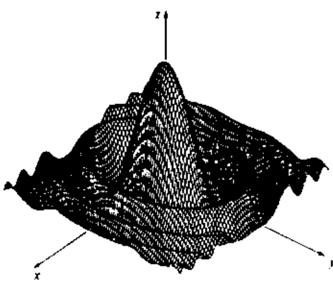
(b) level curves of $z = 2 \sin xy$



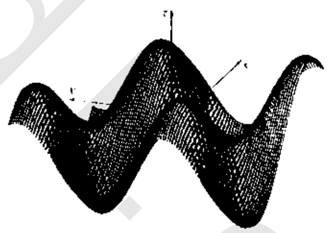
(a) $z = e^{-x} \sin y$



(b) level curves of $z = e^{-x} \sin y$



$z = \dfrac{\frac{1}{2}\cos(2x^2 + y^2)}{1 + 2x^2 + y^2}$



$z = \sin \frac{x}{2} \sin y$

الشكل (13.8)

للتمارين (33) - (36) صف سطوح المناسيب دون أن ترسمها

(33) $F(x , y , z) = x^2 + y^2 + z^2$ (34) $F(x , y , z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2$

(35) $F(x , y , z) = 4y - 2z + 1$ (36) $F(x , y , z) = x + 2y + 3z$

(37) الجهد الكهربائي V عند $P(x , y , z)$ هو حسب

$$V = 6/(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}$$

(أ) ما هي سطوح تساوي الجهد ؟

(ب) ما هو سطح تساوي الجهد عندما $V = 120$ فولط ؟

(38) حسب قانون نيوتن للجاذبية الكونية لكتلتين M ، m ، حيث M في نقطة الاصل لنظام احداثي كارتيزي ، m عند (x , y , z) هو حسب

$$F = \frac{gMm}{x^2 + y^2 + z^2}$$

g هو ثابت الجاذبية . اذا m ، M ثابتان ، ما هي سطوح المناسيب ، وما هو معناها الفيزيائي ؟

(13.2) السطوح التربيعية

السطح التربيعي هو سطح مناسيب لاقتران حدودية صيغتها

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + D xy + E xz + G x + H y + I z + J$$

ويمكن تصنيف هذه السطوح التربيعية الى تسعة اصناف نقدمها فيما يلي مع ضرب مثل لكل واحد منها . وعادة ما نجري تحليلا اوليا لبعض خصائص هذه السطوح قبل رسمها . نذكر منها :

(1) المقاطع ونعني بها تقاطع السطح مع المحاور الاحداثية .

(2) الآثار ونعني بها تقاطع السطح مع المستويات الاحداثية .

(3) القطوع ونعني بها تقاطع السطح مع أي مستوى .

(4) المركز اذ أن بعض السطوح لها مركز ، وبعضها ليس له .

(5) التماثل

(6) المحدودية

وندرس الآن الاصناف التسعة من هذه السطوح .

(1) (المجسم) الناقصي ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

وله مركز هو نقطة الاصل . متماثل بالنسبة الى المستويات الاحداثية الثلاث .
(غيّر x الى $-x$ أو y الى $-y$ أو z الى $-z$ فلا تتغير المعادلة) . ويقطع المحاور الاحداثية في ست نقاط $(\pm a , 0 , 0)$، $(0 , \pm b , 0)$، $(0 , 0 , \pm c)$. وهذا السطح محدود ، ضمن المجسم $x \le a$ ، $y \le b$ ، $z \le c$

وآثاره هي قطوع (منحنيات) ناقصة

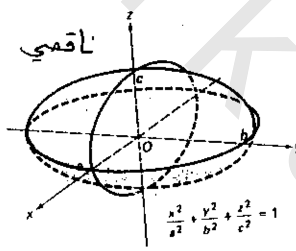
$z = 0$ تؤدي الى $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$y = 0$ تؤدي الى $\frac{x^2}{a} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

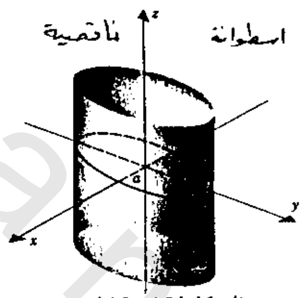
$x = 0$ تؤدي الى $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

بل أن قطوعه كلها هي ناقصة ، وتسمى الاعداد a ، b ، c **اشباه المحاور**.

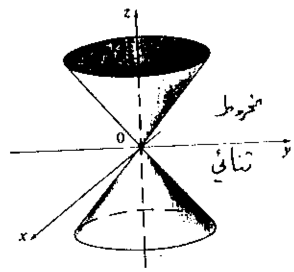
والشكل (13.9) يظهر هذا السطح . واذا $a = b = c$ فان السطح الناتج هو **كرة** .



الشكل(13.9)



الشكل(13.10)



الشكل(13.11)

(2) **الاسطوانة الناقصية** ومعادلتها

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

واثرها في المستوى $z = 0$ هو القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

وهذا السطح ينتج من كل المستقيمات المتوازية التي تمر في نقاط هذا القطع الناقص عمودية على مستوى xy . انظر الشكل(13.10) .

(3) **المخروط الناقصي الثنائي** ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

ويلاحظ أن نقطة الاصل من نقاط هذا المخروط الذي له قمعان . انظر الشكل(13.11).
وآثاره في مستوى xz المستقيمان $\frac{z}{c} = \pm x/a$ ، وفي مستوى yz المستقيمان $\frac{z}{c} = \pm y/b$. واذا $a = b$ فالمخروط **دائري** .

(4) (المجسم) المكافئي الناقصي ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

هذا المجسم له رأس $(0 , 0 , 0)$ ، وهو غير محدود . واثره في yz أو في xz هو قطع مكافئي . واذا z = ثابتا فالاثر هو قطع ناقص . واذا $a = b$ ، فالمكافئي دائري . انظر الشكل(13.12) .

ملاحظة لقد حسب ارخميدس حجمه ، كما حسّن تلك الطريقة ثابت بن قره ، وخير من اختصر حساب الحجم هو ابو سهل القوهي (القرن العاشر) .

(5) الاسطوانة المكافئية ومعادلتها

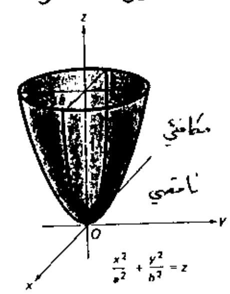
$$z = a x^2$$

واثرها في المستوى $y = 0$ هو القطع المكافيء $z = a x^2$. انظر الشكل(13.13)

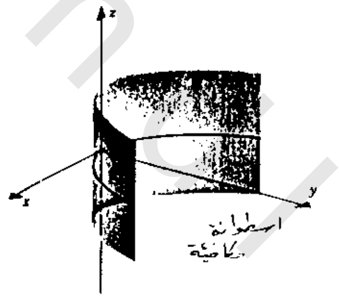
(6) الاسطوانة الزائدية ومعادلتها

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

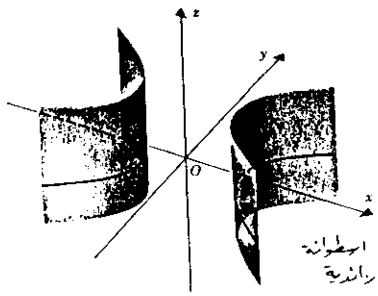
واثرها في أي مستوى يوازي مستوى xy هو قطع الزائد وهذا السطح مؤلف من قطعتين . انظر الشكل(13.14) .



الشكل (13.12)



الشكل (13.13)



الشكل (13.14)

(7) المكافئي الزائدي ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

واثره في مستوى xz هو قطع مكافيء $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$. كما أن اثره في مستوى xy (أو ما يوازي ذلك) هو قطع زائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = c$. انظر الشكل(13.15) .

(8) الزائدي من قطعة واحدة ومعادلته

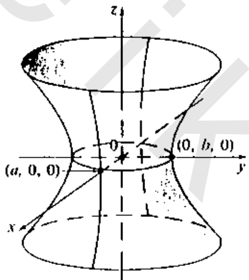
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

لاحظ أن أثريه في $x = 0$ ، $y = 0$ هما قطعان زائدان ، أما في أي مستوى يوازي xy فالاثر هو قطع ناقص ، أو دائرة اذا $b = a$ • وهذا السطح غير محدود ، مركزه نقطة الاصل • كذلك اذا $b = a$ فهو زائدي دوراني • انظر الشكل(13.16) •

(9) الزائدي من قطعتين ومعادلته

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

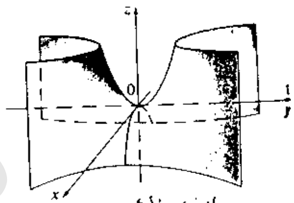
واثره في أي مستوى يوازي xz أو yz هو قطع زائد ، وفي أي مستوى يوازي xz هو قطع ناقص (أو دائرة عندما $a = b$) • انظر الشكل(13.17) • كما أن هذا الاثر قد يكون نقطة واحدة أو المجموعة الخالية (اعتمادا على قيمة z) •



زائدي من قطعة واحدة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

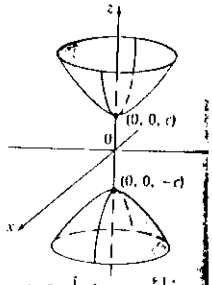
الشكل (13.16)



مكافئ زائدي

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

الشكل (13.15)



زائدي من قطعتين

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

الشكل(13.17)

تمارين (13.2)

للتمارين (1) - (12) حدد نوع السطح التربيعي

(1) $x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0$ (2) $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 16 = 0$

(3) $x - 9y^2 = 0$ (4) $x^2 - 9y^2 - 3z = 0$

(5) $2x^2 + 5y^2 - 6z^2 - 10 = 0$ (6) $4x^2 + 2y^2 - 1 = 0$

(7) $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ (8) $2x^2 + 5y^2 - 6z^2 + 10 = 0$

(9) $2x^2 + y^2 - 4z = 0$ (10) $x - y^2 - 6z^2 = 0$

(11) $2z^2 - y^2 + x = 0$ (12) $4y^2 + 9x^2 - 36z^2 - 36 = 0$

للتمارين (13) - (22) ارسم السطوح التربيعية

(13) $z = y^2 + 3$

(14) $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$

(15) $z = y^2 - 4x^2$

(16) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

(17) $z^2 + 4y^2 - 2x^2 = 1$

(18) $y^2 + z^2 = 9$

(19) $z^2 - 4y^2 - x^2 = 1$

(20) $z^2 = x^2 + 4y^2$

(21) $x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$

(22) $x^2 = 9y^2 + 4z^2$

(13.3) النهاية والاتصال

عرفنا فيما سبق مفهوم النهاية لاقتران من متغير واحد ، كما عرفناه لاقتران متجه $\underline{f}(t)$ ، والآن ، نعمم هذا المفهوم لاقتران ذي متغيرات متعددة • وللاختصار نستخدم رمز المتجه للنقاط •

تعريف (13.4) افرض f اقترانا معرفا على مجموعة تحوي كرة (أو قرصا في حال بعدين) مركزها $\underline{x}_0$ ، الا ربما عند $\underline{x}_0$ ، وان L عدد حقيقي • فان L هو نهاية f عند $\underline{x}_0$ ، اذا لأي $\epsilon > 0$ ، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث ان $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$ يتضمن

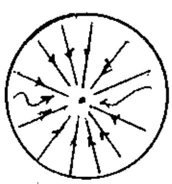
$$|f(\underline{x}) - L| < \epsilon$$

في هذه الحال نكتب

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = L$$

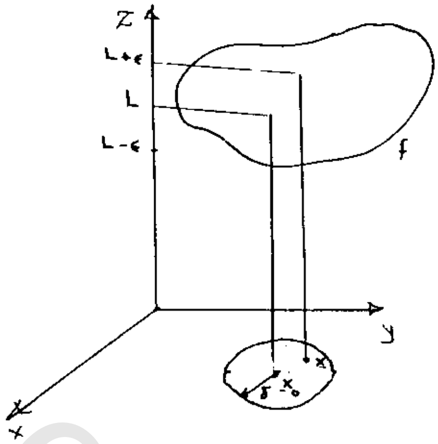
ونقول ان $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$ موجودة •

ويجدر بنا أن نفهم معنى اقتراب $\underline{x}$ من $\underline{x}_0$ • لان معناه هو اقتراب $\underline{x}$ من $\underline{x}_0$ بأي سبيل • على خلاف الحالة في الاقتران ذي المتغير الواحد • اذ في تلك الحالة ، يقترب x من x_0 باحد سبيلين : $x \to x_0^+$ (من اليمين) أي بقيم اكبر من x_0 ، أو $x \to x_0^-$ (من الشمال) أي بقيم اقل من x_0 • وفي حالة مجال في R^2 ، نرى أن اقتراب $\underline{x}$ من $\underline{x}_0$ له ما لا ينتهي من السبل كما في الشكل (13.18 أ) • هذه السبل المستقيمات الواصلة بين أي نقطة ($\underline{x}$) في القرص والمركز $\underline{x}_0$ • كما يمكن أن يكون الاقتراب حسب اي منحن في R^2 (مثلا قطوع مكافئة) ، أو غير ذلك • والشكل (13.18 أ) يظهر تمثيلا بيانيا للاقتراب في حال اقتران ذي متغيرين •



الشكل (13.18 أ)

وسنضرب امثلة توضح الاقتراب من سبل عدة . ووجود النهاية ، يعني انها واحدة مهما اختلفت سبل التقارب . بل ان اختلاف النهاية لاختلاف سبل التقارب يعني أن النهاية غير موجودة .



الشكل (13.18 ب)

مثل (13.9) اثبت أن

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ غير موجودة .

الحل : اذا $x = 0$ فان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

اذا $x = y \neq 0$ فان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

بشكل عام اذا $y = mx$ فان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

مما يوضح اعتماد النهاية على ميل مستقيم التقارب . لذلك فالنهاية غير موجودة .

مثل (13.10) للاقتران $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ اثبت أن النهاية غير موجودة عند $(0\ ,\ 0)$.

الحل : افرض الاقتراب حسب $y = mx$ ، فان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx}{x^2+m^2}$$

$$= \frac{0}{0+m^2} = 0$$

مهما كانت قيمة m ، ولكن علينا أن لا نتعجل . فالنهاية غير موجودة ، لانه اذا كان الاقتراب حسب القطع المكافىء $y = x^2$ فان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

مثل(13.11) اثبت أن

$$\lim_{x \to (a,b,c)} x = a$$

$$\lim_{y \to (a,b,c)} y = b$$

$$\lim_{z \to (a,b,c)} z = c$$

الحـل : افرض $\epsilon > 0$. بما أن

$$\sqrt{(x-a)^2} < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

نختار $\delta = \epsilon$ فانـه

اذا $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$

فـان $|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} < \delta = \epsilon$

وبرهان العبارتين الاخريين مشابه لذلك .

مبرهنة (13.5) افـرض

$$\lim_{(x,y,z) \to (a,b,c)} f(x,y,z) = L_1$$

$$\lim_{(x,y,z) \to (a,b,c)} g(x,y,z) = L_2$$

فـان (i) $\lim_{(x,y,z) \to (a,b,c)} (f \pm g)(x,y,z) = \lim f \pm \lim g = L_1 \pm L_2$

(ii) $\lim_{(x,y,z) \to (a,b,c)} (f\,g)\,(x,y,z) = (\lim f)\,(\lim g) = L_1\,L_2$

(iii) $\lim_{(x,y,z) \to (a,b,c)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y,z) = (\lim f) / (\lim g) = L_1/L_2$

شريطة أن $L_2 \neq 0$.

(iv) $\lim_{(x,y,z) \to (a,b,c)} \alpha f(x,y,z) = \alpha \lim f = \alpha L_1$

و α أي عدد حقيقي .

هذه المبرهنة تيسر لنا حساب النهايات . كما أنه من الواضح يمكن تخصيصها لحالة اقتران ذي متغيرين . وسنضرب بعض الامثلة التي توضح استعمالنا لهذه المبرهنة .

مثل(13.12) احسب ما يلي

$$\lim_{(x,y) \to (-1,2)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

الحـل : لاحظ أن $\lim_{x \to -1} x = -1 \quad , \quad \lim_{y \to 2} y = 2$

من قاعدة حاصل الضرب فـان $\lim_{x \to -1} x^3 = -1 \quad , \quad \lim_{y \to 2} y^3 = 8$

$\lim_{x \to -1} x^2 = 1$ و $\lim_{y \to 2} y^2 = 4$.

نستخدم قاعدة القسمة لنحصل على

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} =$$

$$\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} x^3 + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} y^3}{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} x^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} y^2} = \frac{-1+8}{1+4} = \frac{7}{5}$$

ويلاحظ القارئ اننا كتبنا ذلك بالتفصيل . وهذا ما لا سنفعله في الامثلة التالية ، وان كان على كل واحد ان لا يشك ان هذا التفصيل هو الذي يؤدي الى الجواب الصحيح .

مثل (13.13) احسب $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

الحل : بما أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)=0$ ، فاننا لا نستطيع استعمال قاعدة القسمة (iii) . ولكن عودة الى التعريف ، لأي $\epsilon > 0$ ، واذا $\delta = \epsilon$ فاذا $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

فان $\epsilon = \delta > \sqrt{x^2} = |x|$. لذلك

$$\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = |x| \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| < \epsilon$$

كذلك نحسب $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = 0$

نستعمل قاعدة الجمع لنحصل على أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0 + 0 = 0$$

مثل (13.14) احسب $\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} \ln \frac{x}{y}$

الحل : افرض $f(x,y) = \frac{x}{y}$ وان $g(t) = \ln t$

باستخدام قاعدة القسمة

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} f(x,y) = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} x}{\lim\limits_{(x,y)\to(e,1)} y} = \frac{e}{1} = e$$

بما أن g متصل عند e وان $g(e) = 1$. لذلك

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln \frac{x}{y} = \lim_{(x,y)\to(e,1)} g(f(x,y)) = g(e) = 1$$

نقدم الآن تعريفا للاتصال لاقتران $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

تعريف (13.6) الاقتران $f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ متصل عند $(a_1 , a_2 , \dots , a_n)$ اذا

$$\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(a_1,a_2,\dots,a_n)} f(x_1 , x_2 , \dots , x_n) = f(a_1 , a_2 , \dots , a_n)$$

أو بتعبير موجز

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$$

حيـــث $\underline{a} = (a_1,a_2,\dots,a_n)$, $\underline{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n)$

كما أن الاقتران $f(\underline{x})$ متصل على المجموعة $A\subset R^n$ اذا كان متصلا عنـــد كـل نقطة من نقـاط A .

مثل (13.15) افـرض $F(x,y) = \sin \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$

فـان F متصل على R^2 .

ويمكن تقديم المبرهنة التالية لتعميم مفهوم الاتصـال .

مبرهنة (13.7) افـرض $f(\underline{x})$ ، $g(\underline{x})$ متصلين عند $\underline{a} \in R^n$ فـان

(i) $g(\underline{x}) \pm f(\underline{x})$ متصلان عند $\underline{a}$.

(ii) $\alpha f(\underline{x})$ متصل عند $\underline{a}$ لاي α عدد حقيقي .

(iii) $g(\underline{x})\ f(\underline{x})$ متصل عند $\underline{a}$.

(iv) $f(\underline{x}) / g(\underline{x})$ متصل عند $\underline{a}$ شريطة أن $g(\underline{a}) \neq 0$.

(v) اذا $g(w)$ متصل عند $f(\underline{a}) = w$ فـان $g \circ F$ متصل عند $\underline{a}$.

والبند الاخير في هذه المبرهنة (v) هو عن اتصال الاقتران المركب .

وعودة الى المثل السابق ، فانه اذا

$$g(w) = \sin w \quad , \quad f(x,y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

وبمـا ان $f(x,y)$ متصل لجميع قيم $(x,y) \in R^2$ ، وكذلك $\sin w$ متصل لجميع قيم w ، فـــان

$$(g \circ f)(x,y) = F(x,y) = \sin \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

متصل لجميع $(x,y) \in R^2$

تعريف (13.8) اذا $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، نعرف ما يلي

(أ) جوار النقطة $\underline{x}_o$ في R^n هو مجموعة من النقاط $\underline{x}$ التي تحقق

$$\{\underline{x} : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < \delta\}$$

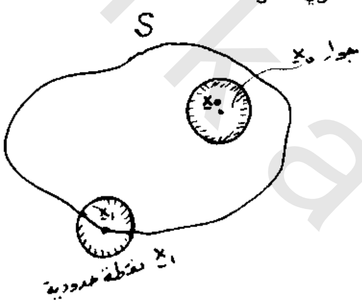
حيث $\delta > 0$ عدد حقيقي ، انظر الشكل (13.19) .

(ب) النقطة $\underline{x}_o \in S$ نقطة داخلية اذا S تحوي جوارا ما للنقطة $\underline{x}_o$. ومجموع كل النقاط الداخلية في S يسمى داخل S . انظر الشكل (13.20) .

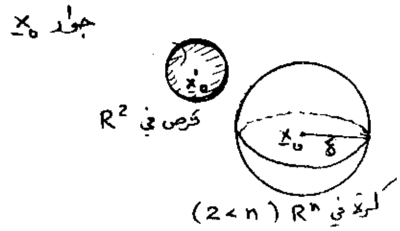
(ج) النقطة $\underline{x}_o$ هي نقطة حدودية للمجموعة S اذا كل جوار للنقطة $\underline{x}_o$ يحوي نقاطا في S ونقاطا ليست في S . ومجموع النقاط الحدية للمجموعة S يسمى حدود S . انظر الشكل (13.20) .

(د) المجموعة S تسمى مفتوحة اذا كانت جميع نقاطها داخلية .

(هـ) المجموعة S تسمى مغلقة اذا كانت تحوي حدودها .



الشكل (13.20)



الشكل (13.19)

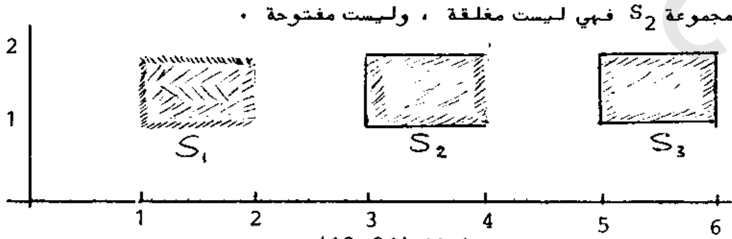
مثل (13.16) نضرب امثلة في R^2 ليسر تمثيلها ، افرض

$$S_1 = \{(x,y): 1 < x < 2 \ , \ 1 < y < 2\}$$

$$S_2 = \{(x,y): \ 3 \leq x < 4 \ , \ 1 \leq y \leq 2\}$$

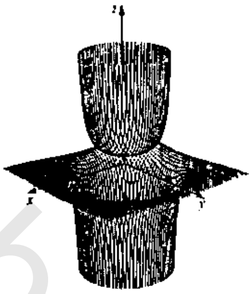
$$S_3 = \{(x,y): \ 5 \leq x \leq 6 \ , \ 1 \leq y \leq 2\}$$

انظر الشكل (13.21) . فالمجموعة S_1 مفتوحة ، والمجموعة S_3 مغلقة .
اما المجموعة S_2 فهي ليست مغلقة ، وليست مفتوحة .

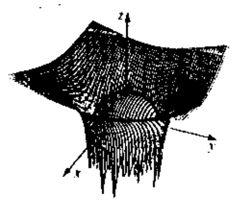


الشكل (13.21)

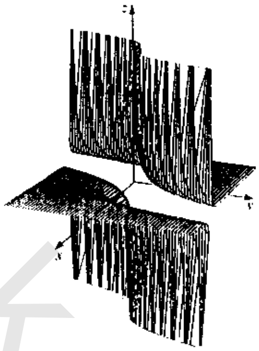
كما أن الشكل (13.22) هو رسوم حاسوبية لاقترانات منفصلة .



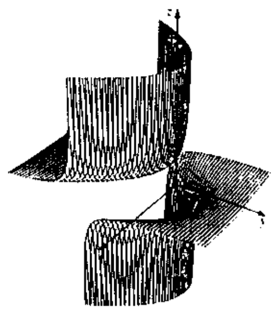
$f(x, y) = \dfrac{4}{6 - x^2 - y^2}$
discontinuous on $x^2 + y^2 = 6$



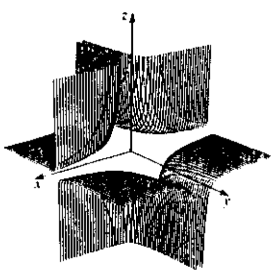
$f(x, y) = \ln|x^2 + y^2 - 4|$
discontinuous on $x^2 + y^2 = 4$



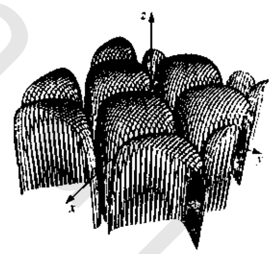
$f(x, y) = \dfrac{1}{2y - x^3}$
discontinuous on $y = \frac{1}{2}x^3$



$f(x, y) = \dfrac{-4}{4y + x^2 - 2}$
discontinuous on $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$



$f(x, y) = \dfrac{-1}{x^2 y}$
discontinuous on $x = 0$ and $y = 0$



$f(x, y) = 3 - \dfrac{1}{2|\sin x + \cos y|}$
discontinuous on $y = -x + (4n - 1)\dfrac{\pi}{2}$ and $y = x + (4n + 1)\dfrac{\pi}{2}$

الشكل (13.22)

تمارين (13.3)

للتمارين (1) - (10) احسب النهايات ان وجدت

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2}{2+xy}$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y}{x^3+y^3}$

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy}{5x^4+2y^4}$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2}$

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

(7) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} \dfrac{2x^2y-xz^2}{y^2-xz}$

(8) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

(9) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},0)} \cos(x+y+z)$

(10) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x\,e^{-1/|y|}$

(11) اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ غير موجودة .

(12) اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x}$ غير موجودة .

(13) اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ غير موجودة .

(14) اثبت أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y|^x$ غير موجودة .

(15) افرض أن $f(x,y)=\arcsin(x-y)$ وأن $g(t)=t^2-1$ جد

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} (g\circ f)(x,y)$$

(16) افرض أن $f(x,y)=e^{x^2y}$ وأن $g(t)=\ln t$ جد

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} (g\circ f)(x,y)$$

للتمارين (17) - (23) هل هذه الاقترانات متصلة ؟

(17) $f(x,y)=x^2y$

(18) $f(x,y,z)=3x^2z-\pi\dfrac{xz}{y}$

(19) $f(x,y)=\dfrac{x^2+2y}{x^2+y^2-1}$

(20) $f(x,y,z)=\cos(xyz+1)$

(21) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(22) $f(x,y)=\ln(4x^2+9y^2+49)$

(23) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2 y^3}{(2x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(24) اثبت أن $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ متصل في كل متغير مستقل على حدة عند $(0,0)$ ، اي أن $f(x,0)$ ، $f(o,y)$ متصلان ، لكن f غير متصل عند $(0,0)$.

(25) اثبت أن $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ متصل في كل متغير على حدة عند $(0,0)$ ، لكنه غير متصل عند $(0,0)$.

(26) اثبت أن $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}, & (x,y) = (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ غير متصل عند $(0,0)$.

(27) الاقتران $f(x,y) = \dfrac{100\,ax}{ax+by}$, $x > o$, $y > 0$ وحيث a , b ثابتان موجبان يظهر في دراسة العلاقة بين جريان الدم في الرئة اليمنى الى مجموع كمية الدم في النظام . هل لهذا الاقتران نهاية عند $(0,0)$.

(13.4) المشتقات الجزئية

نبدأ باقتران ذي متغيرين $f(x,y)$ على المجموعة S . نثبّت احد المتغيرين ولنقل $y = y_o$ ، فالاقتران $f(x,y_o)$ هو اقتران في متغير واحد . لذلك يمكن تعريف مشتقة $f(x,y_o)$ عند x_o ، وهكذا نحصل على مشتقة اخرى نعرفها كما يلي

تعريف (13.9) افرض f اقترانا له متغيران وان (x_o , y_o) في مجاله . نعرف المشتقة الجزئية للاقتران f بالنسبة الى x عند (x_o , y_o) كما يلي

$$f_x(x_o,y_o) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o+h,y_o) - f(x_o,y_o)}{h}$$

شريطة وجود هذه النهاية . كذلك نعرف المشتقة الجزئية للاقتران f بالنسبة الى y عند (x_o,y_o) كما يلي

$$f_y(x_o,y_o) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o,y_o+h) - f(x_o,y_o)}{h}$$

شريطة وجود هذه النهاية .

وينتج من هذا التعريف اقترانان f_x ، f_y نعرفهما كما يلي

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h\,,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to o} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

وكل منهما هو مشتقة جزئية للاقتران f ، ونرمز لهما ايضا بالرمزين $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$

(نقرؤها مشتقة f الجزئية بالنسبة الى x (أو y)) .

مثل (3.17) افرض $f(x,y) = 12x^2y - 6\sin xy$. جد f_x , f_y .

الحل :

$$f_x = 24xy - 6y\cos xy$$

$$f_y = 12x^2 - 6x\cos xy$$

نجد قيمة المشتقتين عند $(1\,,\frac{\pi}{4})$

$$f_x(1\,,\frac{\pi}{4}) = 6\pi - \frac{6\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 6\pi - \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$f_y(1\,,\frac{\pi}{4}) = 12 - 6\cos\frac{\pi}{4} = 12 - \frac{6\sqrt{2}}{2} = 12 - 3\sqrt{2}$$

ونقدم جبر المشتقات الجزئية من خلال المبرهنة التالية

مبرهنة (13.10) افرض وجود f_x ، g_x ، f_y ، g_y للاقترانين f ، g فان

(i) $(f \pm g)_x = f_x \pm g_x \;,\; (f \pm g)_y = f_y \pm g_y$

(ii) $(f\,g)_x = f_x\,g + f\,g_x \;,\; (f\,g)_y = f_y\,g + f\,g_y$

$$(\frac{f}{g})_x = \frac{f_x\,g - f\,g_x}{g^2} \;,\; (\frac{f}{g})_y = \frac{f_y\,g - f\,g_y}{g^2}$$

شريطة أن $g \neq 0$.

مثل (13.18) افرض $f(x,y) = \frac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2}$

احسب f_x ، f_y .

الحل :

$$f_x = \frac{(x^2+y^2)(2xy - y^2) - (x^2y - xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2y^2 + 2xy^3 - y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{(x^2+y^2)(x^2 - 2xy) - (x^2y - xy^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3y - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

مثل (13.19) افرض

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y - xy^4}{x^3 + y^3} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

اثبت أن $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

الحل :

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h - 0} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h - 0} = 0$$

المعنى الهندسي للمشتقة الجزئية

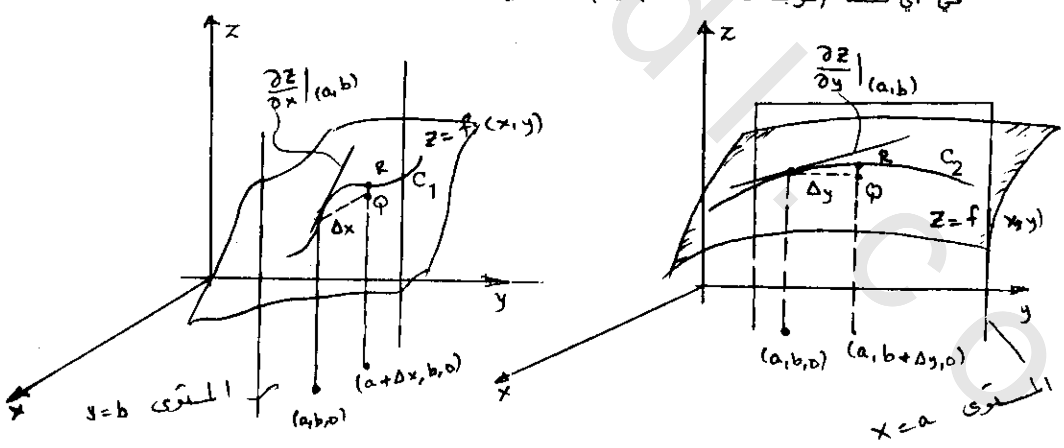
نفهم f_x على انها تغير f بالنسبة الى x مع اعتبار y ثابتا ، كذلك f_y هو تغير f بالنسبة الى y مع اعتبار x ثابتا . ولذلك يمكن تقديم تفسير هندسي لهذه المشتقات ، افرض السطح $z = f(x,y)$ ، واعتبر $y = b$ ثابتا ، فان اثر هذا السطح في المستوى $y = b$ هو المنحني C_1. نعرف ميل القاطع خلال النقطتين P ، R ، (انظر الشكل (13.23)) على انه

$$\frac{f(a + \Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}$$

وعندها

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}$$

اي أن $\frac{\partial z}{\partial x}$ هو ميل المماس للمنحني C_1 في اي نقطة (حيث توجد النهاية) . وبالطريقة نفسها نعرف $\frac{\partial z}{\partial y}$ على انه ميل المماس للمنحني C_2 (اثر $x = a$ في السطح) في اي نقطة (توجد عندها النهاية) . انظر الشكل (13.23) .



الشكل (13.23)

اقترانات ذات ثلاث متغيرات أو اكثر

نعمم تعريفنا للمشتقات الجزئية لاقترانات مهما كان عدد متغيراتها . فالمشتقة الجزئية لاحد المتغيرات يكون على حساب كون المتغيرات الأخرى تعامل وكأنها ثوابت.

مثل(13.20) افرض $f(x,y,z,w) = \frac{x^2 - w^2}{y^2 + z^2}$ احسب f_x ، f_y ، f_z ، f_w .

الحـل :

$$f_x = \frac{(y^2 + z^2)(2x)}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{2x}{y^2 + z^2}$$

$$f_y = \frac{-(x^2 - w^2)(2y)}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{2y(x^2 - w^2)}{(y^2 + z^2)^2}$$

$$f_z = \frac{-(x^2 - w^2)(2z)}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{-2z(x^2 - w^2)}{(y^2 + z^2)^2}$$

$$f_w = \frac{(y^2 + z^2).(-2w)}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{-2w}{y^2 + z^2}$$

المشتقات الجزئية من رتب عليا

نستطيع أن نعرف مشتقة جزئية من الرتبة الثانية أو من رتب اعلى ، مع ملاحظة خصوصية الاقترانات ذات المتغيرات المتعددة . افرض $z = f(x,y)$ ، فانه يمكن تعريف المشتقات الجزئية التالية من الرتبة الثانية

$$f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{xx}$$

ويلاحظ وجود مشتقتين مخلوطتين f_{xy} ، f_{yx} .

مبرهنة(13.11) افرض $f(x,y)$ وان f_{xy} ، f_{yx} متصلتان عند (a, b) ، فان

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

اما المشتقة من الرتبة الثالثة فهي

$$f_{yxx}, f_{yxy}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{xyx}, f_{xxy}, f_{yyy}, f_{xxx}$$

واذا كانت المشتقات متصلة ، فان هذه المشتقات المخلوطة متساوية حسب رتبها الجزئية ، أي أن

$$f_{yxx} = f_{xyx} = f_{xxy}$$

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

واما تعريف مشتقات من رتب اعلى فهو استطراد لما سبق .

مثل(13.21) جد المشتقات الجزئية حتى الرتبة الثالثة للاقتران

$$f(x,y) = x^2y^2 + y^3 - 2x^4 + 12$$

الحـل :

$$f_x = 2xy^2 - 8x^3 \quad , \quad f_y = 2x^2y + 3y^2$$

$$f_{xx} = 2y^2 - 24x^2 \quad , \quad f_{yy} = 2x^2 + 6y$$

$f_{xy} = 4yx \quad , \quad f_{yx} = 4xy$

$f_{xxx} = -48x \quad , \quad f_{yyy} = 6$

$f_{xxy} = 4y \quad , \quad f_{xyx} = 4y \quad , \quad f_{yxx} = 4y$

$f_{xyy} = 4x \quad , \quad f_{yxy} = 4x \quad , \quad f_{yyx} = 4x$

تمارين (13.4)

للتمارين (1) - (16) جد المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى لهذه الاقترانات.

(1) $f(x,y) = 9 - x^2 - 3y^2$

(2) $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 - y)}$

(3) $f(x,y) = x^2 - xy^2 + 4y^5$

(4) $f(x,y) = x^3 - 6x^2y + y^2$

(5) $f(x,y) = x^3 e^{3y}$

(6) $f(u,v) = \cos \frac{u}{v}$

(7) $g(u,v) = \frac{u^3 + v^3}{u^2 + v^2}$

(8) $f(x,y) = \cos^2 3x - \sin^2 5y$

(9) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 9y^2}$

(10) $f(x,y) = \sqrt{(1 - x^{1/3})^3 - y^2}$

(11) $f(x,y) = (\sin x^2 y)^3$

(12) $f(x,y,z) = x^2y^4 - xz^3$

(13) $f(x,y,z) = x(\cos y)\, e^z$

(14) $f(x,y,z) = \frac{x + y - z}{xy + yz - xz}$

(15) $f(x,y,z) = e^x(\cos y - \sin z)$

(16) $f(u,v,w) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 - w^2}}$

للتمارين (17) - (22) جد المشتقة الجزئية الاولى عند النقطة المفروضة

(17) $(2,-3) \quad , \quad f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

(18) $(-1,2) \quad , \quad f(x,y) = x^4 - 6x^2 + 3xy^2 + 1$

(19) $(0,-1,1) \quad , \quad f(x,y,z) = e^{2x-4y-z}$

(20) $(-1,2,0) \quad , \quad f(x,y,z) = xy^2 \sin z$

(21) $(0,0) \quad , \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2 + 4y^3} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(22) $(0,0) \quad , \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(23) اذا $f(x,y) = \int_{\pi}^{x^2+y^2} \cos t^2 \, dt$ ، جد f_x , f_y .

(24) اذا $f(x,y) = \int_1^x Q(s)\,ds + \int_1^x R(s)\,ds$ ، جد f_x , f_y .

للتمارين (25) – (30) جد f_{xy} ، f_{yx} .

(25) $f(x,y) = 3x^2 - \sqrt{2}\,xy^2 + y^5 + 10$ (26) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$

(27) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (28) $f(x,y) = x^4 - 2x^2y + 3$

(29) $f(x,y,z) = x^4 - 2x^2y\sqrt{z} + 3yz^2$ (30) $f(x,y,z) = z \sin xy$

للتمارين (31) – (34) جد f_{xx} ، f_{yy} ، f_{zz} (حيث يمكن)

(31) $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ (32) $f(x,y) = e^{x+2y}$

(33) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(34) $f(x,y,z) = e^{x^2} \sin yz + \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

للتمارين (35) – (38) احسب $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$

(35) $f(x,y) = 1 + x$ (36) $f(x,y) = 3 + y^2$

(37) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (38) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(39) اذا $z = e^{-ay} \cos ax$ اثبت أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial z}{\partial y}$$

(40) اذا $z = x^c e^{-y/x}$ حيث c ثابت ، جد قيمة هذا الثابت لتحقق

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

(41) معادلات كوشي – ريمان للاقترانين $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ هي $u_x = v_y$ ، $u_y = -v_x$. اثبت أن الاقترانات التالية تحقق هذه المعادلات

(أ) $u = x^2 - y^2$ ، $v = 2xy$

(ب) $u = e^x \cos y$ ، $v = e^x \sin y$

(جـ) $u = y/(x^2 + y^2)$ ، $v = x/(x^2 + y^2)$

(42) الاقتران z يحقق معادلة لابلاس اذا

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

اثبت أن ما يلي يحققها

(أ) $z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ (ب) $z = \ln(x^2 + y^2)$

(جـ) $z = \cos x \sinh y + \sin x \cosh y$ (د) $z = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x$

وقد يسمى هذا الاقتران توافقيا .

(43) اذا $w = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz$ جد w_{xyz} .

(44) العلاقة بين الاحداثيات القطبية (r,θ) والاحداثيات الكارتيزية (x,y) هي

$$\theta = \tan^{-1} y/x \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \,, \quad y = r\sin\theta \,, \quad x = r\cos\theta$$

احسب المشتقات الجزئية التالية

$$\frac{\partial r}{\partial y} , \frac{\partial r}{\partial x} , \frac{\partial y}{\partial r} , \frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} , \frac{\partial \theta}{\partial x} , \frac{\partial y}{\partial \theta} , \frac{\partial x}{\partial \theta}$$

(45) افرض $m(x,y)$ له مشتقات جزئية متصلة على المستطيل $a \le x \le b$ ، $c \le y \le d$.

اثبت أن

$$\int_a^b \frac{\partial m}{\partial x}(x,y)\,dx = m(b,y) - m(a,y) \quad , \quad c \le y \le d$$

$$\int_c^d \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)\,dy = m(x,d) - m(x,c) \quad , \quad a \le x \le b$$

(46) قانون الغاز المثالي يقول اذا n مولات من غاز له حجم V ودرجة حرارة T تحت الضغط p فان $pV = nkT$ ، حيث k هو ثابت الغاز العالمي . اثبت أن

$$\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial P}\,\frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

(13.5) الزيادات والتفاضلات

في البداية سنقدم مفاهيم الزيادة والتفاضلة وما يتبعها لاقتران $f(x,y)$ ذي متغيرين مستقلين . وستكون هذه المفاهيم تعميما لما درسناه في حالة اقتران له متغير مستقل واحد .

تعريف(13.12) افرض $w = f(x,y)$ وان Δx ، Δy هما زيادتان في x ، y على الترتيب، فاننا نعرف الزيادة في w (رمزها Δw) كما يلي

$$\Delta w = f(x + \Delta x \,,\, y + \Delta y) - f(x,y)$$

مثل(13.22) افرض $w = f(x,y) = x^3 - 2xy$

(أ) جد Δw

(ب) اذا $\Delta x = 0.1$ ، $\Delta y = -0.2$ ، جد Δw عند النقطة $(1,3)$.

الحل :

$$\Delta w = (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) - (x^3 - 2x^2 y)$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y$$

لايجاد المطلوب في (ب) نعوض

$$\Delta w = 3(0.1) + 3(0.1)^2 + (0.1)^3 - 2(-.2) - 6(0.1) - 2(0.1)(-.2)$$
$$= 0.171 \quad .$$

على اننا سنقدم فيما يلي صيغة اخرى لحساب الزيادة Δw ، لها فائدتها في برهان عدة نتائج رياضية . وهذه الصيغة هي تعميم لصيغة لاقتران ذي متغير واحد تعتمد على مبرهنة القيمة المتوسطة .

مبرهنة (13.13) افرض $w = f(x,y)$ معرفا على المستطيل

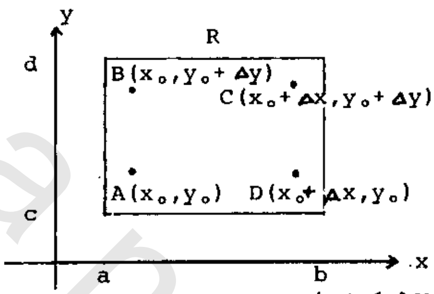
$$R = \{(x,y) : a < x < b \;,\; c < y < d\}$$

وان f_x ، f_y موجودتان في R ومتطلتان عند $A(x_0 , y_0) \in R$. اذا $C(x_0 + \Delta x , y_0 + \Delta y) \in R$ ، $\Delta w = f(x_0 + \Delta x , y_0 + \Delta y) - f(x_0 , y_0)$ فان

$$\Delta w = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

حيث ϵ_1 ، ϵ_2 اقترانان في Δx ، Δy لهما النهاية صفر عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

البرهان :



اولا نكتب Δw كما يلي

$$\Delta w = [f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0+\Delta y)] + [f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)]$$

نسمي $g(x) = f(x,y_0+\Delta y)$

حسب مبرهنة القيمة المتوسطة

$$g(x_0+\Delta x) - g(x_0) = g'(u)\Delta x$$

حيث u بين x_0 ، $x_0 + \Delta x$ بينما $f_x(x,y_0+\Delta y) = g'(x)$

لذلك

$$f(x_0+\Delta x , y_0+\Delta y) - f(x_0 , y_0 + \Delta y) = f_x(u , y_0 + \Delta y)\Delta x$$

وكذلك نعرف

$$h(y) = f(x_0 , y)$$

ومن مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على

$$h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(v)\Delta y$$

وتقع v بين y_0 ، $y_0 + \Delta y$ ، لذلك

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,v)\Delta y$$

نعوض في التعبير السابق للزيادة Δw

$$\Delta w=f_x(u,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,v)\Delta y$$

عرف ϵ_1 ، ϵ_2 كما يلي

$$\epsilon_1=f_x(u,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)$$

$$\epsilon_2=f_y(x_0,v)-f_y(x_0,y_0)$$

بما أن f_x ، f_y متصلان عند (x_0,y_0) فإن $u \longrightarrow x_0$ ، $v \longrightarrow y_0$ عندما $\Delta x \longrightarrow 0$ ، $\Delta y \longrightarrow 0$. أي أن $\epsilon_1 \longrightarrow 0$ ، $\epsilon_2 \longrightarrow 0$ عندما $(\Delta x,\Delta y) \longrightarrow (0,0)$.

لذلك نكتب

$$f_x(u,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\epsilon_1$$

$$f_y(x_0,v)=f_y(x_0,y_0)+\epsilon_2$$

عوض لنجد

$$\Delta w=[f_x(x_0,y_0)+\epsilon_1]\Delta x+[f_y(x_0,y_0)+\epsilon_2]\Delta y$$

مثل (13.23) نجد ϵ_1 ، ϵ_2 للاقتران $w=f(x,y)=x^3-2xy$

الحل : وجدنا في حل المثل السابق

$$\Delta w=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-2x\Delta y-2y\Delta x-2\Delta x\Delta y$$

$$=(3x^2-2y)\Delta x-2x\Delta y+(3x\Delta x+\Delta x^2)\Delta x+(-2\Delta x)\Delta y$$

أي أن $\epsilon_1=3x\Delta x+\Delta x^2$ ، $\epsilon_2=-2\Delta x$

كذلك لاحظ أن $\epsilon_1 \longrightarrow 0$ ، $\epsilon_2 \longrightarrow 0$ عندما $(\Delta x,\Delta y) \longrightarrow (0,0)$.

بعد ما سبق ، نستطيع أن نعرف التفاضلة .

تعريف (13.14) افرض $w=f(x,y)$ ، وان Δx ، Δy زيادتان في x ، y .

(أ) نعرف التفاضلة dx والتفاضلة dy (للمتغيرين المستقلين) كما يلي

$$dx=\Delta x\ ,\quad dy=\Delta y$$

(ب) نعرف التفاضلة dw (للمتغير التابع) كما يلي

$$dw=f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy$$

ومن هذا التعريف والمبرهنة السابقة ، في حال تحقيق شروطهما فان

$$\Delta w-dw=\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y$$

واذا Δx ، Δy صغيران فان $\Delta w \approx dw$ ، مما يجعل dw مفيدة في حساب مقادير التغير على وجه التقريب بشيء من الدقة .

مثل (13.24) من المثل السابق $w = f(x,y) = x^3 - 2xy$

فان $dw = (3x^2 - 2y)\,dx - 2x\,dy$

فاذا فرضنا النقطة $(1,3)$ تتغير بمقدار $\Delta x = 0.1$ ، $\Delta y = -0.2$ فان

$$\Delta w \approx dw = (3-6)(0.1) - 2(-0.2) = 0.100$$

والفرق $0.071 = dw - \Delta w$

مثل (13.25) نصف قطر مخروط دائري قائم هو 6 سم ، وارتفاعه 18 سم مع امكانية غلط في المقياس قدره ± 0.005 . استعمل التفاضلة لتحسب حجم المخروط ، على وجه التقريب .

الحل :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$dv = \frac{\pi}{3}(2r)h\,dr + \frac{\pi}{3}r^2\,dh$$

عوض $\pm 0.005 = dh = dr$, $18 = h$, $6 = r$

$$dv = \frac{\pi}{3}(252)(\pm 0.005) = \pm 1.319$$

والحجم $V + dV = 678.584 \pm 1.319$

$= 679.903$

او $= 677.265$

الآن نعرف مفهوم قابلية الاشتقاق (الاشتقاقية) .

تعريف (13.15) اذا $w = f(x,y)$ ، فان f قابل للاشتقاق عند (x_0,y_0) شريطة ان Δw يمكن كتابتها على النحو

$$\Delta w = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

حيث ϵ_1 ، ϵ_2 لهما النهاية صفر عندما $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0,0)$.

ونقول f قابل للاشتقاق على المنطقة R ، اذا كان قابلا للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط R .

مبرهنة (13.16) اذا $w = f(x,y)$ ، و f_x ، f_y متصلان على منطقة مفتوحة R فان f قابل للاشتقاق على R .

ما هي العلاقة بين الاشتقاقية والاتصال ؟ للاقتران ذي المتغير الواحد وجدنا

ان وجود المشتقة يتضمن الاتصال ، اما في حال اقتران متعدد المتغيرات فالامر مختلف .

<u>مبرهنة (13.17)</u> اذا $f(x,y)$ قابل للاشتقاق عند $(x_\circ,y_\circ)$ ، فان f متصل عند $(x_\circ , y_\circ)$.

<u>البرهان</u> : نكتب $\Delta w = [f_x(x_\circ,y_\circ)+\epsilon_1]\Delta x+[f_y(x_\circ,y_\circ)+\epsilon_2]\Delta y$

افرض $x = x_\circ + \Delta x$ ، $y = y_\circ + \Delta y$ ، فان

$$\Delta w = f(x,y) - f(x_\circ,y_\circ)$$

$$= [f_x(x_\circ,y_\circ) + \epsilon_1](x - x_\circ) + [f_y(x_\circ,y_\circ) + \epsilon_2](y - y_\circ)$$

نحسب النهاية $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} [f(x,y) - f(x_\circ,y_\circ)] = 0$

أي أن $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y) = f(x_\circ,y_\circ)$

أي أن f متصل عند $(x_\circ,y_\circ)$.

ونصل الى النتيجة التالية

<u>نتيجة (13.18)</u> اذا f_x ، f_y متصلان على منطقة مستطيلة R فان f متصل على R .

ونؤكد هنا (بضرب مثل) ان مجرد وجود f_x ، f_y ليس كافيا لان يكون f متصلا .

<u>مثل(13.26)</u> افرض
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

فان $f_x(0 , 0)$ ، $f_y(0 , 0)$ موجودتان ، لكن f ليس متصلا عند $(0 , 0)$ فهو ليس قابلا للاشتقاق عند $(0 , 0)$.

<u>الحل</u> :
$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

لكن يمكن البرهنة على أن $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .

لذلك فهو غير متصل ، وبالتالي ليس قابلا للاشتقاق عند $(0 , 0)$.

والآن نكتب مبرهنة تماثل مبرهنة القيمة المتوسطة .

<u>مبرهنة (13.19)</u> افرض $f(x,y)$ معرفا على المستطيل $R = \{(x,y): a \le x \le b , c \le y \le d\}$

(أ) اذا $f_x(x , y_\circ)$ موجود لعدد ما $y_\circ \in [c , d]$ لجميع $x \in [a,b]$ ، فانه

يوجد عدد $\xi_1 \in (a , b)$ بحيث أن

$$f(b , y_\circ) - f(a , y_\circ) = (b - a)\, f_x (\xi_1 , y_\circ)$$

(ب) اذا $f_y(x_\circ , y)$ موجود لعدد ما $x_\circ \in [a , b]$ لجميع $y \in [c,d]$ ، فانه

يوجد عدد $\xi_2 \in (c , d)$ بحيث أن

$$f(x_\circ , d) - f(x_\circ , c) = (d - c)\, f_y(x_\circ , \xi_2)$$

البرهان : نبرهن (أ).عرف الاقتران g كما يلي

$$g(x) = f(x , y_\circ)$$

فان

$$g'(x) = f_x(x , y_\circ)$$

وتنطبق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الاقتران $g(x)$ على $[a , b]$.

لذلك يوجد عدد ξ_1 ، $a < \xi_1 < b$ وان

$$g'(\xi_1) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

بالتعويض

$$f(b , y_\circ) - f(a , y_\circ) = (b - a)\, f_x (\xi_1 , y_\circ)$$

وبرهان (ب) مماثل لذلك .

مثل(13.27) افرض

$$f(x,y) = \frac{2\,x\,y}{3 + x}$$

وان $x \in [2 , 5]$ ، جد ξ_1 عندما $y = 4$.

الحل :

$$f(5 , 4) - f(2 , 4) = (5 - 2)\, f_x (\xi_1 , 4)$$

$$5 - \frac{16}{5} = 3 \cdot \frac{24}{(3 + \xi_1)^2}$$

او

$$(3 + \xi_1)^2 = 40$$

$$3 + \xi_1 = \pm 2\sqrt{10}$$

نريد $2 < \xi_1 < 5$ ، لذلك $\xi_1 = 2\sqrt{10} - 3$

تعميم هذه المفاهيم . قدمنا مفاهيم الاشتقاقية والزيادة والتفاضلة لاقتران له متغيران ، وبالاسلوب نفسه يمكن توسيع هذه المفاهيم لاقترانات لها ثلاث متغيرات او اكثر .

مثل(13.28) شركة تعاقدت على شراء 10000 صندوق خشبي ابعادها 3 ، 4 ، 5 امتار . اذا تكلفة الخشب هي 0.25 دينار لكل متر مربع من الخشب ، واذا كان قص الخشب دقيقا حتى 0.05 م ، جد على وجه التقريب التكلفة الاجمالية .

الحـــل : التكلفة C ، وابعاد الصندوق هي x ، y ، z ، لذلـــك

$$C = 0.25(2xy + 2yz + 2xz)$$

$$= 0.5(xy + yz + xz)$$

$$dC = C_x dx + C_y dy + C_z dz$$

$$= 0.5[(y + z) + (x + z) + (y + x)]dx$$

$$= 1(x + y + z)dx$$

$$= (3 + 4 + 5)(0.05) = 0.6$$

نحســب القيمــة C

$$C = 0.5(12 + 20 + 15) = 23.5$$

$C + dC = 23.5 + 0.6 = 24.1$ دينـــارا

هذا للصندوق الواحد ، وللعدد المطلوب فـــان التكلفـــة

241000 دينـــار ·

تمارين (13.5)

للتمارين (1) - (4) احسب e_1 ، e_2 حسب ما في مبرهنة (13.14)

(1) $f(x,y) = 4y^2 - 3xy + 2x$

(2) $f(x,y) = 2x^2 + xy^2 - 3y$

(3) $f(x,y) = x^3 + y^3$

(4) $f(x,y) = (x - 2y)^2$

للتمارين (5) - (12) جد dw

(5) $w = x^3 - x^2y + 3y^2$

(6) $w = x^2 + 4y - 2x^2y$

(7) $w = x^2 \sin y - y^{7/5}$

(8) $w = e^{-2x} y - x^4y^2$

(9) $w = x^2 \ln(y^2 + z^2)$

(10) $w = x^2 e^{yz} + y \ln z$

(11) $w = xyz/(x + y + z)$

(12) $w = x^2y^3zt^{-1}v^4$

(13) استخدم التفاضلة لتقرب

$$f(x,y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$$

عندما (x , y) تتغير من $(-2 , 3)$ الى $(-2.02 , 3.01)$.

(14) استخدم التفاضلة لتقرب

$$f(x,y) = x^2 + 2xy - 5y$$

عندما (x , y) تتغير من $(1 , 2)$ الى $(1.03 , 1.98)$.

(15) استخدم التفاضلة لتقرب

$$f(x,y,z) = x^2 z^3 - 3yz^2 + x^{-3} + 2y^{1/2} z$$

عندما (x,y,z) تتغير من $(1,4,2)$ الى $(1.02, 3.97, 1.96)$.

(16) استخدم التفاضلة لتقرب

$$w = r^2 - 3sv + 4p^3$$

عندما (r,s,v,p) تتغير من $(1,2,4,3)$ الى $(1.02, 1.99, 4.01, 2.97)$.

(17) استخدم التفاضلة لتقرب

$$\sqrt[3]{26.98} \quad \sqrt{36.04}$$

(18) استخدم التفاضلة لتقرب

$$(32.03)^{2/5} / (3.95)^3$$

(19) افرض

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

اثبت أن f قابل للاشتقاق عند $(0,0)$.

(20) افرض

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 z}{x^4 + y^4 + z^4}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

اثبت f_x ، f_y ، f_z موجودة عند $(0,0,0)$ بينما f ليس قابلا للاشتقاق عند $(0,0,0)$.

(21) افرض

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{5x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

اثبت أن هذا الاقتران متصل عند $(0,0)$ وان f_x ، f_y موجودتان عند $(0,0)$ ، لكنهما ليستا متصلتين عندها .

(22) افرض

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{2xy z^2}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

اثبت أن f قابل للاشتقاق عند $(0,0,0)$.

(23) افرض

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(أ) جد $\Delta f(0,0)$

(ب) جد f_x ، f_y عند $(0,0)$

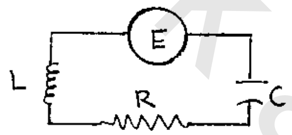
(جـ) اثبت أن f قابل للاشتقاق عند $(0,0)$

(د) اثبت أن f_x ، f_y ليستا متصلتين عند $(0,0)$.

(24) ضلعا مثلث قائم الزاوية طولهما 3 سم ، 4 سم مع امكانية غلط قدره 0.02 سم . استخدم التفاضلة لتحسب على وجه التقريب (أ) طول الوتر ، (ب) مساحة المثلث.

(25) علبة اسطوانية من المعدن قطرها 6 سم وارتفاعها 12 سم ، وسماكتها 0.012 سم . استخدم التفاضلة لتحسب مقدار المعدن اللازم لصنعها .

(26) دارة كهربائية ، انظر الشكل (13.24) ، فيها محاثة L ، ومقاومة R ومواسعة C . نعرف المعاوقة Z على انها $Z = \sqrt{R^2+X^2}$ حيث X هي المفاعلة $X=1000L-\frac{1}{1000C}$.
اذا غيرت L ، R ، C من 0.4 هنرى ، 400 اوم ، 10^{-5} فاراد الى 0.45 هنرى ، و 425 اوم ، و 11.1×10^{-5} فاراد على الترتيب . ما هو مقدار التغير في المعاوقة؟ ما هي القيمة التقريبية للمعاوقة ؟



الشكل (13.24)

(27) لصندوق مغلق نزيد طوله وعرضه وارتفاعه بمقدار 2 ٪ ، 5 ٪ ، 8 ٪ على الترتيب ، ما هو مقدار الزيادة في حجمه على وجه التقريب ؟ ما هو مقدار الزيادة في مساحة سطوحه ؟ وما هي المساحة على وجه التقريب ؟

(28) سيارة تسير بسرعة 40 كم / الساعة تقترب من تقاطع مع سكة حديد معامد لطريق السيارة ، بينما يقترب قطار من التقاطع بسرعة 160 كم / الساعة . ما هو معدل التغير في المسافة بين السيارة والقطار عندما كانت السيارة تبعد 1 كم عن التقاطع ، والقطار يبعد 2 كم عنه ؟

(13.6) قاعدة السلسلة

نقدم الآن قاعدة السلسلة لاقتران مركب له اكثر من متغير ، ولان لهذه القاعدة عدة صيغ ، حسب الحال ، نكتبها في المبرهنة التالية ، ونفرض في كل حالة أن المشتقات الجزئية المطلوبة موجودة .

مبرهنة (13.20)

(أ) افرض الاقترانات $z = f(x, y)$ ، $x = g_1(t)$ ، $y = g_2(t)$ فان $z = f(g_1(t), g_2(t))$ ، وكذلك

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

(ب) افرض $z = f(x, y)$ ، $x = g_1(u, v)$ ، $y = g_2(u, v)$ فان $z = f(g_1(u,v), g_2(u,v))$ ، وكذلك

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad (3)$$

(جـ) افرض $w = f(x,y,z)$ ، $x = g_1(t)$ ، $y = g_2(t)$ ، $z = g_3(t)$ فان $w = f(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$ ، وكذلك

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (4)$$

(د) افرض $w = f(x,y,z)$ ، $x = g_1(u, v)$ ، $y = g_2(u,v)$ ، $z = g_3(u,v)$ فان $w = f(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v))$ ، وكذلك

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \qquad (6)$$

مثل (13.29) افرض $z = x^3 \ln y$ ، $x = \cos t$ ، $y = t^2 + 1$ فان

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= 3x^2 \ln y(-\sin t) + \frac{x^3}{y}(2t)\\ &= 3\cos^2 t \sin t \ln(t^2+1) + 2t\frac{\cos^3 t}{t^2+1}\end{aligned}$$

مثل (13.30) افرض $z = x^3 \ln y$ ، $x = u^2 - v^2$ ، $y = u^2 + v^2$ فان

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= (3x^2 \ln y)\ (2u) + \frac{x^3}{y}(2u)\\ &= 6u(u^2 - v^2)^2 \ln(u^2 + v^2) + \frac{2u(u^2 - v^2)^3}{u^2 + v^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$= (3x^2 \ln y)\ (-2v) + \frac{x^3}{y}(2v)$$
$$= -6v(u^2 - v^2)^2 \ln(u^2 + v^2) + \frac{2v(u^2 - v^2)^3}{u^2 + v^2}$$

مثل (13.31) افرض $w = x^2 \sin y z^2$ ، $x = \cos t$ ، $y = t^2$ ، $z = e^t$ فـان

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$
$$= 2x \sin y z^2 (-\sin t) + x^2 z^2 \cos y z^2 (2t) + 2yzx^2 \cos yz^2 (e^t)$$
$$= -2 \sin t \cos t \sin(t^2 e^t) + e^{2t} \cos^2 t (2t) \cos(t^2 e^t)$$
$$+ 2 e^{2t} t^2 \cos^2 t \cos(t^2 e^t)$$
$$= (-2 \sin \cos t + 4t e^{2t} \cos^2 t + 2t^2 e^{2t} \cos^2 t) \cos(t^2 e^t)$$

مثل (13.32) افرض $w = x \sin y^2 z$ ، $x = 1 - u^2 + v^2$ ، $y = uv$ ، $z = u + v$ فـان

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$= \sin y^2 z\ (-2u) + 2y\,x\,z \cos y^2 z (v) + xy^2 \cos y^2 z\ (1)$$
$$= -2u \sin[(u^2 v^2)(u + v)] + [2uv(1 - u^2 + v^2)(u + v) + u^2 v^2 (1 - u^2 + v^2)] \times$$
$$\cos[(u^2 v^2)(u + v)]$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$= \sin y^2 z (2v) + 2x\,y\,z \cos y^2 z\ (u) + x\,y^2 \cos y^2 z\ (1)$$
$$= 2v \sin(u^2 v^2 (u + v)) + [2u^2 v(u + v)(1 - u^2 + v^2) + u^2 v^2 (1 - u^2 + v^2)] \times$$
$$\cos[(u^2 v^2)(u + v)]$$

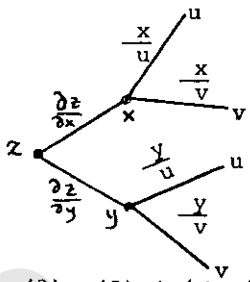
مثل (13.33) افرض $z = g(v - u\ ,\ u - v)$ ، اثبت أن

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

الحـل : افرض $x = u - v$ ، $y = v - u$ عندما

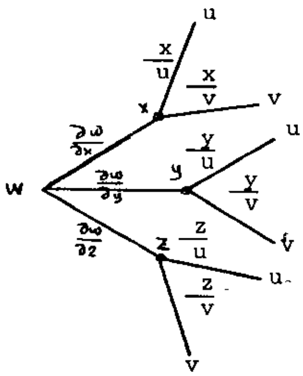
$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}(-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(+1) + \frac{\partial z}{\partial x}(1) + \frac{\partial z}{\partial y}(-1) = 0$$

مخططات شجرية يمكن الاستعانة بمخططات على هيئة اغصان وفروع شجرة للربـط بيـن عوامل قاعدة السلسلة ، و المخطط التالي يوضح العلاقات المذكورة في المبرهنة السابقة .



المعادلتان (2) , (3)

المخطط (1)



المعادلتان (5) , (6)

المخطط (2)

الاشتقاق الضمني :

مبرهنة (13.21) افرض $w = w(x, y, z)$ متصلا له مشتقات جزئية ، وان المعادلة

$$w(x, y, z) = 0$$

تعرف الاقتران $z = f(x,y)$ ضمنيا بدلالة x ، y . اذا $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$ فان

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial w/\partial y}{\partial w/\partial z}$$

البرهان : نكتب $w = w(x, y, z)$ مع $x = s$ ، $y = t$ ، $z = z(s, t)$ ، عندها

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

لكن $w = w(s, t, z(s, t)) = 0$ ، لذلك

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 0$$

عوض لتحصل على

$$0 = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$
$$= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

بما أن $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$ ، لذلك

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial z}$$

والمعادلة الاخرى تبرهن بالطريقة نفسها .

مثل (13.34) افرض $x^2z^2 - 2xyz + z^3y^3 = 5$ جد $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$.

الحـــل : افرض$0=5-{}^{3}y^{3}$ $w = w(x,y,z) = x^2 z^2 - 2xyz - z^3 y^3 - 5 = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xz^2 - 2yz$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -2xz - 3z^3 y^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2x^2 z^2 - 2xy - 3z^2 y^3$$

لذلــك

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w/\partial x}{\partial w/\partial z} = -\frac{2xz^2 - 2yz}{2x^2 z^2 - 2xy - 3z^2 y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial w/\partial y}{\partial w/\partial z} = -\frac{-2xz - 3z^3 y^2}{2x^2 z^2 - 2xy - 3z^2 y^3}$$

تمارين (13.6)

للتمارين (1) - (6) جد $\frac{dz}{dt}$

(1) $z = 2x^2 - 3y^3$, $x = \sqrt{t}$, $y = e^{2t}$

(2) $z = \ln(3x^2 + y^2)$, $x = e^{3t}$, $y = t^{1/3}$

(3) $z = \sin x + \cos xy$, $x = t^2$, $y = 1$

(4) $z = \tan^{-1}(y^2 + x^2)$, $x = t^2$, $y = 3$

(5) $z = \sqrt{2x - 4y}$, $x = \ln t$, $y = 1 - 3t^2$

(6) $z = u^3 v - uv^4$, $u = e^{-5t}$, $v = \sec t$

للتمارين (7) - (12) جد $\frac{dw}{dt}$

(7) $w = \frac{x}{y} - \frac{z}{x}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \tan t$

(8) $w = \frac{z}{x^2 y} - 5$; $x = t^{-2}$, $y = -2t$, $z = \sqrt{t}$

(9) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = 2t$

(10) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = e^{-t^2}$

(11) $w = \sin xy^2 z^3$; $x = 3t$, $y = \sqrt{t}$, $z = t^{1/3}$

(12) $w = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{y^3 - z^3}$; $x = t^2$, $y = t^3$, $z = -t^3$

للتمارين (13) - (16) جد $\frac{\partial z}{\partial u}$ ، $\frac{\partial z}{\partial v}$

(13) $z = \frac{4}{xy} - \frac{x}{y}$; $x = u^2$, $y = uv$

(14) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$; $x = u + v - 1$, $y = u - v - 1$

(15) $z = \ln(x^2 - y^2)$; $x = u - v$, $y = u^2 + v^2$

(16) $z = 2e^{x^2 y}$; $x = \sqrt{uv}$, $y = \frac{1}{uv}$

للتمارين (17) - (20) جد $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$

(17) $z = \sin 2u \cos 3v$; $u = (r+s)^2$, $v = (r-s)^2$

(18) $z = \ln u - \ln v$; $u = 2^{rs}$, $v = 2^{r/s}$

(19) $z = u e^{v} + v e^{-u}$; $u = \ln r$, $v = s \ln r$

(20) $z = 2^{u-v}$; $u = r \sin s$, $v = r \cos s$

للتمارين (21) - (24) جد $\frac{\partial w}{\partial u}$ ، $\frac{\partial w}{\partial v}$

(21) $w = y \sec xz$; $x = v/u$, $y = u - v$, $z = u/v$

(22) $w = x^2 + 3y - 3z$; $x = v \cos u$, $y = u \sin v$, $z = uv$

(23) $w = \frac{x + y}{y + z}$; $x = u - v$, $y = v - u$, $z = v$

(24) $w = e^{y/x} + e^{x/z}$; $x = \frac{\ln v}{u}$, $y = \ln v$, $z = \frac{\ln v}{uv}$

للتمارين (25) - (28) جد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام الاشتقاق الضمني

(25) $x^3 + 4x^2 y - 3xy^2 + 2y^3 + 5 = 0$ (26) $x^{4/3} + y^{4/3} = 2$

(27) $x^2 + y^2 + \sin x y^2 = 0$ (28) $e^{y/x} - \ln x/y - 30 = 0$

للتمارين (29) - (32) استخدم الاشتقاق الضمني لتحسب $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$

(29) $x - yz + \cos xyz = 2$ (30) $\frac{1}{z} - \frac{1}{y - z} + \frac{1}{x + y + z}$

(31) $z^4 + x^2 z^3 + y^2 + xy = 2$ (32) $\cos xyz + \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

(33) افرض $w = f(x - y, y - z, z - x)$ اثبت أن

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(34) افرض $y = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, $z = f(x, y)$

(أ) اثبت أن $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$

و $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$

(ب) اثبت أن $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$

(35) افرض $z = f(y + ax) + g(y - ax)$ ، $a \neq 0$ ، اثبت أن z تحقق معادلة الامواج

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(36) الاقتران $f(x, y)$ متجانس المتغيرات من الدرجة n اذا

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

في هذه الحالة ، اثبت أن

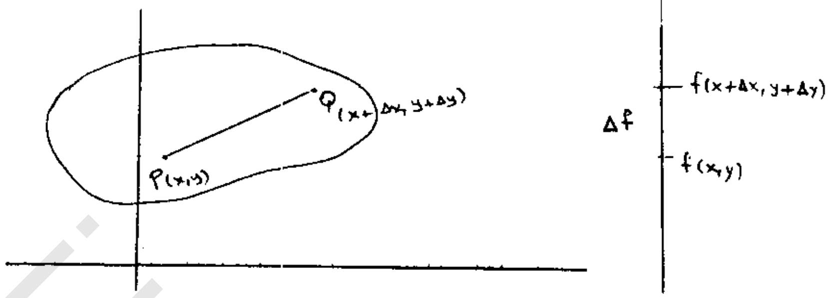
$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = n f(x, y)$$

(37) للاقتران $f(x,y) = \tan \frac{x^2 - y^2}{xy}$ ، استخدم التمرين (36) لتبرهن على أن

$$x f_x + y f_y = 0$$

(13.7) المشتقة الاتجاهية والتدريج

وجدنا ان المشتقة f_x تقيس التغير في f باتجاه مواز لمحور x ، وكذلك f_y تقيس تغير f باتجاه مواز لمحور y . ولكن التغير في f قد يكون بالنسبة الى أي اتجاه ، فلو نظرنا الى الشكل (13.25) وفرضنا أن P , Q نقطتان في مجال $f(x , y)$ حيث $P(x,y)$ ، $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$.



الشكل (13.25)

عندها $\Delta f = f(x + \Delta x , y + \Delta y) - f(x , y)$

والنسبة
$$\frac{\Delta f}{d(P,Q)} = \frac{\Delta f}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

هي معدل التغير في f باتجاه قطعة المستقيم $\overline{PQ}$. واذا اقتربت Q من P فان هذه النسبة تتغير ، والسؤال الذي يثور ، هو ماذا نسمي

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta f}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

اذا وجدت ؟ هذه هي معدل التغير في f بالنسبة الى المسافة في اتجاه $\overrightarrow{PQ}$ ، أي انها مشتقة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{PQ}$. وهذا يحفزنا لنقدم التعريف التالي

<u>تعريف (13.22)</u> افرض f اقترانا معرفا على مجموعة القرص D مركزه (x_0 , y_0) . وافرض $\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j}$ متجه وحدة ، فان <u>المشتقة الاتجاهية</u> للاقتران f عند (x_0,y_0) في اتجاه $\underline{u}$ ، رمزها $D_{\underline{u}}f(x_0 , y_0)$ هي حسب

$$D_{\underline{u}}f(x_0 , y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h u_1 , y_0 + h u_2) - f(x_0,y_0)}{h}$$

شريطة وجود هذه النهاية .

من الواضح انه اذا θ الزاوية التي يصنعها $\underline{u}$ مع محور x الموجب ، انظر الشكل (13.26) ، فان $\underline{u} = \cos\theta\, \underline{i} + \sin\theta\, \underline{j}$ ، لذلك فالمشتقة الاتجاهية هي ايضا

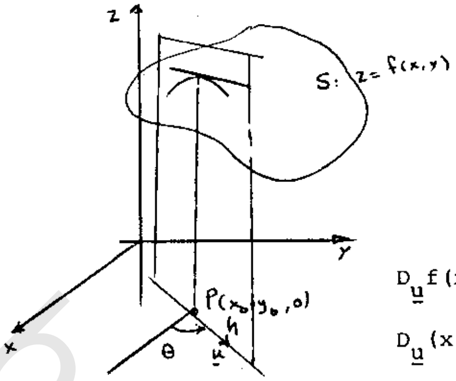
$$D_{\underline{u}}f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\cos\theta , y_0 + h\sin\theta) - f(x_0,y_0)}{h}$$

شريطة وجود هذه النهاية ،

وعندما $\underline{u}=\underline{i}$ فان التعويض في أي من المعادلتين يؤدي الى

$$D_{\underline{u}}f(x_\circ,y_\circ)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_\circ+h,y_\circ)-f(x_\circ,y_\circ)}{h}=f_x(x_\circ,y_\circ)$$

كذلك عندما $\underline{u}=\underline{j}$ فان $D_{\underline{u}}(x_\circ,y_\circ)=f_y(x_\circ,y_\circ)$



الشكل(13.25)

على ان استعمال التعريف لحساب $D_{\underline{u}}$ بشكل عام امر مزعج ، لذلك نقدم المبرهنة التالية

__مبرهنة (13.23)__ افرض f قابلا للاشتقاق عند $(x_\circ , y_\circ)$ ، فان f له مشتقة اتجاهية عند $(x_\circ , y_\circ)$ في أي اتجاه . كذلك اذا $\underline{u}=u_1\underline{i}+u_2\underline{j}$ متجه وحدة ، فان

$$D_{\underline{u}}(x_\circ,y_\circ)=f_x(x_\circ,y_\circ)u_1+f_y(x_\circ,y_2)u_2$$
$$=(f_x\underline{i}+f_y\underline{j}).(u_1\underline{i}+u_2\underline{j})$$

__البرهان__ : افرض $F(h)=f(x_\circ+hu_1 , y_\circ+hu_2)$ ، فان

$$\frac{F(h)-F(0)}{h}=\frac{f(x_\circ+hu_1 , y_\circ+hu_2)-f(x_\circ,y_\circ)}{h}$$

افرض $g_1(h)=x_\circ+hu_1$ ، $g_2(h)=y_\circ+hu_2$ فان

$F(h)=f(g_1(h),g_2(h))$ ، كذلك $g_1(0)=x_\circ$ ، $g_2(0)=y_\circ$

نستخدم مبرهنة قاعدة السلسلة $(t=h)$ لنجد أن $F'(0)$ موجودة ، وان

$$D_{\underline{u}}f(x_\circ,y_\circ)=F'(0)=f_x(x_\circ,y_\circ)g_1'(0)+f_y(x_\circ,y_\circ)g_2'(0)$$
$$=f_x(x_\circ,y_\circ)u_1+f_y(x_\circ,y_\circ)u_2$$

__مثل(13.35)__ اذا $f(x,y)=6+3x^2-y^2$ ، $\underline{u}=\frac{1}{\sqrt2}\underline{i}+\frac{1}{\sqrt2}\underline{j}$ جد $D_{\underline{u}}f(1,2)$.

__الحـــل__ : $f_x=6x$, $f_y=-2y$

$$D_{\underline{u}}f(1,2)=6\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)-4\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$$

__مثل(13.36)__ اذا $f(x,y)=6+3x^2-y^2$ جد $D_uf(1,2)$ عندما

(أ) $\underline{u}=-\frac{1}{\sqrt2}\underline{i}+\frac{1}{\sqrt2}\underline{j}$

(ب) $\underline{u}=-\frac{1}{\sqrt2}\underline{i}-\frac{1}{\sqrt2}\underline{j}$

(جـ) $\underline{u}=\frac{1}{\sqrt2}\underline{i}-\frac{1}{\sqrt2}\underline{j}$

الحـــل : (أ) $D_{\underline{u}}f(1,2) = 6(-\frac{1}{\sqrt{2}}) -4 (\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{10}{\sqrt{2}} = -5\sqrt{2}$

(ب) $D_{\underline{u}}f(1,2) = 6(-\frac{1}{\sqrt{2}}) -4 (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

(جـ) $D_{\underline{u}}f(1,2) = 6(-\frac{1}{\sqrt{2}}) -4 (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

مثل (13.37) اذا $f(x,y) = 6 + 3x^2 - 2y$ جد المشتقة الاتجاهية عند $(3\ ,-1)$ في اتجاه $\underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j}$.

الحـــل :
$$\|\underline{a}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$\underline{u} = \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{j}$$
$$f_y = -2\ ,\ f_x = 6x$$
$$D_{\underline{u}}f(3,-1) = 18(\frac{2}{\sqrt{5}}) -2(-\frac{1}{\sqrt{5}})$$
$$= \frac{38}{\sqrt{5}}$$

ويمكن توسيع مفهوم المشتقة الاتجاهية في اتجاه متجه في ابعاد ثلاثة

تعريف (13.24) اذا f اقتران معرف على مجموعة تحوي كرة B مركزها $(x_0\ ,y_0\ ,z_0)$ واذا $\underline{u} = u_1\underline{i} + u_2\underline{j} + u_3\underline{k}$ متجه وحدة ، فان المشتقة الاتجاهية للاقتران f عند $(x_0\ ,y_0\ ,z_0)$ في اتجاه $\underline{u}$ ، رمزها $D_{\underline{u}}(x_0\ ,y_0\ ,z_0)$ تعرف حسب
$$D_{\underline{u}}f(x_0,y_0,z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1\ ,y_0+hu_2\ ,z_0+hu_3) - f(x_0\ ,y_0\ ,z_0)}{h}$$
شريطة وجود النهاية .

مثل (13.38) افرض $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ جد المشتقة الاتجاهية عند $(0,1,-1)$ باتجاه $\underline{a} = -\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$.

الحـــل :
$$\|\underline{a}\| = \sqrt{3}$$
متجه الوحدة باتجاه $\underline{a}$ هو $\underline{u} = -\frac{\underline{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\underline{j}}{\sqrt{3}} - \frac{\underline{k}}{\sqrt{3}}$

كذلك $f_x = 2x\,e^{x^2+y^2+z^2}\ ,\ f_y = 2y\,e^{x^2+y^2+z^2}\ ,\ f_z = 2z\,e^{x^2+y^2+z^2}$

لذلك
$$D_{\underline{u}}f(0,1,-1) = 0(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + 2e^2(\frac{1}{\sqrt{3}}) + (-2e^2)(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{\sqrt{3}}e^2$$

مبرهنة (13.25) افرض f قابلا للاشتقاق عند $(x_0\ ,y_0\ ,z_0)$ ، فان f لـه مشتقة اتجاهية عند $(x_0\ ,y_0\ ,z_0)$ في أي اتجاه . كذلك اذا $\underline{u} = u_1\underline{i} + u_2\underline{j} + u_3\underline{k}$ متجه وحدة ، فان

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0, z_0) = (f_x \underline{i} + f_y \underline{j} + f_z \underline{k}) \cdot (u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k})$$

التدريج

نقدم الآن مؤشرا مفاضليا له اهميته ، حتى في حساب المشتقة الاتجاهية .

تعريف (13.27)

(أ) افرض f اقترانا ذا متغيرين له مشتقات جزئية عند (x_0 , y_0) . نعرف تدريج f عند (x_0 , y_0) رمزه $\underline{\nabla} f(x_0 , y_0)$ كما يلي

$$\underline{\nabla} f(x_0 , y_0) = f_x(x_0 , y_0)\underline{i} + f_y(x_0 , y_0)\underline{j}$$

(ب) افرض f اقترانا ذا ثلاث متغيرات له مشتقات جزئية عند (x_0 , y_0 , z_0) . نعرف تدريج f عند (x_0 , y_0 , z_0) رمزه $\underline{\nabla} f(x_0 , y_0 , z_0)$ كما يلي

$$\underline{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)\underline{i} + f_y(x_0,y_0,z_0)\underline{j} + f_z(x_0,y_0,z_0)\underline{k}$$

لاحظ أن $\underline{\nabla} f$ هو متجه ، وهو المؤثر التفاضلي

$$\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}\right)$$

والرمز ∇ هو مقلوب Δ (دلتا) نلفظه "دل" أو "نابلا" ، (وبالعربية تدريج) .

مثل (13.39) اذا $f(x,y) = \cos xy$ ، جد تدريج f ، ثم جد هذا التدريج عند $(\frac{\pi}{6} , 1)$.

الحل :
$$\begin{aligned}\underline{\nabla} f &= f_x\underline{i} + f_y\underline{j} = -y\sin xy\,\underline{i} - x\sin xy\,\underline{j}\\ &= -1\left(\tfrac{1}{2}\right)\underline{i} - \frac{\pi}{6}(1)\underline{j}\\ &= -\frac{1}{2}\underline{i} - \frac{\pi}{6}\underline{j}\end{aligned}$$

مثل (13.40) افرض $f(x,y,z) = yz\,2^x$ ، جد تدريج f ، ثم تدريج f عند $(1,-1,1)$

الحل :
$$\begin{aligned}\underline{\nabla} f &= f_x\underline{i} + f_y\underline{j} + f_z\underline{k}\\ &= yz\,2^x \ln 2\,\underline{i} + z\,2^x\underline{j} + y\,2^x\underline{k}\\ \underline{\nabla} f(1,-1,1) &= -2\ln 2\,\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}\\ &= -2(\ln 2\,\underline{i} + \underline{j} - \underline{k})\end{aligned}$$

نتيجة (13.26)

(أ) تعاد صياغة نتيجة مبرهنة (13.24) كما يلي

$$D_{\underline{u}} f(x_0,y_0) = \underline{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\underline{u}$$

(ب) تعاد صياغة نتيجة مبرهنة (13.26) كما يلي

$$D_{\underline{u}} f = \underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \underline{u}$$

هذه العلاقات تظهر العلاقة الوثيقة بين المشتقة الاتجاهية والتدريج . ويلاحظ انه اذا $\underline{\nabla} f$ عند نقطة ما صفر ، فان $D_{\underline{u}} f$ صفر لجميع الاتجاهات ، اما اذا $\underline{\nabla} f \neq \underline{0}$ عند نقطة ما P ، فانه يمكن تحديد الاتجاه الذي يؤدي الى اكبر قيمة المشتقة الاتجاهية . افرض $\underline{u}$ اي متجه وحدة في المستوى وان $\emptyset$ هي الزاوية بين $\underline{u}$ و $\underline{\nabla} f$ عند $P(x_0 , y_0)$ ، فان

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) = \underline{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \underline{u} = \|\underline{u}\| \; \|\underline{\nabla} f\| \cos \emptyset$$
$$= \|\underline{\nabla} f\| \cos \emptyset$$

مما يعني ان اعظم قيمة للمشتقة $D_{\underline{u}} f$ هي $\|\underline{\nabla} f\|$ عندما $\emptyset = 0$. لذلك نكتب

مبرهنة (13.27) افرض $f(x , y)$ قابلا للاشتقاق عند (x_0, y_0) .

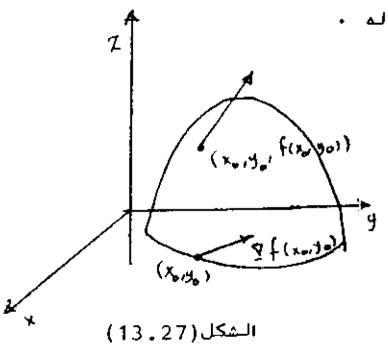
(أ) ان الاقتران f له مشتقة اتجاهية في اتجاه أي متجه وحدة $\underline{u}$ وهي :

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) = \underline{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \underline{u}$$

(ب) اعظم قيمة للمشتقة الاتجاهية $D_{\underline{u}} f(x_0, y_0)$ هي $\|\underline{\nabla} f(x_0, y_0)\|$.

(ج) اذا $\|\underline{\nabla} f(x_0, y_0)\| \neq 0$ ، فان $D_{\underline{u}} f(x_0 , y_0 , z_0)$ كاقتران في $\underline{u}$ تحقق اقصى قيمها عندما $\underline{u}$ موازٍ للتدريج $\underline{\nabla} f$.

والجزء الاخير (ج) من هذه المبرهنة يمكن ان يفسر على انه عند $P(x_0 , y_0)$ فان f تزداد اسرع ما يمكن في اتجاه التدريج $\underline{\nabla} f(x_0 , y_0)$. وبيانيا ، هذا يعني انه عند $(x_0, y_0, f(x_0 , y_0))$ فان رسم f له اسرع صعود في اتجاه التدريج . انظر الشكل (13.27). ولو ان رسم f يمثل سطح تل ، فانه عند النقطة $(x_0, y_0 , f(x_0 , y_0))$ على جانب هذا التل يكون اتجاه اسرع صعود في اتجاه التدريج واسرع انحدار في الاتجاه المعاكس له .

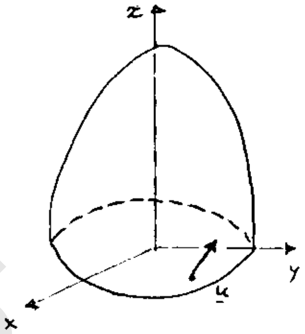


الشكل (13.27)

مثل (13.41) افرض $f(x,y) = 8 - 3x^2 - y^2$.
في اي اتجاه يزداد f باسرع ما يمكن عند $(1,2)$ ؟

الحل :

$$\underline{\nabla} f(x,y) = -6x\underline{i} - 2y\underline{j}$$
$$\underline{\nabla} f(1,2) = -6\underline{i} - 4\underline{j}$$
$$\underline{u} = \frac{\underline{\nabla} f}{\|\underline{\nabla} f\|} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\,\underline{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\,\underline{j}$$



الشكل (13.28)

وهذا هو اتجاه اسرع زيادة في f عند $(1,2)$.
انظر الشكل(13.28) .

في حال اقتران معرف على R^3 ، فالنتيجة امتداد لما سبق . ونكتبها كما يلي

<u>مبرهنة (13.28)</u> افرض f اقترانا له متغيرات ثلاث قابلا للاشتقاق عند (x_0, y_0, z_0) فان

(أ) f له مشتقة اتجاهيه في اتجاه أي متجه وحدة $\underline{u} = u_1\underline{i} + u_2\underline{j} + u_3\underline{k}$

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) . \underline{u}$$

(ب) اعظم قيمة للمشتقة الاتجاهية $D_{\underline{u}} f$ هي $\| \underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \|$

(جـ) اذا $\| \underline{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \| \neq 0$ فان $D_{\underline{u}} f$ كاقتران في $\underline{u}$ عند (x_0, y_0, z_0) تحقق اعظم قيمة لها عندما $\underline{u}$ مواز للتدريج $\underline{\nabla} f$.

<u>مثل (13.42)</u> افرض $f(x,y,z) = \cos xyz$. جد الاتجاه حيث f يزداد اسرع ما يمكن عند $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \pi)$ ، وما هو مقدار المشتقة الاتجاهية عندها ؟

<u>الحل</u> :

$$\underline{\nabla} f = f_x \underline{i} + f_y \underline{j} + f_z \underline{k}$$
$$= -yz \sin xyz\, \underline{i} - xz \sin xyz\, \underline{j} - xy \sin xyz\, \underline{k}$$
$$\underline{\nabla} f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \pi) = -\frac{\pi}{4}\underline{i} - \frac{\pi}{6}\underline{j} - \frac{1}{12}\underline{k}$$
$$\| \underline{\nabla} f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \pi) \| = \frac{1}{12}\sqrt{13\pi^2 + 1}$$

ومتجه الوحدة باتجاه التدريج هو $-\frac{1}{\sqrt{13\pi^2 + 1}}(3\pi\underline{i} + 2\pi\underline{j} + \underline{k})$

وهو الاتجاه الذي تكون فيه المشتقة الاتجاهية اكبر ما يمكن ، وقيمتها هي

$$\frac{1}{12}\sqrt{13\pi^2 + 1}$$

<u>مثل (13.43)</u> الحرارة في أي نقطة من صفيحة معدنية هي حسب

$$T(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x$$

(أ) في أي اتجاه تزداد الحرارة اسرع ما يمكن عند$(0,0)$ ؟ ما هو معدل الزيادة ؟

(ب) في أي اتجاه تنقص الحرارة اسرع ما يمكن عند$(0,0)$ ؟

<u>الحل</u> :

$$\underline{\nabla} T(x,y) = T_x \underline{i} + T_y \underline{j}$$
$$= (e^x \cos y - e^y \sin x)\underline{i} + (-e^x \sin y + e^y \cos x)\underline{j}$$

(أ) عند $(0 , 0)$ فان $\underline{\nabla} T(0 , 0) = \underline{i} + \underline{j}$

معدل الزيادة $\|\nabla T(0,0)\| = \sqrt{2}$

واتجاه اسرع زيادة هو $\underline{u} = \dfrac{\nabla T}{\|\nabla T\|} = \dfrac{\underline{i}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\underline{j}}{\sqrt{2}}$

(ب) تنقص الحرارة اسرع ما يمكن في اتجاه

$$-\nabla T(0,0) = -\underline{i} - \underline{j}$$

أو

$$-\underline{u} = -\frac{\underline{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\underline{j}}{\sqrt{2}}$$

مثل (13.44) حرارة جسم T في النقطة (x,y,z) منه هي حسب $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$.
ما هو معدل التغير في T في النقطة $P(4,-2,1)$ باتجـــاه $\underline{U} = 2\underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k}$.
في أي اتجاه T تزداد باسرع ما يمكن عند P ؟ ما هي اعظم قيمة لهذه الزيادة ؟

الحـــل :

$$\nabla T(x,y,z) = 8x\,\underline{i} - 2y\,\underline{j} + 32z\,\underline{k}$$

$$\nabla T(4,-2,1) = 32\underline{i} + 4\underline{j} + 32\underline{k}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{U}}{\|\underline{U}\|} = \frac{2\underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k}}{\sqrt{4+36+9}} = \frac{1}{7}(2\underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$D_{\underline{u}} = \nabla T.\underline{u} = \frac{1}{7}(64 + 24 - 96) = -\frac{8}{7}$$

تزداد اسرع ما يمكن في اتجاه ∇T أي في اتجاه

$$\frac{1}{4\sqrt{129}}(32\underline{i} + 4\underline{j} + 32\underline{k})$$

واعظم قيمة لهذه الزيادة هي $\|\nabla T\| = 4\sqrt{129}$

تمارين (13.7)

جد المشتقة الاتجاهية للاقتران f في اتجاه $\underline{a}$ للتمارين (1) - (12) .

(1) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15$; $p(1,1)$, $\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$

(2) $f(x,y) = x - y^2$; $p = (2,-3)$, $\underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j}$

(3) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; $p(3,4)$, $\underline{a} = \frac{1}{2}\underline{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{j}$

(4) $f(x,y) = x^2 \ln y$; $p(5,1)$, $\underline{a} = -\underline{i} + 4\underline{j}$

(5) $f(x,y) = \tan(x + 2y)$; $p(0, \pi/6)$, $\underline{a} = -4\underline{i} + 5\underline{j}$

(6) $f(x,y) = x\cos^2 y$; $p(2, \frac{\pi}{4})$, $\underline{a} = 5\underline{i} + \underline{j}$

(7) $f(x,y,z) = x^3 y^2 z$; $p(2,-1,2)$, $\underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{k}$

(8) $f(x,y,z) = xy - yz + 3xz$; $p(1,-1,3)$, $\underline{a} = -\underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k}$

(9) $f(x,y,z) = \dfrac{x - y + z}{x + y + z}$; $p(2,1,-1)$, $\underline{a} = -2\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$

(10) $f(x,y,z) = y \arcsin xz \;;\; p(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\; \underline{a} = -2\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k}$

(11) $f(x,y,z) = (x+y)(y+z) \;;\; p(5,7,1),\; \underline{a} = -3\underline{i} + \underline{k}$

(12) $f(x,y,z) = z^2 \arctan(x+y) \;;\; p(0,0,4),\; \underline{a} = 6\underline{i} + \underline{k}$

(13) افرض $a = \underline{i} - \underline{j}$ ، $\underline{b} = 3\underline{i} + 3\underline{j}$ ، اذا $D_{\underline{a}} f(1,2) = 6\sqrt{2}$ ، $D_{\underline{b}} f(1,2) = -2\sqrt{2}$. جد $f_x(1,2)$ ، $f_y(1,2)$.

(14) افرض $\underline{a} = \underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$ ، $\underline{b} = \underline{j} - 3\underline{k}$ ، $\underline{c} = 2\underline{i} - \underline{j}$ ، اذا $D_a f(x_0,y_0,z_0) = 2\sqrt{3}$ ، $D_{\underline{b}} f(x_0,y_0,z_0) = -\sqrt{10}$ ، $D_{\underline{c}} f(x_0,y_0,z_0) = \sqrt{5}$. جد f_x ، f_y ، f_z ، عند (x_0,y_0,z_0) .

للتمارين (15) - (26) جد تدريج الاقتران المفروض ، واحسبه عند النقطة المفروضة .

(15) $g(x,y) = e^{-2x} \ln(y-4)$

(16) $f(x,y) = y^2 + x \sin x^2 y$

(17) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \;;\; p(-4,3)$

(18) $f(x,y) = x \ln(x-y)$

(19) $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2$

(20) $f(x,y,z) = (2x + y^2 + z^3)^{5/2}$

(21) $f(x,y,z) = yz^3 - 2x^2 \;;\; p(2,-3,1)$

(22) $f(x,y,z) = xy^2 e^{z} \;;\; p(2,-1,0)$

(23) $f(x,y) = \dfrac{x+3y}{5x+2y} \;;\; p(-1, 3/2)$

(24) $f(x,y) = x \cos xy \;;\; p(1, -\pi)$

(25) $f(x,y,z) = z e^{-x} \tan y \;;\; p(0, \pi, -2)$

(26) $g(x,y,z) = e^{x}(\sin y + \sin z) \;;\; p(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

للتمارين (27) - (34) جد في أي اتجاه تزداد f باسرع ما يمكن عند النقطة المفروضة . ما هي اكبر قيمة لهذه الزيادة عند النقطة المفروضة ؟

(27) $f(x,y) = e^{x}(\cos y + \sin y) \;;\; p(0,0)$

(28) $f(x,y) = y^2 + x \sin x^2 y \;,\; p(\frac{1}{2}, \pi)$

(29) $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 \;;\; p(-1,1)$

(30) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \;;\; p(2,0,1)$

(31) $f(x,y,z) = e^{x} + e^{y} + e^{2z} \;;\; p(1,1,-1)$

(32) $f(x,y,z) = \cos xyz \;;\; p(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\pi)$

(33) $f(x,y,z) = z e^{-x} \tan y \;;\; p(0, \pi, -2)$

(34) $g(x,y,z) = e^{x}(\sin y + \sin z), p(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

للاقترانات(35) - (38) جد في أي اتجاه يزداد الاقتران اسرع ما يمكن في النقطة المفروضة ، وما هي اعظم قيمة لهذه الزيادة ؟

(35) $f(x,y)=e^{2x}\sin y\ ;\ p(0\ ,\ \frac{\pi}{4})$ (36) $f(x,y)=xy\,e^{x-y}\ ;\ p(5,5)$

(37) $f(x,y,z)=x^2+4xz+2yz^2\ ,\ p(1,2,-1)$

(38) $f(x,y,z)=x\,y\,z\ ,\ p(3,1,-5)$

للاقترانات(39) - (44) جد في أي اتجاه ينقص الاقتران اسرع ما يمكن عند النقطة المفروضة ، وما هي اصغر قيمة لهذا النقصان ؟

(39) $f(x,y)=e^{2x}\sin y;\ p(0\ ,\ \frac{\pi}{4})$ (40) $f(x,y)=x\,y-y^3\ ;\ p(2,-2)$

(41) $f(x,y,z)=\sqrt{xz}\,e^{y}\ ;\ p(16,0,9)$ (42) $f(x,y)=\arctan(x-y)\ ;\ (2,-2)$

(43) $f(x,y)=\tan(x^2+y^2)\ ;\ p(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\ ,\ \sqrt{\frac{\pi}{6}})$

(44) $f(x,y,z)=\ln\frac{xy}{z}\ ;\ p(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{3})$

(45) افرض $\underline{\nabla} f(a,b)=4\underline{i}+3\underline{j}$. جد متجه وحدة $\underline{u}$ يحقق ما يلي

(أ) $D_{\underline{u}}f(a,b)=0$ (ب) $D_{\underline{u}}f(a,b)$ قيمة عظمى .

(جـ) $D_{\underline{u}}f(a,b)$ قيمة صغرى .

(46) اذا $D_{\underline{u}}f(a,b)=-12$ ما هي قيمة $D_{-\underline{u}}f(a,b)$ ؟

(47) اذا $f(x,y)=x^3-12x+y^2-10y$ جد جميع النقاط حيث $\|\underline{\nabla} f\|=0$.

(48) افرض f_x ، f_y ، f_{xy} ، f_{yx} جميعها متصلة ، وان $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ متجها وحدة . اثبت ان

$$D_{\underline{u}}D_{\underline{v}}f=D_{\underline{v}}D_{\underline{u}}f$$

(49) اذا f ، g لهما مشتقات جزئية على R^2 ، اثبت ما يلي

(أ) $\underline{\nabla}(c\,f)=c\,\underline{\nabla} f$ ، c ثابت (ب) $\underline{\nabla}(f+g)=\underline{\nabla} f+\underline{\nabla} g$

(جـ) $\underline{\nabla}(f\,g)=\underline{\nabla} f\,g+f\,\underline{\nabla} g$ (د) $\underline{\nabla}(\frac{f}{g})=\frac{g\,\underline{\nabla} f-f\,\underline{\nabla} g}{g^2}$

(هـ) $\underline{\nabla} f^n=n\,f^{n-1}\,\underline{\nabla} f$ (و) اذا $w=h(f)$ فان $\underline{\nabla} w=\frac{dw}{df}\,\underline{\nabla} f$

(50) صفيحة مستطيلة ، وضع عليها نظام احداثي كارتيزي مركزها نقطة اصله .الحرارة في النقطة (x,y) هي $T(x,y)=5+2x^2+y^2$. حدد طريق نملة تسلكه ابتداء من $(4,2)$ لكي تبرد باسرع ما يمكن ؟

(51) حرارة صفيحة مستطيلة هي $T(x,y)=100-2x^2-y^2$. ما هو المنحنى الذي يسير عليه جسيم ابتداء من $(3,4)$ يتحرك في اتجاه تزداد فيه الحرارة اكبر ما يمكن ؟

(52) حرارة جسم عند (x,y,z) هي T متناسبة عكسيا مع مربع بعد النقطة عن نقطة الاصل . اذا $T(0,0,1) = 500$. جد مقدار التغير في T عند $(2,3,3)$ في اتجاه $(3,1,1)$. في أي اتجاه من $(2,3,3)$ تكون الزيادة في T اسرع ما يمكن ؟ كم هي هذه القيمة العظمى ؟

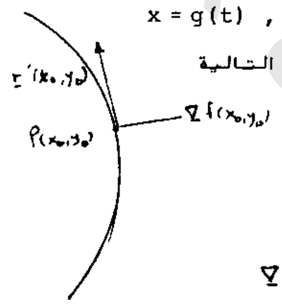
(53) الجهد الكهربائي V عند $P(x,y,z)$ في صفيحة مستطيلة هو $V=x^2 + 4y^2 + 9z^2$. جد معدل تغير V عند $P(2,-1,3)$ في اتجاه القطعة من P الى نقطة الاصل . ما هو الاتجاه الذي يزداد فيه الجهد اسرع ما يمكن ؟ ما هي هذه القيمة العظمى ؟

(13.8) مستويات التماس ، وناظم السطوح

كيف نفسر التدريج هندسيا ؟ افرض $f(x,y) = c$ منحني منسوب لسطح ما معادلته $z = f(x,y)$ يمر بنقطة معينة $P(x_0,y_0)$ في المجال . لذلك $f(x_0,y_0)=c$.

افرض ان المعادلات المَعْلَمية لهذا المنحني هي

$$x = g(t) \ , \ y = h(t) \ , \ x_0 = g(t_0) \ , \ y_0 = h(t_0)$$



وان هذا المنحني ممهد . نشتق بالنسبة الى t المعادلة التالية

$$f(g(t) \ , h(t)) = c$$

ونحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

اذا كتبنا

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} \ , \ \underline{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j}$$

فان المعادلة اعلاه تصير $\nabla f \cdot \underline{r}'(t) 0$ ، وعند $t = t_0$

الشكل (13.29)

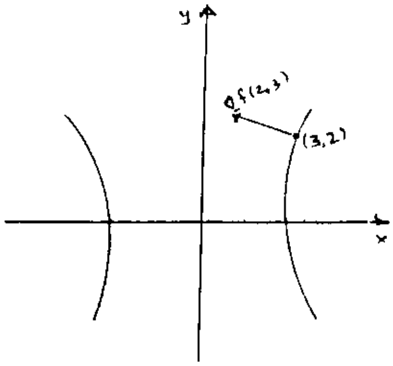
$$\nabla f(x_0,y_0) \cdot \underline{r}'(t_0) = 0$$

فاذا $\underline{r}'(t_0) \neq \underline{O}$ ، فان المتجه $\nabla f(x_0 \ , y_0)$ هو معامد لمتجه التماس $\underline{r}'(t_0)$ عند $P(x_0,y_0)$. انظر الشكل (13.29) . ونفسر ذلك على ان $\nabla f(x_0,y_0)$ هو معامد لمنحني المنسوب في P .

مثل (13.45) جد منحني المنسوب للاقتران $f(x,y) = x^2 - y^2$ الذي يمر في النقطة $(3,2)$. ارسم التدريج في هذه النقطة .

الحل : $f(3,2) = 9 - 4 = 5$. ومنحني المنسوب هو $x^2 - y^2 = 5$

$$\nabla f(x,y) = 2x\,\underline{i} - 2y\,\underline{j}$$



الشكل (13.30)

$\nabla f(x,y) = 2x\,\underline{i} - 2y\,\underline{j}$

$\nabla f(3,2) = 6\underline{i} - 4\underline{j}$

والشكل (13.30) يظهر منحني المنسوب .

وهكذا نرى ان التدريج لاقتران ذي متغيرين يمكن ان يفسر هندسيا على انه ناظم منحني المنسوب لهذا الاقتران في نقطة من نقاطه .

اما لاقتران $F(x,y,z) = c$ رسمه سطح ، فننظر اليه على انه سطح مناسيب للاقتران $w = F(x,y,z)$ يمر في النقطة $P(x_0,y_0,z_0)$. افرض ان الاقترانات

$$x = f(t)\ ,\ y = g(t)\ ,\ z = h(t)$$

قابلة للاشتقاق وتمثل منحنيا C على السطح حيث $x_0 = f(t_0)$ ، $y_0 = g(t_0)$ ، $z_0 = h(t_0)$. فان مشتقة $F(f(t),g(t),h(t)) = c$ تتضمن

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

او

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\underline{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} + \frac{dz}{dt}\underline{k}\right)$$

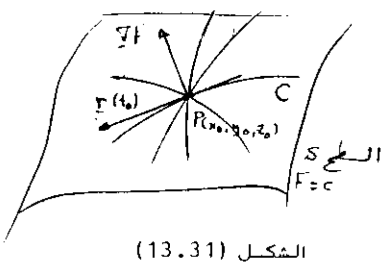
وعند $t_0 = t$ ، نكتب هذه المعادلة على النحو

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot \underline{r}'(t_0) = 0$$

وهكذا اذا $\underline{r}'(t_0) \neq 0$ ، فان المتجه $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ هو معامد للمتجه $\underline{r}'(t_0)$. وفي النقطة P على هذا السطح يمر ما لا ينتهي من المنحنيات . لذلك $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ هو معامد لها جميعا ، مما يجعلنا نقدم التعريف التالي

تعريف (13.31) المتجه الذي هو معامد لكل متجهات الوحدة المماسة لكل منحني يمر في النقطة P على السطح S يسمى متجه الناظم للسطح S عند P .

مبرهنة (13.29) اذا معادلة السطح S هي $F(x,y,z) = c$ واذا F_x ، F_y ، F_z متصلة وليست جميعا اصفارا عند $P(x_0,y_0,z_0)$ على S فان متجه الناظم للسطح S عند P هو $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$. انظر الشكل (13.31) .



الشكل (13.31)

مثل (13.46) جد سطح المناسيب للاقتران

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

الذي يمر في $(1,-1,1)$. ارسم التدريج عند هذه النقطة .

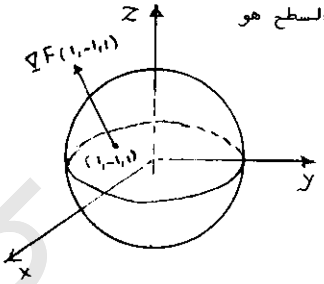
<u>الحـل</u> : $F(1,-1,1) = 3$. لذلك سطح المناسيب هو $x^2+y^2+z^2=3$ وهذا السطح هو كرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها $\sqrt{3}$. تدريج هذا السطح هو

$$\underline{\nabla} F(x,y,z) = 2x\underline{i} + 2y\underline{j} + 2z\underline{k}$$

وعند النقطة المفروضة

$$\underline{\nabla} F(1,1,1) = 2\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$$

والشكل (13.32) يوضح السطح والتدريج .



الشكل (13.32)

<u>مستويات التماس</u>

افرض سطحا معادلته $F(x,y,z) = c$.

في أي نقطة من نقاطه $P(x_0,y_0,z_0)$ يمر منحن C ، واذا كان C ممهدا ، فان له مماسا عند P . وقد وجدنا آنفا ان مماس C هو حسب $\underline{r}'(t_0)$ ($\underline{r}(t)$ معادلة C) ، وان $\underline{\nabla} F$ عند P هو معامد لهذا المماس . وماذا عن كل المماسات للمنحنيات الممهدة التي تمر في P وتقع على S ؟ لقد ذكرنا أن $\underline{\nabla} F$ عند P سيكون معامدا لها . هذه المماسات جميعا تقع في مستوى واحد لان لها المعامد نفسه . وهذا المستوى يسمى <u>مستوى التماس</u> .

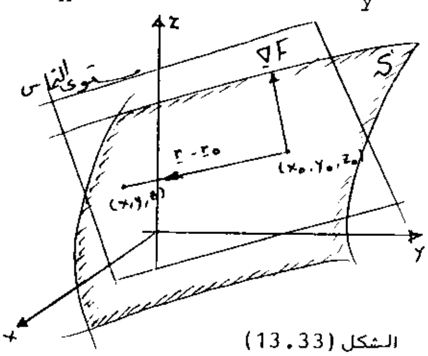
<u>تعريف (13.30)</u> افرض سطحا S معادلته $F(x,y,z) = c$ ، والنقطة $P(x_0,y_0,z_0)$ تقع عليه وان $F(x,y,z)$ قابل للاشتقاق في النقطة P . نعرف <u>مستوى التماس</u> للسطح S عند P على انه المستوى المار في P وله $\underline{\nabla} F(x_0,y_0,z_0)$ متجه ناظم .

ولذلك فمعادلة هذا المستوى هي

$$\underline{\nabla} F(x_0,y_0,z_0) \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0$$

او $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$

انظر الشكل (13.33) .



الشكل (13.33)

<u>مثل (13.47)</u> افرض $F(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - 16z$ والنقطة $P(2,4,2)$. ما هو مستوى التماس عند هذه النقطة ؟

<u>الحـل</u> : $\underline{\nabla} F = 8x\underline{i} + 2y\underline{j} - 16\underline{k}$

$$\underline{\nabla} F(2,4,2) = 16\underline{i} + 8\underline{j} - 16\underline{k}$$

ومستوى التماس هو

$$16(x-2)+8(y-4)-16(z-2)=0$$

$$2x+y-2z-4=0$$

في حال كون معادلة السطح S هي $z=f(x,y)$ ، فاننا نكتب

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

ومنها $F_x=-f_x$ ، $F_y=-f_y$ ، $F_z=1$ ، ومعادلة مستوى التماس هي

$$-f_x(x-x_0)-f_y(y-y_0)+1(z-z_0)=0$$

أو

$$z-z_0=f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)$$

مثل (13.48) افرض $z=f(x,y)=6-2x^3-y^2$. جد معادلة مستوى التماس لهذا السطح عند (1,1,3) .

الحل :

$$f_y=-2y=-2 \quad , \quad f_x=-6x^2=-6$$

ومعادلـــة مستـــوى التمـــاس

$$z-3=-6(x-1)-2(y-1)$$

$$z+6x+2y=11$$

تعريف (13.31) المتجه المعامد لمستوى التماس للسطح S عند $P_0(x_0,y_0,z_0)$ نسميه المتجه الناظم للسطح S عند P_0 .

واذا معادلة S هي $F(x,y,z)=c$ فان ∇F هو عمود على S عند أي نقطة من نقاطه P (شريطة وجوده) . لذلك فمعادلة الناظم هي بالصيغة المتماثلة.

$$\frac{x-x_0}{F_x}=\frac{y-y_0}{F_y}=\frac{z-z_0}{F_z}$$

والمشتقات عند $P(x_0,y_0,z_0)$.

مثل (13.49) جد معادلة الناظم للسطح المكافئي $4x^2+y^2-16z=0$ عند (2,4,2) .

الحل :

$$\nabla F=8x\,\underline{i}+2y\,\underline{j}-16\,\underline{k}$$

$$\nabla F(2,4,2)=16\,\underline{i}+8\,\underline{j}-16\,\underline{k}$$

ومعادلـــة النـاظـم هـي

$$\frac{x-2}{16}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-2}{-16}$$

أو

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

تمارين(13.8)

للتمارين(1) - (12) ارسم منحني المنسوب أو سطح المناسيب في النقطة المفروضة . ارسم التدريج .

(1) $f(x,y) = x - 2y\ ;\ p(6,1)$ (2) $f(x,y) = \frac{y-2x}{x}\ ;\ p(1,3)$

(3) $f(x,y) = y - x^2\ ;\ p(2,5)$ (4) $f(x,y) = x^2 - y^2\ ;\ p(1,3)$

(5) $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\ ;\ p(-2,-3)$ (6) $f(x,y) = \frac{y-1}{\sin x}\ ;\ p(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2})$

(7) $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2\ ;\ p(1,1)$ (8) $f(x,y) = x^2 - y\ ;\ p(-3,5)$

(9) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z\ ;\ p(1,1,3)$

(10) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}\ ;\ p(3,4,0)$

(11) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ;\ p(3,4,0)$

(12) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2\ ;\ p(0,-1,1)$

للتمرينين(13) و (14) جد النقاط على السطح حيث التدريج موازٍ للمتجه المفروض

(13) $z = x^2 + y^2\ ;\ 4\underline{i} + \underline{j} + \frac{1}{2}\underline{k}$ (14) $x^3 + y^2 + z = 15\ ;\ 27\underline{i} + 8\underline{j} + \underline{k}$

للتمارين(15) - (22) جد معادلة مستوى التماس للسطح عند النقطة المفروضة

(15) $x^2 + y^2 + z^2 = 9\ ;\ p(-2,2,1)$ (16) $5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8\ ;\ p(2,4,1)$

(17) $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5\ ;\ p(6,2,3)$ (18) $9x^2 - 4y^2 - 25z^2 = 40\ ;\ p(4,1,-2)$

(19) $z = 25 - x^2 - y^2\ ;\ p(3,-4,0)$ (20) $z = 4x^2 + 9y^2\ ;\ p(-2,-1,25)$

(21) $z = \ln(x^2 + y^2)\ ;\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (22) $z = 2e^{-x}\cos y\ ;\ p(0, \frac{\pi}{3}, 1)$

للتمرينين (23) - (24) جد النقاط على السطح حيث مستوى التماس موازٍ للمستوى المفروض

(23) $x^2 + y^2 + z^2 = 25\ ;\ 2x + 4y + 6z = 1$

(24) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 33\ ;\ 8x + 4y + 6z = 5$

(25) جد النقاط على السطح $x^2 + 4x + y^2 + z^2 = 2z + 11$ حيث مستوى التماس افقي (موازٍ لـ xy) .

(26) جد النقاط على السطح $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 16 = 0$ حيث مستوى التماس موازٍ لـ

(أ) مستوى xz . (ب) مستوى xy .

(جـ) مستوى yz .

للتمارين(27) - (30) اثبت ان مستوى التماس للسطح التربيعي المفروض عند $P(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ يمكن كتابته على النحو المبيّن .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \; ; \; \frac{xx_\circ}{a^2} + \frac{yy_\circ}{b^2} + \frac{zz_\circ}{c^2} = 1 \qquad (27)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \; ; \; \frac{xx_\circ}{a^2} - \frac{yy_\circ}{b^2} + \frac{zz_\circ}{c^2} = 1 \qquad (28)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \; ; \; \frac{xx_\circ}{a^2} - \frac{yy_\circ}{b^2} - \frac{zz_\circ}{c^2} = 1 \qquad (29)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \; ; \; \frac{xx_\circ}{a^2} + \frac{yy_\circ}{b^2} = c(z + z_\circ) \qquad (30)$$

(31) اثبت ان مجموع مربعات مقاطع x ، y ، z لكل مستوى تماس للسطح $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ هو ثابت .

(32) سطحان متعامدان عند نقطة تقاطع $P(x,y,z)$ اذا ناظما هما متعامدان . اثبت ان رسمي $F(x,y,z) = 0$ ، $G(x,y,z) = 0$ (لهما مشتقات جزئية) متعامدان اذا وفقط اذا $F_xG_x - F_yG_y + F_zG_z = 0$

(13.9) القيم القصوى

من الامور المهمة التي درسناها في تحليل الاقتران ذي المتغير الواحد ، مسألة القيم القصوى ، وايجادها ، واختبارها وتطبيقاتها . ويجب ان نتوقع امتداد هذا المفهوم لاقتران ذي متغيرين أو اكثر . نبدأ بتعريف القيم القصوى محلية أو مطلقة، وكيفية ايجادها واختبارها .

تعريف (13.32) افرض f اقترانا بمتغيرين وأن $(x_\circ, y_\circ)$ نقطة في مجاله . f له قيمة عظمى (قيمة صغرى) على D عند $(x_\circ, y_\circ)$ ، اذا $f(x,y) \le f(x_\circ, y_\circ)$ ($f(x,y) \ge f(x_\circ, y_\circ)$) لجميع $(x,y) \in D$.

اذا D= مجال f ، فالقيمة العظمى (الصغرى) مطلقة .واذا وجد قرص D_1 مركزه $(x_\circ, y_\circ)$ محتوى في مجال f ، والمتباينات اعلاه تتحقق على D_1 فالقيمة العظمى (الصغرى) نسبية أو محلية . والقيمة العظمى أو الصغرى تسمى قصوى .

وهناك علاقة وثيقة بين المشتقات الجزئية والنقاط التي يكون فيها f ذا قيم قصوى . لذلك ، نعرف اولا النقاط الحرجة .

تعريف (13.33) افرض f اقترانا في R^2 . النقطة (a,b) تسمى نقطة حرجة للاقتران f اذا

(أ) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ أو

(ب) $f_x(a,b)$ أو $f_y(a,b)$ غير موجودة

وماذا عن وجود قيم قصوى ؟ المبرهنة التالية تؤكد وجود قيم قصوى مطلقة في ظروف معينة .

مبرهنة (13.34) افرض $B \leq R^2$ قرصا مغلقا ، وان f اقترانا متصلا على B . فانه توجد نقطة واحدة على الاقل في B حيث يحقق f قيمة عظمى مطلقة ، كما توجد نقطة واحدة على الاقل في B حيث يحقق f قيمة صغرى مطلقة .

مبرهنة (13.35) اذا $f(x,y)$ معرف على قرص مفتوح $B((x_o,y_o);r)$ ، واذا f له قيمة قصوى محلية عند (x_o,y_o) واذا $f_x(x_o,y_o)$ ، $f_y(x_o,y_o)$ موجودتان فان $f_x(x_o,y_o) = f_y(x_o,y_o) = 0$.

ملاحظة $B((x_o,y_o);r)$ تعنى قرصا مركزه (x_o,y_o) ونصف قطره r .

البرهان : افرض f له قيمة عظمى محلية عند (x_o,y_o) وان $f_x(x_o,y_o)$ موجودة . من التعريف

$$f_x(x_o,y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o+\Delta x,y_o) - f(x_o,y_o)}{\Delta x}$$

$f(x_o,y_o)$ قيمة عظمى محلية لذلك

$$f(x_o+ \ x,y_o) - f(x_o,y_o) \leq 0$$

شريطة ان Δx صغيرة بما فيه الكفاية حتى تكون $(x_o+\Delta x,y_o)$ في B . نجعل $\Delta x \longrightarrow 0$ من اليمين أي $\Delta x > 0$ فان الكسر

$$\frac{f(x_o+\Delta x,y_o) - f(x_o,y_o)}{x} \leq 0 \qquad (1)$$

لذلك $f_x(x_o,y_o) \leq 0$ اذا كانت المشتقة موجودة .

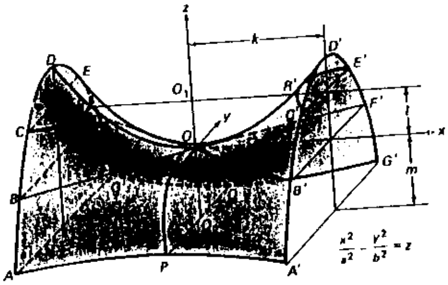
كذلك اذا $\Delta x \longrightarrow 0^-$ أي ان $\Delta x < 0$ فان

$$\frac{f(x_o+ \Delta x,y_o) - f(x_o,y_o)}{\Delta x} \geq 0 \qquad (2)$$

مما يعني ان $f_x(x_o,y_o) \geq 0$ ان كانت موجودة . من الجمع بين (1) ، (2) فان $0 = f_x(x_o,y_o)$.

وبطريقة مشابهة نبرهن على ان $f_y(x_o,y_o)=0$. وبالتالي برهنة كل الحالات المطلوبة .

وننبه القارىء على ان كون المشتقتين صفرا هو شرط لازم لوجود القيم القصوى المحلية ،فقد تكون $f_x=f_y=0$ عند نقطة ما وهي ليست قيمة قصوى محلية ، بل نسميها نقطة سرج .



الشكل(13.34)

انظــر الشكــل (13.34) .

مثل (13.50) للاقتران $f(x,y) = y^2 - x^2$

لاحظ ان $f_x = -2x$ ، $f_y = 2y$

والنقطة (0,0) تجعل $f_x = f_y = 0$.

لكن (0,0) تعطي $f(0,0) = 0$

وهي ليست قيمة قصوى محلية ، لانها لا تحقــق التعريف (13.35).

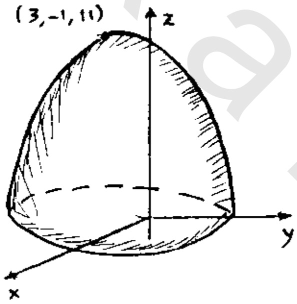
مثل (13.51) افرض $f(x,y) = 6x-4y-x^2-2y^2$. هل لهذا الاقتران قيم قصوى ؟

الحـــل : $f_x = 6 - 2x = 0 \ , \ x = 3 \quad , \quad f_y = -4 - 4y = 0 \ , \ y = -1$

فالنقطة الحرجــة هـي (3,-1) .

$$f(3,-1) = 11$$

وهذا السطح هو مكافئي منكفىء (مفتوح الى اسفل) ، والنقطة (3,-1,11) هـي نقطة قيمة عظمى . انظر الشكل (13.35) .



الشكــل(13.35)

كيف نميز بين القيم العظمى والصغرى المحلية ونقاط السرج ؟ الجواب هو باختبار المشتقة الثانية ، الذي نقدمه تاليا

مبرهنة (13.36) افرض f له نقطة حرجــة عند (x_0,y_0) ، وان f له مشتقات جزئية متصلـــة من الرتبة الثانية في قرص مركزه (x_0,y_0) . افرض

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

(أ) اذا $D(x_0,y_0)>0$ ، $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ فان f له قيمة عظمى محلية عند (x_0,y_0).

(ب) اذا $D(x_0,y_0)>0$ ، $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ فان f له قيمة صغرى محلية عند (x_0,y_0).

(جـ) اذا $D(x_0,y_0)<0$ فان f له نقطة سرج عند (x_0,y_0) .

(د) اذا $D(x_0,y_0)=0$ فان الاختبار يفشل .

مثل (13.52) افرض $f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$

عين النقاط الحرجة وحـــدد نوعهـا .

الحـــل : $f_x = 2x - 2y = 0 \quad , \quad f_y = -2x + y^2 - 3 = 0$

والنقاط الحرجة هي $(3,3)$ ، $(-1,-1)$

$$f_{yy} = 2y \quad , \quad f_{xy} = -2 \quad , \quad f_{xx} = 2$$

$$D(3,3) = (2)(6) - (-2)^2 = 8 > 0$$

$$D(-1,-1) = 2(-2) - (-2)^2 = -8 < 0$$

لذلك $f(3,3)$ قيمة صغرى محلية ، بينما $(-1,-1)$ هي نقطة سرج .

مثل(13.53) افرض $g(x,y) = x^2 + y^3$, $f(x,y) = x^2 + y^4$

لاحظ ان $f_x = 2x$ ، $f_{xx} = 2$ ، $f_{xy} = 0$ ، $f_y = 4y^3$ ، $f_{yy} = 12y^2$

كذلك $g_x = 2x$ ، $g_{xx} = 2$ ، $g_{xy} = 0$ ، $g_y = 3y^2$ ، $g_{yy} = 6y$

والنقطة $(0,0)$ هي نقطة حرجة للاقترانين f ، g .

لكن $D(0,0) = 0$ في كلتا الحالتين ايضاً ، مع ان $0 = f(0,0) = g(0,0)$

الا أن $f(x,y) \geq 0$ لجميع (x,y) ، أي أن $f(0,0)$ قيمة صغرى مطلقة . وبالنسبة الى $g(x,y)$ فان $(0,0)$ نقطة سرج لان $g(0,y) = x^3$ سالب لجميع قيم y السالبة ، وموجب لجميع قيم y الموجبة .

هذا المثل يظهر كيف يفشل الاختبار السابق عندما $D(x,y) = 0$.

ماذا عن القيم القصوى المطلقة ؟

ذكرنا في المبرهنة (13.37) ان اقترانا متصلا على مجال مغلق له قيمة صغرى مطلقة وقيمة عظمى مطلقة . ويمكن أن يأخذ الاقتران قيمه القصوى المطلقة عند نقاط حرجه (أي داخل المجال) أو عند نقاط حدودية .

لذلك لايجاد القيم القصوى المطلقة نفعل ما يلي :

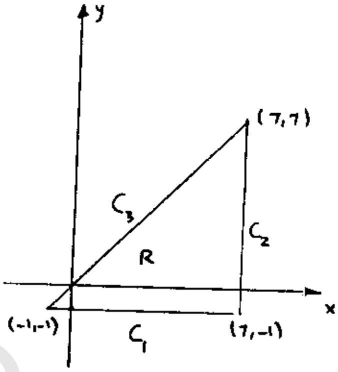
(أ) جد كل النقاط الحرجة للاقتران f في مجاله . واحسب قيم f عند هذه النقاط .

(ب) جد كل القيم القصوى للاقتران f على حدود مجاله .

(جـ) قارن بين القيم في (أ) ، (ب) ، فاعظمها هي قيمة عظمى مطلقة ، واصغرها هي قيمة صغرى مطلقة .

مثل(13.54) افرض $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$. جد القيم القصوى المطلقة لهذا الاقتران على المنطقة المثلثة المغلقة التي رؤوسها $(-1,-1)$ ، $(7,-1)$ ، $(7,7)$.

الحل : تتألف حدود المنطقة R من ثلاث قطع مستقيمة C_1 ، C_2 ، C_3 . انظر الشكل (13.36) .



الشكل(13.36)

اولا ، نجد النقاط الحرجة

$f_x = 2x - 4y = 0$

$f_y = -4x + 3y^2 + 4 = 0$

والحل هو $x = 4$ ، $y = 2$. كذلك

$f(4,2) = 0$

كذلك من اختبار المشتقة الثانية

$f_{xx} = 2 \, , \, f_{xy} = -4 \, , \, f_{yy} = 6y$

$D = (2)(24) - (-4)^2 > 0$

أي أن $(4,2)$ تعطي قيمة صغرى محلية .

الآن نهتم بقيم f على الحدود .

على C_1 : $y = -1$ ، لذلك $f(x,-1) = x^2 + 4x - 1 - 4$

$= x^2 + 4x - 5$

هذا الاقتران في x له نقطة حرجة عندما $f_x = 2x + 4 = 0$ أي $x = -2$ وهي خارج مجاله وهو $[-1,7]$ ، أي لا توجد قيم قصوى محلية على C_1 . بل ان $f(x,-1)$ متزايد على الفترة . وعند طرفيها $f(-1,-1) = -8$ ، $f(7,-1) = 72$.

على C_2 : $x = 7$ ، لذلك $f(7,y) = 49 - 28y + y^3 + 4y$

$= y^3 - 24y + 49$

ولهذا الاقتران نقطة حرجة عندما $f_y = 3y^2 - 24 = 0$.

أي $y^2 = 8$ أو $y = 2\sqrt{2}$ وهي في مجاله وهو $[-1 , 7]$ وقيمة f هي

$f(7 , 2\sqrt{2}) \approx 3.7$

لكن $f_{yy} = 6y$ وهي مقدار موجب ، لذلك $2\sqrt{2}$ تعطي قيمة صغرى.لكن $f(-1,-1) = -8$ مما يعني ان $2\sqrt{2}$ ليست قيمة عظمى مطلقة للاقتران f على R .

لذلك نجد قيم f على طرفي الفترة

$f(7,-1) = 72 \, , \, f(7,7) = 224$

على C_3 : $y = x$ عوض $f(x,x) = x^2 - 4x^2 + x^3 + 4x$

$= x^3 - 3x^2 + 4x$

بينما $f_x = 3x^2 - 6x + 4 = 0$ ليس لها حل حقيقي ، مما يعني انه بمقارنة القيم اعلاه نجد أن $f(-1,-1) = -8$ قيمة صغرى مطلقة ، $f(7,7) = 224$ قيمة عظمى مطلقة .

مثل (13.55) مؤسسة البريد تفرض قيودا على ابعاد الصناديق التي تشحنها ، وتتطلب أن لا يزيد مجموع الضلع الاكبر وضعف الضلعين الآخرين عن 84 انشا . جد اكبر حجم للصندوق .

الحل : اذا x ، y ، z هي الابعاد ، نجعل z الضلع الاكبر عندها

$$V = xyz \;,\quad 2x + 2y + z \le 84 \;,\quad x \ge 0 \,,\; y \ge 0 \,,\; z \ge 0$$

بما ان المطلوب هو اكبر حجم ، يمكن ان نفرض

$$2x + 2y + z = 84$$

$$z = 84 - 2x - 2y$$

والحجم

$$V = xy(84 - 2x - 2y)$$

$$V_x = 84y - 4xy - 2y^2 = 0$$

$$V_y = 84x - 2x^2 - 4xy = 0$$

والحل غير الصفري هو $14 = y = x$

$$V(14,14) = 5488$$

وهذا هو اكبر حجم بالانشات المكعبة .

تمارين (13.9)

للتمارين (1) - (14) جد النقاط الحرجة ، ثم حدد نوعها

(1) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1$

(2) $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 8y + 3$

(3) $f(x,y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2$

(4) $f(x,y) = -x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 9$

(5) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x + 10y - 5$

(6) $g(x,y) = x^2 - 2y^2 - 6x + 8y + 3$

(7) $f(x,y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$

(8) $g(x,y) = x^3 - 6x^2 - 3y^2$

(9) $f(x,y) = 3x^2 - 3xy^2 + y^3 + 3y^2$

(10) $g(u,v) = u^3 + v^3 - 6uv$

(11) $k(x,y) = e^x \sin y$

(12) $g(u,v) = e^u(\sin v - 1)$

(13) $f(x,y) = 1 - x^4 - 3y^2$

(14) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy$

للتمارين (15) - (18) جد القيم العظمى والصغرى المطلقة في المجال المفروض

(15) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 \; ; \; -2 \le x \le 4 \; , \; -1 \le y \le 3$

(16) $f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x \; ; \; |x| \le 3 \; , \; |y| \le 2$

(17) R المنطقة المثلثة رؤوسها $(1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,-2)$; $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$

(18) R المنطقة التي يحدها $x^2 + 4y^2 = 1$; $f(x,y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$

(19) جد اقصر مسافة بين $P(2,1,-1)$ والمستوى $4x - 3y + z = 5$

(20) جد اقصر مسافة بين المستويين : $2x + 3y - z = 2$, $2x + 3y - z = 4$

(21) جد ابعاد صندوق مفتوح له حجم ثابت تجعل ابعاده مساحته السطحية اقل ما يمكن.

(22) جد المتجه في R^3 الذي طوله 16 وحدة ، ومجموع مركباته اكبر ما يمكن .

(23) شركة تعزم انتاج صناديق مغلقة حجمها 8 امتار مكعبة . اذا تكلفة المادة للغطاء والقاعدة تكلف ضعف المادة للجوانب ، جد الابعاد التي تؤدي الى اقل تكلفة .

(13.10) طريقة لاجرانج

مما سبق في البند السابق ، وجدنا أن مسائل القيم القصوى نوعان : احدهما دون أي شروط على متغيراته ، والآخر نجد شروطا على متغيراته (المثل (13.55)). ووجدنا من المثل المشار اليه اننا نجد احد المتغيرات بدلالة غيره ، ونعوض في المعادلة التي نريد ان نجد لها قيما قصوى . على انه قد يحصل انه ليس من السهل ان نجد تعبيرا لأحد المتغيرات بدلالة غيرها ، أو أن المعادلة الناتجة من التعويض قد تصير معقدة ، الى درجة يصعب التعامل معها .

من هنا ، قدم الرياضي الفرنسي جوزيف لاجرانج (1736 - 1813) طريقة اخرى لحل هذه المسائل ، تسمى اليوم مضروبات لاجرانج . نقدمها اولا لاقتران ذي متغيرين ثم لاقتران ذي ثلاث متغيرات (أو اكثر اذ أنّ تعميمها واضح آنئذ) .

مبرهنة (13.37) افرض f ، g اقترانين قابلين للاشتقاق عند $P(x_0,y_0)$ ، وان $g(x,y) = c$ هو منحني منسوب ممهد يحوي $P(x_0,y_0)$ على أن لا تكون P نقطة على طرف هذا المنحني . اذا $\nabla g(x_0,y_0) \neq \underline{0}$ ، واذا f له قيمة قصوى على منحني المنسوب عند P فانه يوجد عدد λ يحقق

$$\lambda \nabla g(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)$$

البرهـان : افرض C منحني منسوب $g(x,y)=c$ ، وان I فترة ، وان هذا المنحني له المعادلات المَعْلَمية الممهدة

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad t \in I$$

او

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j}$$

اذا $F(t) = f(x(t), g(t))$ ، فانه حسب المفروض $f(x_0,y_0)$ قيمة قصوى للاقتران f على C ، لذلك $F(t_0) = f(x_0,y_0)$ قيمة قصوى للاقتران F ، مما يعني أن $F'(t_0) = 0$. باستعمال قاعدة السلسلة

$$0 = F'(t_0) = f_x(x_0,y_0)x'(t_0) + f_y(x_0,y_0)y'(t_0)$$
$$= \underline{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot \underline{r}'(t_0)$$

واذا $\underline{0} \neq \underline{\nabla} f(x_0,y_0)$ ، فانه معامد للمماس $\underline{r}'(t_0)$. لكن $\underline{\nabla} g(x_0,y_0)$ هو معامد لمنحني المنسوب C عند (x_0,y_0) . انظر البند (13.8) . لذلك اما ان $\underline{0} = \underline{\nabla} f(x_0,y_0)$ أو أن $\underline{\nabla} f$ ، $\underline{\nabla} g$ متوازيان عند (x_0,y_0) .

نسمي λ مضروب لاجرانج ، ويمكن كتابة خطوات هذه الطريقة كما يلي

(1) افرض ان f له قيمة قصوى على منحني المنسوب $g(x,y)=c$.

(2) جد حل المعادلات $\underline{\nabla} f(x,y) = \lambda \underline{\nabla} g(x,y) \quad , \quad g(x,y) = c$.

(3) احسب $f(x,y)$ لكل نقطة (x,y) وجدتها في الخطوة (2) . فاذا f له قيمة عظمى على C فهي احدى هذه القيم وهي القيمة الكبرى من بينها ، واذا له قيمة صغرى ، فهي احدى هذه القيم ايضا ، وهي القيمة الصغرى من بينها .

مثل (13.56) افرض $f(x,y) = x^2 + 4y^3$. جد القيم القصوى للاقتران f على المنحني $x^2 + 2y^2 = 1$.

الحل : افرض $g(x,y) = x^2 + 2y^2$ ، عندها يكون الشرط هو $g(x,y) = 1$

$\underline{\nabla} f = 2x\underline{i} + 12y^2\underline{j}$. $\underline{\nabla} g = 2x\underline{i} + 4y\underline{j}$ ، لذلك

$\underline{\nabla} f = \lambda \underline{\nabla} g$ تؤدي الى

$$2x = \lambda(2x) \quad , \quad 12y^2 = \lambda(4y)$$

من المعادلة الاولى من الشمال $x = 0$ أو $\lambda = 1$

ومن الشرط $x = 0$ تؤدي الى $2y^2 = 1$ او $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

واذا $\lambda = 1$ فان $12y^2 = 4y$ وحلها $y = 0$ ، $y = \frac{1}{3}$.

من الشرط $y = 0$ تؤدي الى $x = \pm 1$,

$y = \frac{1}{3}$ تؤدي الى $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

والنقاط التي حصلنا عليها هي : $(0, -1)$ ، $(0, 1)$ ، $(0, 1/\sqrt{2})$ ، $(0, -1/\sqrt{2})$ ، $(1, 0)$ ، $(-1, 0)$ ، $(\sqrt{7}/3 , \frac{1}{3})$ ، $(-\frac{\sqrt{7}}{3} , \frac{1}{3})$

نجد قيم f عند هذه النقاط فاكبرها $\sqrt{2}$ تحصل عند $(0 , 1/\sqrt{2})$ وهذه قيمة عظمى ، واصغرها $-\sqrt{2}$ وتحصل عند $(0 , -1/\sqrt{2})$ ، وهذه قيمة صغرى .

مثل (13.57) جد القيم القصوى للاقتران $f(x,y) = xy$ شريطة ان تحقق $4x^2 + y^2 = 4$

الحـل : افرض $g(x,y) = 4x^2 + y^2$. ومنحني المنسوب هـو $g(x,y) = 4$.

$\nabla f = \lambda \nabla g$ تؤدي الى

$$y\underline{i} + x\underline{j} = \lambda(8x\underline{i} + 2y\underline{j})$$

او $y = 8\lambda x$ ، $x = 2\lambda y$ عوض احدى هاتين المعادلتين في الاخـرى

$$x = 2\lambda y = 2\lambda(8\lambda x)$$

او $x(1 - 16\lambda^2) = 0$ والحـل $x = 0$ او $\lambda = \pm\frac{1}{4}$

اذا $x = 0$ فالتعويض في المعادلة الثانية يعطي $y = 0$ والنقطة $(0 , 0)$ لا تحقق الشرط . واذا $\lambda = \pm\frac{1}{4}$ فـان $y = 8x = \pm 2x$. عوض في الشرط لتجـد $x = \pm 1/\sqrt{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ كذلك $y = \pm\sqrt{2}$. الآن نجد $f(x , y)$ عند هذه النقـاط

(x,y)	$(\sqrt{2}/2 , \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}/2 , -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}/2 , \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}/2 , -\sqrt{2})$
$f(x,y)$	1	−1	−1	1

أي أن $f(x , y)$ له قيم عظمى عند $(\frac{\sqrt{2}}{2} , \sqrt{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{2}}{2} , -\sqrt{2})$ ، ولـه قيم صغـرى عند $(\frac{\sqrt{2}}{2} , -\sqrt{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{2}}{2} , \sqrt{2})$.

الآن ننتقل الى اقتران $f(x,y,z)$ له ثلاثة متغيرات . ويمكن كتابة مبرهنة تماثل مبرهنة (13.37) لسطح مناسيب .. الخ . ونستنتج أن قيم قصوى للاقتران f الذي يخضع للشرط $g(x,y,z) = c$ تتضمن وجود عدد λ يحقق

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)$$

وان λ نسميها مضروب لاجرانج ، وخطوات التطبيق مشابهة لما سبق .

مثل (13.58) اذا $V = xyz$ ، x ، y ، z غير سالبة ، جد القيمة العظمى للاقتران V شريطة أن $2x + 2y + z = 84$. انظر المثل (13.45) .

الحـل : افـرض $g(x,y,z) = 2x + 2y + z$

فان $\underline{\nabla} f = \lambda \underline{\nabla} g$ تؤدي الى

$$yz\,\underline{i} + xz\,\underline{j} + xy\,\underline{k} = \lambda(2\underline{i} + 2\underline{j} + \underline{k})$$

او $\quad yz = 2\lambda \;,\; xz = 2\lambda \;,\; xy = \lambda$

منها نجد

$$\lambda = xy = \frac{yz}{2} = \frac{xz}{2}$$

وبما ان أي قيمة صفرية للمتغيرات x ، y ، z تعطي $V = 0$ ، لذلك نهمل القيم الصفرية ونحصل على

$$x = y = \frac{z}{2}$$

عوض في الشرط $\quad 84 = 2y + 2y + 2y$

او $y = 14$ ، ومنها $x = 14$ ، $z = 28$

والنقطة $(14,14,28)$ هي النقطة الوحيدة . لافتراضنا وجود قيمة عظمى ، لذلك $V(14,14,28) = 5488$ هي القيمة العظمى .

مثل (13.59) جد اكبر حجم لصندوق من متوازي سطوح ، وجوهه موازية للمستويات الاحداثية ، ويمكن وضعه داخل المجسم الناقص $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

الحل : افرض $g(x,y,z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2$ ، $V = 8xyz$ ، $\underline{\nabla} f = \lambda \underline{\nabla} g$ تؤدي الى

$$8yz\,\underline{i} + 8xz\,\underline{j} + 8xy\,\underline{k} = \lambda(32x\,\underline{i} + 8y\,\underline{j} + 18z\,\underline{k})$$

او $\quad 8yz = 32\lambda x \;,\; xz = 8\lambda y \;,\; xy = 18\lambda z$

اضرب الاولى ب x والثانية ب y والثالثة ب z واجمع تحصل على

$$24xyz = (32x^2 + 8y^2 + 18z^2)\lambda$$
$$= 2\lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2) = 2\lambda(144)$$

او $\quad xyz = 12$

من هذه المعادلة ومن المعادلات السابقة

$$8xyz = 32\lambda x^2$$
$$8(12\lambda) = 32\lambda x^2$$
$$96\lambda - 32x^2\lambda = 32\lambda(3 - x^2) = 0$$

وحلها اما $\lambda = 0$ او $x = \sqrt{3}$ (القيمة السالبة مرفوضة !) كذلك نرفض $\lambda = 0$ (لماذا ؟) ، والحل الوحيد $x = \sqrt{3}$.

كذلك نجد $y = 2\sqrt{3}$ ، $z = 4\sqrt{3}$. والقيمة العظمى هي

$$V(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}) = 64\sqrt{3}$$

وجود اكثر من شرط

في بعض المسائل ، قد نجد اكثر من شرط مفروض . مثلا جد القيم القصوى للاقتران $f(x,y,z)$ شريطة تحقيق $h(x,y,z)=0$ ، $g(x,y,z)=0$.

وبطريقة لاجرانج ، نفرض وجود عددين λ ، μ لتتحقق

$$\underline{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \underline{\nabla} g(x_0,y_0,z_0) + \mu \underline{\nabla} h(x_0,y_0,z_0)$$

وخطوات الحل كما سبق .

مثل (13.60) جد النقاط على المنحني C الذي هو تقاطع الكسرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ والمستوى $x - y + 3z = 6$ التي هي :

(أ) ابعد ما يكون عن مستوى xy .   (ب) ادنى ما يمكن لمستوى xy .

الحل : افرض $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, $h(x,y,z) = x - y + 3z - 6$

كذلك $f(x,y,z) = z$. لذلك $\underline{\nabla} f = \lambda \underline{\nabla} g + \mu \underline{\nabla} g$ تؤدي الى

$$0 = 2x\lambda + \mu$$

$$0 = 2y\lambda - \mu$$

$$1 = 2z\lambda + 3\mu$$

من الاولى والثانية $2\lambda(y + x) = 0$. اذا $\lambda = 0$ فان $\mu = 0$ من الاولى بينما الثالثة تؤدي الى تناقض ، لذلك $y = -x$. عوض في الشروط

$$x^2 + x^2 + z^2 = 9$$

$$x + x + 3z = 6$$

وحلهما هو $x = \frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}$ ، $z = \frac{18}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{14}$

والنقطة $x = \frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}$ ، $z = \frac{18}{11} + \frac{3}{11}\sqrt{14}$

وهكذا نحصل على النقطة p_1 التي هي ابعد ما يمكن من xy ، والنقطة p_2 التي هي ادنى ما يمكن واحداثياتهما $p_1(-0.99 , 2.66)$ ، $p_2(2.08 , -2.08 , 0.62)$

تمارين(13.10)

للتمارين (1) - (6) افرض وجود قيم قصوى للاقتران f ، جدها شريطة تحقيق الشرط المكتوب .

(1) $f(x,y) = x + y^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 4$ (2) $f(x,y) = xy \; ; \; (x+1)^2 + y^2 = 1$

(3) $f(x,y) = x^3 + 2y^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1$ (4) $f(x,y,z) = xy + yz \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 8$

(5) $f(x,y,z) = xyz \; ; \; x^2 + y^2 + 4z^2 = 6$ (6) $f(x,y,z) = y^3 + xz^2 \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 = 1$

للتمارين (7) - (10) افرض وجود قيم صغرى جدها شريطة تحقيق الشرط المكتوب

(7) $f(x,y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 2 \; ; \; 2x^2 - \frac{3}{2} y^2 = 1$

(8) $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 5 \; ; \; x - y = 1$

(9) $f(x,y,z) = x^4 + 8y^4 + 27z^4 \; ; \; x + y + z = \frac{11}{12}$

(10) $f(x,y,z) = x + 2y - 3z \; ; \; z = x^2 + 4y^2$

للتمارين (11) - (26) افرض وجود قيم قصوى ، جدها شريطة تحقيق الشروط المكتوبة

(11) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3 \; ; \; x^2 + y^2 \leq 4$

(12) $f(x,y) = x^3 + x^2 + \frac{y}{3} \; ; \; x^2 + y^2 \leq 36$

(13) $f(x,y) = xy \; ; \; 2x^2 + y^2 \leq 4$

(14) $f(x,y) = 16 - x^2 - 4y^2 \; ; \; -1 \leq x \leq 1 \; , \; -1 \leq y \leq 1$

(15) $f(x,y) = x\,13y \; ; \; x^2 + y^2 = 1$

(16) $f(x,y) = x^2 + y^2 \; ; \; 2x + y = 5$

(17) $f(x,y) = x^2 + y^2 \; ; \; x^4 + y^4 = 1$

(18) $f(x,y) = 8x^2 - 8xy + 2y^2 \; ; \; x^2 + y^2 = 1$

(19) $f(x,y,z) = xyz \; ; \; x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \; , \; x > 0 \; , \; y > 0 \; , \; z > 0$

(20) $f(x,y,z) = xyz + 5 \; ; \; x^3 + y^3 + z^3 = 24$

(21) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \; ; \; 2x + y + z = 1 \; , \; -x + 2y - 3z = 4$

(22) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \; ; \; 4x + z = 7 \; , \; z^2 = x^2 + y^2$

(23) $f(x,y,z) = z^2 + y^2 + z^2 \; ; \; x - y = 1 \; , \; y^2 - z^2 = 1$

(24) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2 \; ; \; x + y + z = 1 \; , \; x^2 + y^2 = 4$

(25) $f(x,y,z,t) = xyzt \; ; \; x - z = 2 \; , \; y^2 + t = 4$

(26) $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \; ; \; x + y + 2z = 1 \; ,$

$2x - z + t = 2 \; , \; y + 3z + 2t = -1$

(27) جد النقطة على الكرة $x^2+y^2+z^2=9$ التي هي ادنى ما يمكن من $(2,3,4)$.

(28) اذا C هو خط التقاطع للمستويين $3x + 2y + z = 6$, $x - 4y + 2z = 8$. جـد النقطة على C التي هي اقرب ما يمكن الى نقطة الاصل .

(29) صندوق مغلق حجمه متران مكعبان ، اذا تكلفة المتر المربع من مادتـه هـي دينار واحد ، وديناران و 1.5 دينار للجوانب ، وللقاعدة والغطاء على التوالي. جد الابعاد التي تجعل التكلفة اقل ما يمكن .

(30) افرض انك تريد ان تقضي اجازتك في ثلاثة اماكن ، وتقضي x يوما في الاول و y يوما في الثاني و z يوما في الثالث ، وان مجموع متعتك

$$f(x,y,z) = 2x + y + 2z$$

على ان احوالك المادية تحدد عليك الشرط $x^2 + y^2 + z^2 = 225$

جد x ، y ، z لكي تكون المتعة اعظم ما يمكن .

مسرد مصطلحات

مفتوحة	Open
مغلقة	Closed
زيادة	Increment
معاوقة	Impedence
مفاعلة	Reactance
تدريج	Gradient
معدود n المرتب	n - tuple
سطح	Surface
أثر	Trace
منحني منسوب	Level curve
خارطة مناسيب	Level chart
مقطع	Section
الناقصي	Ellipsoid
اشباه المحاور	Semi axes
مكافئي	Paraboloid
ناظم	Normal
متعامد	Orthogonal
نقطة سرج	Saddle point
مضروب	Multiplier
شرط	Constraint
الزائدي	Hyperboloid
زائدي من قطعة واحدة	One - sheet hyperboloid
زائدي من قطعتين	Double - sheet hyperboloid
نقطة داخلية	Interior point
جوار	Neighbourhood
نقطة حدودية	Boundary
مشتقة جزئية	Partial derivative
تفاضلة	Differential
اسطوانة ناقصية	Elliptic cylinder
مخروط ناقصي ثنائي	Double Elliptic cone
قاعدة السلسلة	Chain rule
اشتقاق ضمني	Implicit differentiation
مشتقة اتجاهية	Directional derivative
مستوى التماس	Tangent plane
فضاء ذو بعد n	n - Dimension space
رسم حاسوبي	Computer graphic
سطح مناسيب	Level surface
سطح تساوي الحرارة	Isothermal surface
سطح تساوي الجهد	Equipotential surface
سطح تربيعي	Quadratic surface
محدودية	Boundedness