الباب الثاني عشر

حسبان بالمتجهات

درسنا فيما سبق حسبان اقترانات مجالها ومداها اعداد حقيقية . وبعد ان درسنا في الباب السابق المتجهات من وجهة نظر هندسية وجبرية ، نريد ان نتقدم خطوات اكثر فندرس اقترانات مجالها اعداد حقيقية ، ومداها متجهات. نسمي هذه اقترانات ذات قيم متجهة ، أو اختصارا اقترانات متجهة . ندرس تعريفها وتحليلها بالنهايات والاتصال والاشتقاق والتكامل. وستكون الغاية من ذلك دراسة الحركة في الفضاء. وبالتالي سندرس من خصائص المنحني الفضائي ما يسمى الانحناء ، وطول المنحني .

(12.1) تعريفات وامثلة

تعريف (12.1) نسمي الاقتران $\underline{F}(t)$ الذي مجاله X مجموعة من الاعداد الحقيقية ، ومداه Y مجموعة من المتجهات ، اقترانا ذا قيم متجهة أو اقترانا متجها . واذا لم نحدد المجال سلفا ، فان مجال $\underline{F}(t)$ هو كل الاعداد حيث $\underline{F}$ يمكن ان يكون معرفا . والامثلة التالية هي لاقترانات متجهة :-

مثل (12.1)

(أ) $\underline{F}(t) = (2 - 3t)\underline{i} + (1 - 2t^2)\underline{j} + e^{t}\underline{k}$

(ب) $\underline{G}(t) = \underline{i} - \sqrt{2 + 3t}\ \underline{k}$

(جـ) $\underline{H}(t) = a(t - \sin t)\ \underline{i} + a(1 + \cos t)\ \underline{j} + t\,\underline{k}\ ,\ 0 \le t \le 2$

لاحظ أن مجال $\underline{F}$ هو $(-\infty, \infty)$ ، بينما مجال $\underline{G}$ هو $(-\frac{2}{3}, \infty)$.

وسنميز الاقتران الذي مجاله ومداه اعداد حقيقية على انه اقتران حقيقي ، وسنكتب الاقتران المتجه بنمط مميز (طباعة) ، أو بخط تحته $\underline{F}$.

بشكل عام ، لكل اقتران متجه $\underline{F}$ يوجد ثلاثة اقترانات حقيقية f ، g ، h هي مركبات $\underline{i}$ ، $\underline{j}$ ، $\underline{k}$ للاقتران $\underline{F}$. أي ان

$$\underline{F}(t) = f(t)\,\underline{i} + g(t)\,\underline{j} + h(t)\,\underline{k}$$

حيث t في مجال $\underline{F}(t)$.

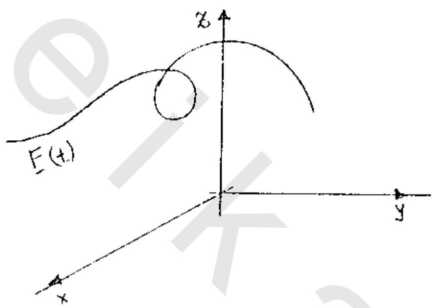
مثل (12.2) افرض $\underline{F}(t) = \ln t\ \underline{i} + \sqrt{1 - t}\ \underline{j} + t^2\underline{k}$

ما هو مجال $\underline{F}$ وما هي مركباته ؟

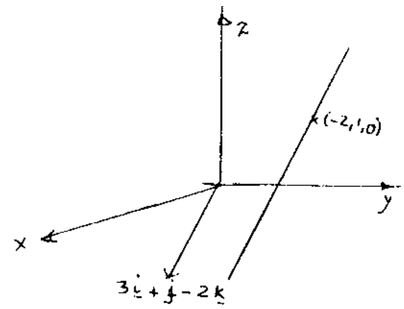
الحـــل : مجال $\ln t$ هو $t > 0$ ، ومجال $\sqrt{1-t}$ هو $1 \geq t$ ، ومجال t^2 هــو R ، لذلك المشترك بينهما هو [1 , 0) . كذلك

$$f(t) = \ln t \,, \quad g(t) = \sqrt{1-t} \,, \quad h(t) = t^2$$

وليس بالامكان رسم منحنٍ اقتران متجه ، لاننا نحتاج الى ابعــــاد اربعة . ولكن نتغلب على هذه المعضلة برسم المدى فقط . ويمكن ان نعتبر $\underline{F}(t)$ نقطـــة في الفضاء ، وعندما تزيد t (في المجال) فان $\underline{F}(t)$ يرسم منحنيـــا فضائيـــا . وعند الرسم ، فاننا نستعمل راس السهم ليدل على اتجاه حركة $\underline{F}$ عندما تزيـــد t . انظر الشكـل (12.1) .



الشكـل (12.1)



الشكـل(12.2)

مثل (12.3) افرض $\underline{F}(t) = (-2+3t)\underline{i} + (1+t)\underline{j} - 2t\,\underline{k}$

ارسم المنحني الخاص به .

الحـــل : افرض (x , y , z) نقطة على المنحني الخاص بالاقتـــران ، عندهـــــا

$$x = -2 + 3t \,, \quad y = 1 + t \,, \quad z = -2t$$

وهذه كما نعلم معادلات مَعْلَمية للمستقيم الذي يمر بالنقطـــة $(-2 , 1 , 0)$ ويوازي المتجه $3\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$ ، انظر الشكل (12.2) .

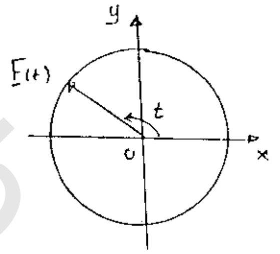
مثل (12.4) افرض $\underline{F}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j}$

اثبت ان المنحني هو دائرة وَحْدة في المستوى xy ، ويتحرك $\underline{F}$ ضـد عقـارب الساعـة .

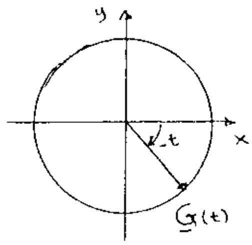
الحـــل : لاحظ أن $\|\underline{F}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

لذلك فالمنحني هو دائرة وحدة . كذلك $\underline{F}(t)$ يصنع زاوية t مـــع محـــور x

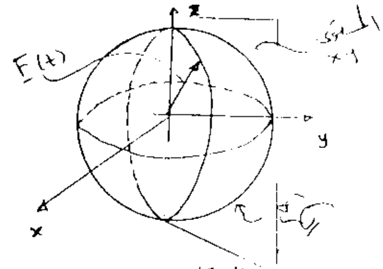
الموجب ، وقيم t حقيقية . وعندما تزداد t فان حركة $\underline{F}$ هي ضد عقارب الساعة . انظر الشكل (12.3) .



الشكل (12.3)



الشكل (12.4)



الشكل (12.5)

مثل (12.5) افرض $\underline{G}(t) = \cos t\ \underline{i} - \sin t\ \underline{j}$

الحــل : هذه دائرة وحدة في المستوى xy ، وحركة $\underline{G}$ هي مع عقارب الساعة . انظر الشكل (12.4) .

مثل (12.6) افرض $\underline{F}(t) = \cos t\ \underline{i} + \cos t\ \underline{j} + \sqrt{2}\sin t\ \underline{k}$

ارسم هذا المنحني .

الحــل : هذا منحني دائرة ايضا

$$\|\underline{F}\| = \sqrt{\cos^2 t + \cos^2 t + 2\sin^2 t} = \sqrt{2}$$

كذلك لأي نقطة (x, y, z) على المنحني $\underline{F}$ فان :

$$x = \cos t \quad , \quad y = \sin t \quad , \quad z = 2 \sin t$$

ونحصل على

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

وهذه كرة نصف قطرها $\sqrt{2}$ ، كذلك $x = y$ ، أي أن (x, y, z) تقع على سطح كرة نصف قطرها $\sqrt{2}$ وعلى المستوى $x = y$. انظر الشكل (12.5) .

جبر الاقترانات المتجهة :

للاقترانات المتجهة خصائص جبرية كالاقترانات الحقيقية ، واخرى خاصة بها ، نذكرها في التعريف التالي :

تعريف (12.2) افرض $\underline{G}$ ، $\underline{F}$ اقترانين متجهين ، وان g ، f اقترانان حقيقيان ، فاننا نعرف الاقترانات $\underline{F} + \underline{G}$ ، $\underline{F} - \underline{G}$ ، $f\underline{F}$ ، $\underline{F} \cdot \underline{G}$ ، $\underline{F} \times \underline{G}$ ، $\underline{F} \circ g$ كما يلي:

$$(\underline{F} + \underline{G})(t) = \underline{F}(t) + \underline{G}(t) \quad , \quad (\underline{F} \cdot \underline{G})(t) = \underline{F}(t) \cdot \underline{G}(t)$$

$$(\underline{F} - \underline{G})(t) = \underline{F}(t) - \underline{G}(t) \quad , \quad (\underline{F} \times \underline{G})(t) = \underline{F}(t) \times \underline{G}(t)$$

$(f\,\underline{F})(t) = f(t)\,\underline{F}(t)$ ، $(\underline{F}\circ g)(t) = \underline{F}(g(t))$

مثل (12.7) اذا $\underline{F}(t)=\cos t\,\underline{i}+\sin t\,\underline{j}+t\,\underline{k}$, $\underline{G}(t) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + t\,\underline{k}$

واذا $g(t)=\sqrt{t}$, جد $\underline{F}+\underline{G}$, $g\,\underline{F}$, $\underline{F}\cdot\underline{G}$, $\underline{F}\times\underline{G}$, $\underline{F}\circ g$

الحل : $(\underline{F}+\underline{G})(t) = (\cos t - \sin t)\,\underline{i} + (\cos t + \sin t)\,\underline{j} + 2t\,\underline{k}$

$(\underline{F}-\underline{G})(t) = (\cos t + \sin t)\,\underline{i} + (\sin t - \cos t)\,\underline{j}$

$(g\,\underline{F})(t) = \sqrt{t}\cos t\,\underline{i} + \sqrt{t}\sin t\,\underline{j} + t\sqrt{t}\,\underline{k}$

$(\underline{F}\cdot\underline{G})(t) = -\cos t\sin t + \cos t\sin t + t^2 = t^2$

$(\underline{F}\times\underline{G})(t) = t(\sin t - \cos t)\,\underline{i} - t(\sin t + \cos t)\,\underline{j} + \underline{k}$

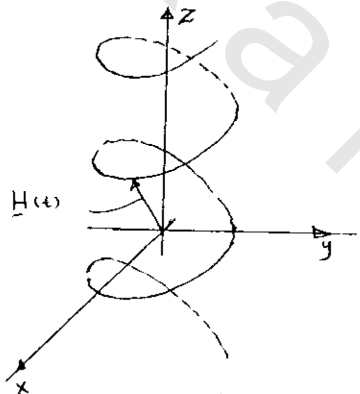
$(\underline{F}\circ g)(t) = \underline{F}(g(t)) = \cos\sqrt{t}\,\underline{i} + \sin\sqrt{t}\,\underline{j} + \sqrt{t}\,\underline{k}$

مثل (12.8) ارسم المنحنى $\underline{H}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 2\sin t\,\underline{j} + t\,\underline{k}$

الحل : نفرض $\underline{F}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 2\sin t\,\underline{j}$, $\underline{G}(t) = t\,\underline{k}$

لذلك $\underline{H}(t) = \underline{F}(t) + \underline{G}(t)$

أي أن كل نقطة من نقاط $\underline{H}(t)$ تقع فوق النقطة المناظرة من $\underline{F}(t)$ أو تحتها وتبعد $|t|$ من الوحدات ، لكن $\underline{F}$ هو دائرة وحدة ، ومنحني $\underline{H}$ هو لولب دائري . انظر الشكل (12.6) .



الشكل (12.6)

تمارين (12.1)

للتمارين (1) - (8) حدد المجال والمدى ، وما هي مركبات كل اقتران منها

$\underline{F}(t) = -t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} - t^3\,\underline{k}$ (1)

$\underline{F}(t) = \sqrt{t-1}\,\underline{i} + \sqrt{t+1}\,\underline{j} - \underline{k}$ (2)

$\underline{F}(t) = \cosh t\,\underline{i} - \frac{1}{t^2-2}\,\underline{k}$ (3)

$\underline{F}(t) = (t\,\underline{i} + \underline{j}) \times (2i - t^2\,\underline{j} + t\,\underline{k})$ (4)

(5) $\underline{F} - \underline{G}$ حيث $\underline{F} = t\,\underline{i} + t^2\underline{j} + t^3\underline{k}$, $\underline{G} = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + \underline{k}$.

(6) $\underline{F} \times \underline{G}$ حيث $\underline{F}$, $\underline{G}$ كما في التمريـــن (5) .

(7) $\underline{F} \circ g$ حيث $\underline{F} = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + t + 2\,\underline{k}$, $g = t^{1/3}$.

(8) $g\underline{F}$ حيث $\underline{F}$, g كما في التمريـــن (7)

للتمارين(9) - (16) ارسم منحني الاقترانات ، وما هو اتجاه المنحني ؟

(9) $\underline{F}(t) = t\,\underline{i} + t\,\underline{j} + \underline{k}$

(10) $\underline{F}(t) = \cos \pi t\,\underline{k}$, $-1 \leq t \leq 1/3$

(11) $\underline{F}(t) = (2t+1)\,\underline{i} + (t-1)\,\underline{j} + 3t\,\underline{k}$

(12) $\underline{F}(t) = t\,\underline{j} + t^2\underline{k}$

(13) $\underline{F}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

(14) $\underline{F}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j} + t^2\underline{k}$

(15) $\underline{F}(t) = e^t \cos t\,\underline{i} + e^t \sin t\,\underline{j}$, $0 \leq t \leq \pi$

(16) $\underline{F}(t) = \tan t\,\underline{i} + \sec t\,\underline{j} + 2\underline{k}$, $\frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

(17) افرض $\underline{F}(t) = 2t\,\underline{i} + (t+1)\,\underline{j} - 3t\,\underline{k}$, $\underline{G}(t) = (t+1)\,\underline{i} + (3t-2)\,\underline{j} + t\,\underline{k}$

وان $g(t) = \cos t$.

اثبت ان المنحنيات للاقترانات التالية هي مستقيمات أو قطع مستقيمة بعـد أن تجد المعادلات المَعْلمية لها

(a) $\underline{F} - \underline{G}$, (b) $\underline{F} + 3\underline{G}$, (c) $\underline{F} \circ g$

(18) جد نقاط التقاطع للمنحني $\underline{F}(t) = t\cos \pi t\,\underline{i} + t \sin \pi t\,\underline{j} + \underline{k}$

والاسطوانـــة $x^2 + y^2 = 4$.

(19) درج لولبي حول برج ماء اسطواني ارتفاعه 100 متر ، وقطـــره 50 متـــرا .
جـد اقترانا متجها يمثل منحني الدرج .

(12.2) النهايات و الاتصال :

نعرف النهاية و الاتصال لاقتران متجه بشكل مقارب لما عرفناه لاقتران حقيقي.

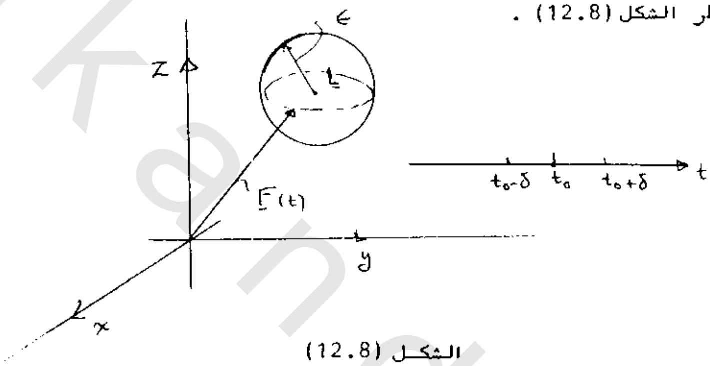
تعريف (12.4) افرض $\underline{F}$ اقترانا متجها معرفا لكل نقطة من نقاط فترة مفتوحة تحوي t_0 الا ربما عند t_0 . نقول المتجه $\underline{L}$ هو نهاية $\underline{F}(t)$ عندما t تقترب من t_0 (أو $\underline{L}$ نهاية $\underline{F}$ عند t_0) اذا لاي $\epsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث أن

$$0 < |t - t_0| < \delta \longrightarrow \|\underline{F}(t) - \underline{L}\| < \epsilon$$

ونكتبها اختصارا
$$\lim_{t \to t_0} \underline{F}(t) = \underline{L}$$

ونقول أن $\lim\limits_{t \to t_0} \underline{F}(t_0)$ موجودة .

لاحظ أن $\|\underline{F}(t) - \underline{L}\| < \epsilon$ هو كرة مصمتة مركزها $\underline{L}$ ونصف قطرها ϵ انظر الشكل (12.8) .



الشكل (12.8)

والمبرهنة التالية تقدم اسلوبا سريعا لحساب النهاية .

مبرهنة (12.3) افرض $\underline{F}(t) = f(t)\underline{i}+g(t)\underline{j}+h(t)\underline{k}$. فان $\underline{F}$ له نهاية عند t_0 اذا وفقط اذا كل من f ، g ، h له نهاية عند t_0 . في هذه الحالة

$$\lim_{t \to t_0} \underline{F}(t) = [\lim_{t \to t_0} f(t)]\underline{i} + [\lim_{t \to t_0} g(t)]\underline{j} + [\lim_{t \to t_0} h(t)]\underline{k}$$

البرهان : أولا افرض أن $\lim\limits_{t \to t_0} \underline{F}(t) = \underline{L}$, $\underline{L} = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$

فان لكل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$0 < |t - t_0| < \delta \longrightarrow \|\underline{F}(t) - \underline{L}\| < \epsilon$$

ولقيم t التي تحقق ذلك

$$|f(t) - a| = \sqrt{(f(t) - a)^2}$$
$$\leq \sqrt{(f(t) - a)^2 + (g(t) - b)^2 + (h(t) - c)^2}$$

$$= \|\underline{F}(t) - \underline{L}\| < \epsilon$$

أي أن $|f(t) - a| < \epsilon$ عندما $0 < |t - t_0| < \delta$

أي أن $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a$. وبالطريقة نفسها نبرهن $\lim\limits_{t \to t_0} g(t) = b$ ، $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = c$.

ثانيا افرض $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a$ ، $\lim\limits_{t \to t_0} g(t) = b$ ، $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = c$

وان $\underline{L} = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$. أي انه لأي $0 < \epsilon$ يوجد $0 < \delta$ وان

$|f(t) - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}$, $|g(t) - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}$, $|h(t) - c| < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}$ عندما $0 < |t - t_0| < \delta$.

لذلك اذا $0 < |t - t_0| < \delta$ فان

$$\|\underline{F}(t) - \underline{L}\| = \sqrt{[f(t) - a]^2 + [g(t) - b]^2 + [h(t) - c]^2}$$

$$< \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\right)^2} = \epsilon$$

لذلك

$$\lim_{t \to t_0} \underline{F}(t) = \underline{L} = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k} = \lim_{t \to t_0} f(t)\,\underline{i} + \lim_{t \to t_0} g(t)\,\underline{j} + \lim_{t \to t_0} h(t)\,\underline{k}$$

مثل (12.9) جد $\lim\limits_{t \to 0} \left(3\cos t\,\underline{i} - \frac{\sin t}{t}\,\underline{j} + \sqrt{t+1}\,\underline{k}\right)$

الحــل :

$$\lim_{t \to 0} \left(3\cos t\,\underline{i} - \frac{\sin t}{t}\,\underline{j} + \sqrt{t+1}\,\underline{k}\right) =$$

$$\lim_{t \to 0} 3\cos t\,\underline{i} - \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}\,\underline{j} + \lim_{t \to 0} \sqrt{t+1}\,\underline{k} =$$

$$3\,\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$$

مبرهنة (12.4) افرض $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ اقترانين متجهين ، و f ، g اقترانين حقيقيين ،

وان $\lim\limits_{t \to t_0} \underline{F}(t)$ ، $\lim\limits_{t \to t_0} \underline{G}(t)$ موجودتان وان $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)$ موجودة وان $\lim\limits_{s \to s_0} g(s) = t_0$ فان

(أ) $\lim\limits_{t \to t_0} (\underline{F} + \underline{G})(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \underline{F}(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \underline{G}(t)$

(ب) $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\underline{F}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} \underline{F}(t)$

(جـ) $\lim\limits_{t \to t_0} (\underline{F}.\underline{G})(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \underline{F}(t) . \lim\limits_{t \to t_0} \underline{G}(t)$

(د) $\lim\limits_{t \to t_0} (\underline{F} \times \underline{G})(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \underline{F}(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \underline{G}(t)$

$$\lim_{s \to s_0} (\underline{F} \circ g)(s) = \lim_{t \to t_0} \underline{F}(t) \qquad (هـ)$$

ونترك البرهان للطالب لسهولته .

مثل(12.10) افرض $\underline{F}(t) = \cos\ t\,\underline{i} - \sin\ t\,\underline{j} + 4t^2\underline{k}$ وأن $\underline{G}(t) = t\,\underline{i} + t^3\underline{k}$

فان
$$\lim_{t \to 1} (\underline{F} \cdot \underline{G})(t) = \lim_{t \to 1} (\cos \pi t\,\underline{i} - \sin \pi t\,\underline{j} + 4t^2\underline{k}) \cdot \lim_{t \to 1} (t\,\underline{i} + t\,\underline{k})$$

$$= (-1\,\underline{i} + 4\,\underline{k}) \cdot (\underline{i} + \underline{k})$$

$$= -1 + 4 = 3$$

$$\lim_{t \to 1} (\underline{F} \times \underline{G})(t) = (-\underline{i} + 4\,\underline{k}) \times (\underline{i} + \underline{k})$$

$$= -5\,\underline{j}$$

تعريف(12.5) نقول الاقتران $\underline{F}$ متصل عند t_0 من نقاط مجاله اذا

$$\lim_{t \to t_0} \underline{F}(t) = \underline{F}(t_0)$$

مبرهنة (12.6) الاقتران المتجه $\underline{F}$ متصل عند t_0 اذا وفقط اذا كل من مركباته متصل عند t_0 .

مثل(12.11) الاقتران $\underline{F}(t) = \sin t\,\underline{i} + t^2\underline{j} - e^t\underline{k}$ متصل على $(-\infty, \infty)$ لان كل مركبة من مركباته متصلة على $(-\infty, \infty)$.

تمارين(12.2)

للتمارين (1) - (9) احسب النهايات ان وجدت ، وعلّل في حال عدم وجودها

(1) $\lim_{t \to 2} (2\,\underline{i} - 3\,\underline{j} + \underline{k})$ (2) $\lim_{t \to -2} (3i + \sqrt{3}\,\underline{j} - 5\underline{k})$

(3) $\lim_{t \to 0} (\sec t\,\underline{i} - 3t\,\underline{j})$ (4) $\lim_{t \to \pi} (\tan t\,\underline{i} - \frac{\sin t}{t}\,\underline{j} + \underline{k})$

(5) $\lim_{t \to 0} (\frac{\sin t}{t}\,\underline{i} - e^t\underline{j} + (t-2)\underline{k})$

(6) $\lim_{t \to 0} \underline{F}(t)$, $\underline{F}(t) = \begin{cases} t\,\underline{i} + e^{-1/t^2}\underline{j} + t^2\underline{k}, & t \neq 0 \\ \underline{j} & t = 0 \end{cases}$

(7) $\lim_{t \to 0} (\underline{F} - \underline{G})(t)$ حيث $\underline{F}(t) = e^{-1/t^2}\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + t^3\underline{k}$, $\underline{G}(t) = -\pi i + \frac{1 + \cos t}{t}\underline{j}$

$\lim_{t\to 1} (\underline{F} \cdot \underline{G})(t)$ حيث $\underline{F}(t) = \frac{\sin(t-1)}{t-1}\underline{i} + \frac{t+3}{t-2}\underline{j} + \cos \pi t\, \underline{k}$ (8)

$\underline{G}(t) = (t^2+1)\underline{i} - \frac{t-2}{t+3}\underline{j} - \sqrt{t^2+1}\,\underline{k}$

$$\lim_{t\to 1} \left(\frac{t^2+1}{t+1}\underline{i} + \frac{t^2-1}{t+1}\underline{j} + \frac{t^2+7t-8}{t-1}\underline{k}\right) \quad (9)$$

للتمارين (10) - (13) حدد فترات الاتصال للاقترانات المفروضة

(10) $\underline{F}(t) = 3\underline{i} + (t-5)\underline{j} + \cos t\, \underline{k}$ (11) $\underline{F}(t) = 4\underline{j} - 3\underline{k}$

(12) $\underline{F}(t) = e^{t}\underline{i} + e^{-t}\underline{j} + \sqrt{2}\, t\, \underline{k}$

(13)
$$\underline{F}(t) = \begin{cases} (2t+1)\underline{i} + (2t-1)\underline{j} + 4t\underline{k}, & t < -3 \\ (t-2)\underline{i} - (t+10)\underline{j} + (2t-9)\underline{k}, & t \geq -3 \end{cases}$$

(14) اكتب تعريفا للنهاية من اليمين $\lim_{t\to t_0^+} \underline{F}(t)$ ، ومن الشمال $\lim_{t\to t_0^-} \underline{F}(t)$.

(15) استعمل التمرين السابق لتحسب ما يلي :

(أ) $\lim_{t\to 0^+} (t\,\underline{i} + 2t^{1/4}\underline{j} - \frac{\ln t}{t}\underline{k})$

(ب) $\lim_{t\to 1^-} [\sqrt{1-t}\,\underline{i} - (1-t)\ln(1-t)\underline{j}]$

(16) (أ) اكتب تعريفا لنهاية $\lim_{t\to \infty} \underline{F}(t)$ ، وانه يمكن حسابها بمركبات $\underline{F}$.

(ب) احسب $\lim_{t\to\infty} (\frac{1}{t}\underline{i} + \frac{t-1}{t+1}\underline{j} - \frac{\sin t^3}{t^3}\underline{k})$

(17) اذا $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ متصلان عند t_0 ، واذا c عدد حقيقي ، اثبت ان ما يلــي متصل عنـد t_0

(أ) $\underline{F} + \underline{G}$

(ب) $c\,\underline{F}$

(جـ) $\|\underline{F}\|$ حيث (t) $\|\underline{F}\| = \|\underline{F}(t)\|$ لجميع t في مجال $\underline{F}$

(د) $\underline{F} \cdot \underline{G}$

(هـ) $\underline{F} \times \underline{G}$

(12.3) المشتقة والتكامل

نقدم فيما يلي تعريف المشتقة وهو مقارب ايضا لتعريف المشتقة لاقتران حقيقي .

تعريف(12.7) افرض t_0 في مجال $\underline{F}$ اقتران متجه ، اذا

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)}{t - t_0}$$

موجودة ، فاننا نسمي هذه النهاية مشتقة $\underline{F}$ عند t_0 ونكتب

$$\underline{F}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)}{t - t_0}$$

ونقول ان $\underline{F}$ له مشتقة عند t_0 وان $\underline{F}$ قابل للاشتقاق عند t_0 أو أن $\underline{F}'(t_0)$ موجودة .

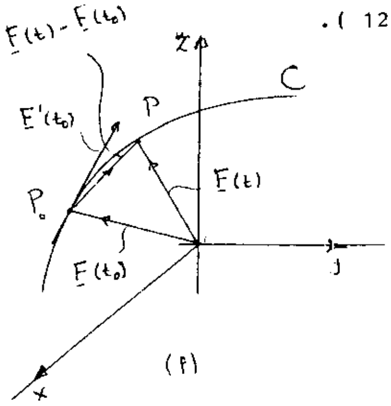
وقد نستعمل مصطلح لايبنتز للمشتقة $\frac{d\underline{F}}{dt}$.

وهكذا نرى أن المشتقة $\underline{F}'$ هي ايضا اقتران متجة ، مجالها كل الاعداد t حيث $\underline{F}$ قابل للاشتقاق .

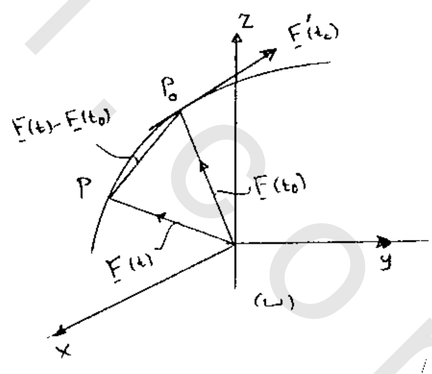
ويمكن تعليل $\underline{F}'(t_0)$ هندسيا . افرض المنحني C يمثل $\underline{F}$ وان P ، P_0 نقطتان على C تمثلان $\underline{F}(t)$ ، $\underline{F}(t_0)$. اذا $t_0 < t$ فان $\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)$ له الاتجاه نفسه مثل متجه القاطع $\overline{P_0 P}$ ، كذلك

$$\frac{\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)}{t - t_0}$$

له الاتجاه نفسه . انظر الشكل(12.9).



الشكل(12.9أ)



الشكل (12.9ب)

اما اذا $t < t_0$ فان $\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)$ له الاتجاه نفسه مثل $\overrightarrow{P_0P}$ لكن

$$\frac{\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)}{t - t_0}$$

لها اتجاه معاكس . انظر الشكل (12.9) . أي انه اذا $\underline{F}'(t_0)$ موجودة فانها نهاية المتجهات الموازية لمتجه القاطع المارة في P_0 ، ولها الاتجاه نفسه بشكل عام . أي أن $\underline{F}'(t_0)$ هو مماس للمنحني C عند P_0 .

وعلاقة المشتقة بمركبات $\underline{F}$ ، فانه يمكن برهنة ما يلي مباشرة .

مبرهنة (12.8) افرض $\underline{F}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}$ فان $\underline{F}$ قابل للاشتقاق عند t_0 ، اذا وفقط اذا f ، g ، h قابلة للاشتقاق عند t_0 . وفي هذه الحال

$$\underline{F}'(t_0) = f'(t_0)\underline{i} + g'(t)\underline{j} + h'(t)\underline{k}$$

مما يسهل عملية حساب المشتقة لاقتران متجه .

مثل (12.12) اذا $\underline{F} = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$ فان $\underline{F}' = \underline{0}$.

وهذا واضح لان مشتقات a ، b ، c كلها اصفار . لاحظ أن قيمة مشتقة كل من المركبات هي صفر (عدد حقيقي) ، بينما مشتقة $\underline{F}$ هي صفر متجه .

مثل (12.13) اذا $\underline{F}(t) = (x_0 + a\,t)\underline{i} + (y_0 + b\,t)\underline{j} + (z + c\,t)\underline{k}$ فان

$$\underline{F}'(t) = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$$

وهذه مشتقة مستقيم ، وهي متجه ثابت .

مثل (12.14) اذا $\underline{F}(t) = \sqrt[3]{t}\;\underline{i} + \frac{1}{t}\underline{j} + e^{-t}\underline{k}$ فان

$$\underline{F}'(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}\,\underline{i} - \frac{1}{t^2}\underline{j} - e^{-t}\,\underline{k}$$

واذا $\underline{F}$ قابل للاشتقاق على فترة ما I ، فانه يكون قابلا للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط I . واذا الفترة I مغلقة هي [a , b] فمعنى ذلك ان مركبات $\underline{F}$ لها مشتقات من جانب واحد عند طرفي الفترة a ، b . كذلك يمكن كتابة قواعد لجبر المشتقات كما يلي

مبرهنة (12.9) اذا $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ ، f قابلة للاشتقاق عند t_0 ، وافرض g قابلا للاشتقاق عند s_0 حيث $g(s_0) = t_0$ فان

(أ) $(\underline{F} \pm \underline{G})'(t_0) = \underline{F}'(t_0) \pm G'(t_0)$

(ب) $(f\,\underline{F})'(t_0) = f'(t_0)\,\underline{F}(t_0) + f(t_0)\,\underline{F}'(t_0)$

$$(\underline{F}\cdot\underline{G})(t_\circ) = \underline{F}'(t_\circ)\cdot\underline{G}(t_\circ) + \underline{F}(t_\circ)\cdot\underline{G}'(t_\circ) \quad (\text{ج})$$

$$(\underline{F}\times\underline{G})'(t_\circ) = \underline{F}'(t_\circ)\times\underline{G}(t_\circ) + \underline{F}(t_\circ)\times\underline{G}'(t_\circ) \quad (\text{د})$$

$$(\underline{F}\circ g)'(s_\circ) = \underline{F}'(g(s_\circ))\, g'(s_\circ) = \underline{F}'(t_\circ)\, g'(s_\circ) \quad (\text{هـ})$$

مثل (12.15) افرض $\underline{F}(t) = 3\,\underline{i} + (t^2+t)\,\underline{j} - t\,\underline{k}$, $\underline{G}(t) = t\,\underline{i} - 2\,\underline{j} + t^3\underline{k}$

جـد $(\underline{F}\cdot\underline{G})'(t)$, $(\underline{F}\times\underline{G})'(t)$.

الحـل : $\underline{F}'(t) = (2t+1)\,\underline{j} - \underline{k}$, $\underline{G}'(t) = \underline{i} + 3t^2\,\underline{k}$

لذلك

$$(\underline{F}\cdot\underline{G})(t) = 3t - 2(t^2+t) - t^4$$

كذلك

$$(\underline{F}\times\underline{G})'(t) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2t+1 & -1 \\ 1 & 0 & 3t^2 \end{vmatrix}$$

$$= 3t^2(2t+1)\,\underline{i} - \underline{j} - (2t+1)\,\underline{k}$$

نتيجة (12.10) اذا $\underline{F}$ قابل للاشتقاق على الفترة I واذا كان هناك عدد c بحيث أن

$$\|\underline{F}(t)\| = c \quad , \quad t\in I$$

فان $\underline{F}(t)\cdot\underline{F}'(t) = 0$, $t\in I$.

البرهان : من الفرض $\underline{F}(t)\cdot\underline{F}(t) = \|\underline{F}(t)\|^2 = c^2$ لعدد ما $t\in I$ ، أي أن $\underline{F}\cdot\underline{F}$ هـو اقتـران حقيقـي ثابـت مشتقته صفـر ، من المبرهنة السابقـة

$$(\underline{F}\cdot\underline{F})' = \underline{F}'\cdot\underline{F} + \underline{F}\cdot\underline{F}' = 2\,\underline{F}\cdot\underline{F}' = 0$$

هذه المبرهنة تؤكد على انه اذا $\|\underline{F}\|$ هو اقتران حقيقي ثابت لكل عدد t في مجال $\underline{F}$ ، فان $\underline{F}$, $\underline{F}'$ متعامدان ، فالكرة S ذات نصف قطر r حيث $\|\underline{F}\| = r$ تمثل حركة جسم على S ، عندها $\underline{F}'(t)$ عمود على $\underline{F}(t)$ اذا $\underline{F}\neq\underline{0}$.

ونعرف المشتقات العليا ، في حال وجودها ، بالاسلوب السابق ، ولها العلاقة نفسها مع مركبات $\underline{F}$.

نأتي الآن الى تطبيقات الحركة لهذه المفاهيم . ندرس حركة جسم في الفضاء له الاحداثيات x ، y ، z وهي اقترانات في الزمن t ، نفرض هذه الاقترانات لهـا حتى المشتقة الثانية ، على الأقل ، فاننا نعرف مفاهيم الموضع والسرعة المتجهة والسرعة والتسارع كما يلي

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$ (متجه) الموضع

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} + \frac{dz}{dt}\underline{k}$$ (متجه) السرعة

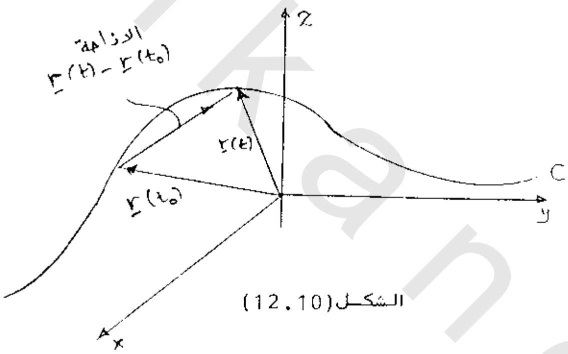
$$\|\underline{v}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$ (مقدار) السرعة

$$\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\underline{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\underline{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\underline{k}$$ (متجه) التسارع

وقد نستخدم النقطة فوق الحرف لكل مشتقة مثل $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$, $\ddot{\underline{r}} = \underline{a}$.

وقد نسمي متجه الموضع المتجه الشعاعي ، وعادة ما يكون $\underline{r}(t)$ هو قطعة مستقيم من نقطة الاصل الى موضع الجسم في اللحظة t . اذا $t \neq t_0$ لحظة أخرى فان المتجه $\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)$ يسمى متجه الازاحة من موضع الجسم في اللحظة t_0 الى موضعه في اللحظة t انظر الشكل (12.10) . ونعرف متوسط السرعة كما يلي

$$\frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}$$



الشكل (12.10)

مثل (12.16) لجسم يتحرك في خط مستقيم

$$\underline{r}(t) = (x_0 + a\,t)\,\underline{i} + (y_0 + b\,t)\,\underline{j} + (z_0 + c\,t)\,\underline{k}$$

فان متجه السرعة $\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$

بينما التسارع $\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{0}$

ومقدار السرعة $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

مثل (12.17) افرض $\underline{r}(t) = r(t - \sin t)\,\underline{i} + r(1 - \cos t)\,\underline{j}$

جد قيم t حيث $\underline{v}(t) = \underline{0}$.

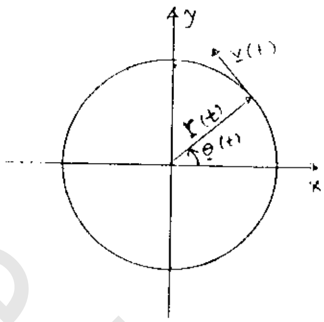
الحل : $\underline{v}(t) = r(1 - \cos t)\underline{i} + r\sin t\,\underline{j} = 0\,\underline{i} + 0\,\underline{j}$

لذلك $1 - \cos t = 0$, $\sin t = 0$

أي أن $\underline{v}(t) = 0$ عندما t تحقق هاتين المعادلتين ، وذلك عند $2n\pi$ (n عدد صحيح) .

مثل <u>(12.18)</u> جسم يتحرك ضد عقارب الساعة في دائرة نصف قطرها $r > 0$ بسرعة ثابتة v_0 . اثبت أن متجه الموضع لهذا الجسم هو

$$\underline{r}(t) = r\left(\cos\frac{v_0 t}{r}\,\underline{i} + \sin\frac{v_0 t}{r}\,\underline{j}\right)$$



الشكل (12.11)

الحل : نرسم دائرة في مركزها نقطة اصل محورين متعامدين x ، y . انظر الشكل (12.11) . الجسم على محور x في اللحظة $t = 0$ ، ويتحرك ضد عقارب الساعة ، في أي لحظة t افرض الزاوية بين $\underline{r}(t)$ ومحور x هي $\theta(t)$ فان

$$\underline{r}(t) = r[\cos\theta(t)\,\underline{i} + \sin\theta(t)\,\underline{j}]$$

لذلك

$$\underline{v}(t) = r\,\theta'(t)\,[-\sin\theta(t)\,\underline{i} + \cos\theta(t)\,\underline{j}]$$

والزاوية θ تزداد لأن الحركة ضد عقارب الساعة ، أي أن $0 < \theta'(t)$. لذلك

$$\|\underline{v}(t)\| = |r\,\theta'(t)| = r\theta'(t) = v_0 \;,\; r > 0$$

أي أن $\theta(t) = \frac{v_0 t}{r}$ ، ومن ذلك نجد

$$\underline{r}(t) = r\left(\cos\frac{v_0 t}{r}\,\underline{i} + \sin\frac{v_0 t}{r}\,\underline{j}\right)$$

لاحظ أن

$$\underline{a}(t) = \frac{-v_0^2}{r}\left(\cos\frac{v_0 t}{r}\,\underline{i} + \sin\frac{v_0 t}{r}\,\underline{j}\right) = \frac{-v_0^2}{r^2}\,\underline{r}(t)$$

لاحظ في هذا المثل ، أن السرعة v_0 ثابتة لكن متجه السرعة $\underline{v}$ غير ثابت ، كذلك فان التسارع يتجه نحو مركز الدائرة ، نسمي هذا <u>تسارعا مركزيا</u> ، والقوة التي تنتجه <u>قوة مركزية</u> ، ومقداره $\|\underline{a}(t)\| = \frac{v_0^2}{r^2}\|\underline{r}\| = \frac{v_0^2}{r}$

ولو أن ساتلا (قمرا صناعيا) يتحرك حول الارض بسرعة ثابته بتأثير الجاذبية الارضية فقط فان مقدار التسارع هو 9.8 مترا/ث^2 . ولو أن هذا الساتل على ارتفاع 6593 كيلومترا فان سرعته هي :

$$\frac{v_0^2}{r} \approx 9.8$$

لذلك

$$v_0 = \sqrt{6593 \times 9.8 \times 10^{-3}} = 8.038 \text{ كم/ث}$$
$$= 28937 \text{ كم/الساعة}$$

تكاملات اقترانات متجهة

يمكن الوصول الى تكامل اقتران متجه حسب مجاميع ريمان ، ولكن اختصارا للجهد والوقت نعرف تكامل اقتران متجه بدلالة تكاملات مركباته .

تعريف(12.11) افرض $\underline{F}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}$

حيث f ، g ، h متصلة على $[a,b]$ ، فان التكامل المحدد $\int_a^b \underline{F}(t)dt$ وكذلك التكامل غير المحدد $\int F(t)dt$ يعرفان كما يلي

$$\int_a^b \underline{F}(t)dt = [\int_a^b f(t)dt]\underline{i} + [\int_a^b g(t)dt]\underline{j} + [\int_a^b h(t)dt]\underline{k}$$

$$\int \underline{F}(t)dt = [\int f(t)dt]\underline{i} + [\int g(t)dt]\underline{j} + [\int h(t)dt]\underline{k}$$

مثل (12.19) افرض $\underline{F}(t) = 2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j} + \cos t\,\underline{k}$

جد $\int_0^{\pi/2} \underline{F}(t)dt \quad , \quad \int \underline{F}(t)dt$

الحل :

$$\begin{aligned}\int \underline{F}(t)dt &= (\int 2t\,dt)\underline{i} + (\int -t^2\,dt)\underline{j} + (\int \cos t\,dt)\underline{k}\\ &= (t^2 + c_1)\underline{i} - (\frac{t^3}{3} + c_2)\underline{j} + (\sin t + c_3)\underline{k}\\ &= t^2\,\underline{i} - \frac{t^3}{3}\underline{j} + \sin t\,\underline{k} + \underline{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \underline{F}(t)dt &= t^2\Big|_0^{\pi/2}\underline{i} - \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi/2}\underline{j} + \sin t\Big|_0^{\pi/2}\underline{k}\\ &= \frac{\pi^2}{4}\underline{i} - \frac{\pi^3}{24}\underline{j} + \underline{k}\end{aligned}$$

كذلك اذا $\underline{F}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}$

فان

$$\begin{aligned}\int \underline{F}'(t)dt &= \int [f'(t)\underline{i} + g'(t)\underline{j} + h'(t)\underline{k}]dt\\ &= [\int f'(t)dt]\underline{i} + [\int g'(t)dt]\underline{j} + [\int h'(t)dt]\underline{k}\\ &= [f(t) + c_1]\underline{i} + [g(t) + c_2]\underline{j} + [h(t) + c_3]\underline{k}\\ &= \underline{F}(t) + [c_1\underline{i} + c_2\underline{j} + c_3\underline{k}]\\ &= \underline{F}(t) + \underline{c}\end{aligned}$$

حيث $\underline{c}$ متجه ثابت ، ولهذه العلاقة اهمية في دراسة الحركة ، ونرى منها ما يلي بالنسبة الى السرعة والتسارع

$$\int \underline{v}(t)dt = \int \underline{r}'(t)dt = \underline{r}(t) + \underline{C}$$

$$\int \underline{a}(t)dt = \int \underline{v}'(t)dt = \underline{v}(t) + \underline{C}$$

الصيغة المتجهة لقانون نيوتن الثاني

يمكن صياغة قانون نيوتن الثاني كما يلي

$$\underline{F} = m\,\underline{a}\,(t)$$

ولذلك في دراسة حركة جسم قريب من الارض يتأثر بالجاذبية الارضية فقط ، فانه باختيار مناسب للاحداثيات يمكن صياغة الحركة . افرض محور z يخرج من مركز الارض ، فان التسارع يكون $-g\,\underline{k}$ ، حيث g ثابت الجاذبية (حوالي 32 قدما أو 9.8 مترا في الثانية في الثانية) .

فاذا كان جسم ما في موقع ابتدائي $\underline{r}_0$ وله سرعة ابتدائية $\underline{v}_0$ ويتحرك بتسارع ثابت هو $-g\,\underline{k}$ فانه بالتكامل نحصل على

$$\underline{v}(t) = \int \underline{a}(t)dt = \int -g\,\underline{k}\,dt = -g\,t\,\underline{k} + \underline{C}$$

$$\underline{r}(t) = \int \underline{v}(t)dt = \int (-g\,t\,\underline{k} + \underline{C})dt$$

$$= \frac{-g\,t^2}{2}\,\underline{k} + \underline{C}\,t + \underline{C}_1$$

حيث $\underline{C}$ ، $\underline{C}_1$ متجهان ثابتان . الآن $\underline{v}(0) = \underline{v}_0$ ، $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$ لذلك

$$\underline{r}(t) = \frac{-g\,t^2}{2}\,\underline{k} + \underline{v}_0\,t + \underline{r}_0 \qquad (*)$$

مثل (12.20) كرة ضربت من ارتفاع 4 امتار فوق سطح الارض بسرعة ابتدائية قدرها 56 مترا/ث ، وبزاوية $\pi/6$ مع الارض . متى تضرب هذه الكرة سطح الارض ؟

الحل : نختار نظاما احداثيا ، حتى يتمثل سطح الارض بالمستوى xy ، وان حركة الكرة هي في المستوى yz ، وان مركبة $\underline{j}$ من متجه الموضع لها يزداد . لذلك $\underline{r}_0 = 4\,\underline{k}$. كذلك

$$\underline{v}_0 = 56(\cos\frac{\pi}{6}\,\underline{j} + \sin\frac{\pi}{6}\,\underline{k}) = 56(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\underline{j} + \frac{1}{2}\,\underline{k})$$

$$= 28\sqrt{3}\;\underline{j} + 28\,\underline{k}$$

نعوض في (*) نحصل على

$$\underline{r}(t) = \frac{-gt^2}{2}\,\underline{k} + (28\sqrt{3}\;\underline{j} + 28\,\underline{k})\,t + 4\,\underline{k}$$

$$= 28\sqrt{3}t\,\underline{j} + (-\frac{gt^2}{2} + 28\,t + 4)\,\underline{k}$$

عندما تصطدم الكرة بالارض فان مركبة $\underline{k}$ من متجه موضعها هو صفر . لذلك

$$-\frac{g\,t^2}{2} + 28\,t + 4 = 0$$

$$g\,t^2 - 56\,t - 8 = 0$$

$$9.8\,t^2 - 56\,t - 8 = 0$$

$$t = \frac{56 \pm \sqrt{3449.6}}{19.6} = \frac{56 \pm 58.73}{19.6}$$

$$= 5.79$$

أي أن الكرة تصطدم بالارض بعد 5.79 ثانية .

تمارين (12.3)

للتمارين (1) - (8) جد مشتقات الاقترانات المفروضة

(1) $\underline{F}(t) = 2t\,\underline{i} - \underline{j} + \sin t\,\underline{k}$

(2) $\underline{F}(t) = 2\underline{i} - 3t\,\underline{j} + e^{t}\,\underline{k}$

(3) $\underline{F}(t) = (1+t)^{1/2}\,\underline{i} - (1-t^2)^{1/2}\,\underline{j} + t\,\underline{k}$

(4) $\underline{F}(t) = \tan t\,\underline{i} - \sec^2 t\,\underline{j}$

(5) $\underline{F}(t) = e^{t}\sin t\,\underline{i} + e^{t}\cos t\,\underline{k}$

(6) $\underline{F}(t) = \cosh t\,\underline{i} + \sinh t\,\underline{i} - \sqrt{t}\,\underline{k}$

(7) $\underline{F}(t) = \sin^{-1} t\,\underline{i} - 3\tan^{-1}(t^2 - 1)\,\underline{k}$

(8) $\underline{F}(t) = \ln(t^2+1)\,\underline{i} - 2e^{t}\,\underline{j} + \log_5\sqrt{t}\,\underline{k}$

اذا $\underline{G} = 3t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j} - 4\csc t\,\underline{k}$, $\underline{F} = 2\sec t\,\underline{i} - 3\underline{j} + \csc t\,\underline{k}$

جد المشتقة في التمارين (9) - (12)

(9) $4\underline{F} - 2\underline{G}$ (10) $\underline{F}\cdot\underline{G}$

(11) $\underline{F}\times\underline{G}$, $\underline{G} = \ln t$ (12) $\underline{F}\times(4\underline{F} - 2\underline{G})$

اذا $\underline{G}(t) = \frac{-2-4t^2}{(1+t^2)^2}\,\underline{i} - \frac{4t}{(1+t^2)^2}\,\underline{j}$, $\underline{F}(t) = \frac{-2t}{1+t^2}\,\underline{i} + \frac{1+2t^2}{1+t^2}\,\underline{j}$

جد مشتقة التمارين (13) - (14)

(13) $\underline{F}\cdot\underline{G}$ (14) $\underline{F}\times\underline{G}$

جد مشتقة التمارين (15) - (17)

(15) $\underline{F}\circ g$, $\underline{F}(t) = \ln t\,\underline{i} - 4e^{2t}\,\underline{j} + \frac{t-1}{t}\,k$, $g(t) = \sqrt{t}$

$\underline{F} \circ g \ , \ \underline{F}(t) = t^3 \underline{i} - \sqrt{3}\, t\, \underline{j} + t^{-2} \underline{k} \ , \ g(t) = \cos t$ (16)

$\underline{F}(t) \cdot \underline{F}(t) \ , \ \underline{F}(t) = \frac{4t}{1+4t^2}\,\underline{i} + \frac{1-4t^2}{1+4t^2}\,\underline{j}$ (17)

للتمارين(18) - (22) احسب التكاملات

$\int [(t \cos t\, \underline{i} - t \sin t\, \underline{j} + 5t^4 \underline{k}]\, dt$ (18)

$\int (t^2 \underline{i} - (2t-1)\underline{j} + t^{-2} \underline{k})\, dt$ (19)

$\int_0^1 (\cosh t\, \underline{i} - \sinh t\, \underline{j} + 2\underline{k})\, dt$ (20)

$\int_0^1 (e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + 2t\, \underline{k})\, dt$ (21)

$\int_{-1}^1 [(1+t)^{3/2}\, \underline{i} - (1-t)^{3/2}\, \underline{j}]\, dt$ (22)

للتمارين (23) - (26) جد متجه السرعة والسرعة (مقدارا) والتسارع لجسم يتحرك حسب اقتران الموضع المفروض ·

$\underline{r}(t) = \cos t\, \underline{i} + \sin t\, \underline{j} - 2t^2\, \underline{k}$ (23)

$\underline{r}(t) = 3t\, \underline{i} - 2t\, \underline{j} - 16t^2\, \underline{k}$ (24)

$\underline{r}(t) = e^t \sin t\, \underline{i} + e^t \cos t\, \underline{j} + e^t\, \underline{k}$ (25)

$\underline{r}(t) = \cosh t\, \underline{i} - \sinh t\, \underline{j} - t\, \underline{k}$ (26)

للتمارين (27) - (30) احسب الموضع ومتجه السرعة وسرعة جسم يتحـرك مفروض تسارعه $\underline{a}(t)$ وسرعته الابتدائية $\underline{v}_0$ ، وموضعه الابتدائي $\underline{r}_0$

$\underline{a}(t) = -32\, \underline{k} \ , \ \underline{v}_0 = \underline{i} + \underline{j} \ , \ \underline{r}_0 = \underline{0}$ (27)

$\underline{a}(t) = -9.8\, \underline{k} \ , \ \underline{v}_0 = \underline{0} \ , \ \underline{r}_0 = 2\underline{i} - \underline{j}$ (28)

$\underline{a}(t) = -\cos t\, \underline{i} - \sin t\, \underline{j} \ , \ \underline{v}_0 = \underline{k} \ , \ \underline{r}_0 = \underline{i}$ (29)

$\underline{a}(t) = e^t \underline{i} - e^{-t} \underline{j} \ , \ \underline{v}_0 = \underline{i} + \underline{j} + \sqrt{2}\, \underline{k} \ , \ \underline{r}_0 = \underline{i} - \underline{j}$ (30)

(31) جد $\underline{F}'(t)$ اذا $\underline{F}(t) = \int_0^t (u \tan u^3\, \underline{i} + \cos e^u\, \underline{j} + e^{u^2}\, \underline{k})\, dt$

(32) جد $\underline{H}'(t)$ اذا $\underline{H}(t) = \int_0^{t^2} (\cos u\, \underline{i} + e^{-(u^2)}\, \underline{j} + \tan u\, \underline{k})\, du$

(33) اذا $\underline{F}(t) = \cos t\, \underline{i} + \sin t\, \underline{j}$ · اثبت انه توجد قيمة $t \in (0, \pi)$ بحيث ان

$$\frac{\underline{F}(\pi) - \underline{F}(0)}{\pi - 0}$$

يوازي $\underline{F}'(t)$ · بينما لا توجد قيمة t بحيث أن

$$F'(t) = \frac{\underline{F}(\pi) - \underline{F}(0)}{\pi - 0}$$

(34) اذا $\underline{F}(t) = e^{-2t}\,\underline{i} + e^{2t}\,\underline{k}$ ، اثبت انه لجميع قيم t ، المتجهان $\underline{F}$ ، $\underline{F}''$ متوازيان . هل هناك قيمة t بحيث أن $\underline{F}(t)$ ، $\underline{F}''(t)$ في الاتجاه نفسه ؟

(35) اثبت أن $\frac{d}{dt}(\underline{F} \times \underline{F}') = \underline{F}(t) \times \underline{F}''(t)$

(36) اذا $\underline{F}(t)$ ، $\underline{F}''(t)$ متوازيان ، اثبت أن $\underline{F} \times \underline{F}'$ ثابت . (ارشـــاد استعمل التمرين 35) .

(37) اذا $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ ، $\underline{H}$ قابلة الاشتقاق ، أثبت أن

$$\frac{d}{dt}[\underline{F}\cdot(\underline{G} \times \underline{H})] = \frac{d\underline{F}}{dt}\cdot(\underline{G} \times \underline{H}) + \underline{F}\cdot\left(\frac{d\underline{G}}{dt} \times \underline{H}\right) + \underline{F}\cdot\left(\underline{G} \times \frac{d\underline{H}}{dt}\right)$$

(38) افرض أن موضع كرة (انظر المثل 20 . 12) هو

$$\underline{r}(t) = 90\sqrt{2}\,t\,\underline{i} + 90\sqrt{2}\,t\,\underline{j} + (64t - 16t^2)\,\underline{k} \ , \ t \geq 0$$

(أ) جد $\underline{r}_0$ (الموضع الابتدائي) ، $\underline{v}_0$ (السرعة الابتدائية) .

(ب) اثبت أن الكرة تصطدم بالارض بعد 4 ثوان .

(39) ساتل يدور حول الارض في مداره بسرعة 28502 كم/ الساعة . ما هو نصف قطر مداره ؟

(40) المسارع النووي في مختبر فيرمي للمسارع النووي (في ايلينوي ـ الولايـــات المتحدة) هو دائرة نصف قطرها كيلو متر واحد . جد مقدار التسارع المركزي لبروتون يتحرك في المسارع بسرعة ثابتة :

(أ) 2.5×10^5 كم / ث (ب) 2.9×10^5 كم / ث

(41) يمكن برهنة الخصائص التالية لتكاملات الاقترانات المتجهة

(أ) $\int_a^b [\underline{F}(t) + \underline{G}(t)]\,dt = \int_a^b \underline{F}(t)\,dt + \int_a^b \underline{G}(t)\,dt$

(ب) $\int_a^b [\alpha \underline{F}(t)]\,dt = \alpha \int_a^b \underline{F}(t)\,dt$ ، α عدد قياسي

(جـ) $\int_a^b [\underline{C}\cdot\underline{F}(t)]\,dt = \underline{C}\cdot\int_a^b \underline{F}(t)\,dt$ ، $\underline{C}$ متجه

(د) $\left\| \int_a^b \underline{F}(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|\underline{F}(t)\|\,dt$

(12.4) المنحنيات واطوالها

تعريف (12.12) المنحني الفضائي (أو المنحني) هو مدى اقتران متجه متصل على فترة من الاعداد الحقيقية.

ليست ، بالطبع ، هذه أول مرة نصادف المنحنيات ، فلقد درسنا فيما سبق النقطة (منحنيا ممسوخا) والمستقيم وقطوع المخروط ، ومنحنيا لولبيا وغير ذلك. سنستعمل ، على الغالب ، الحرف C ليدل على المنحني ، كما أن $\underline{r}$ ستدل على الاقتران المتجه الذي مداه C . ونقول أن C قد مَعْلَمَ $\underline{r}$ ، أو ان $\underline{r}$ هو معلمة للمنحني C . على أننا لن نفرق بين C ومعادلته المَعْلَمية ، فنقول المعادلة

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} + z(t)\,\underline{k}$$

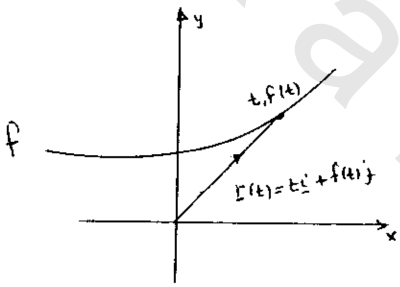
هي المنحني C ، وسنرى أن تعريفنا اعلاه واسع ليشمل كل المنحنيات التي عرفناها.

مثل (12.21) افرض f اقترانا حقيقيا متصلا على فترة ما I ، اثبت أن رسم f هو منحن ، واكتب مَعْلَمَةً له .

الحل : نعرف الاقتران المتجه

$$\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + f(t)\,\underline{j}\ ,\ t \in I$$

فان $\underline{r}$ متصل ، ويرسم منحني f . انظر الشكل (12.12) وهكذا حسب تعريفنا اعلاه فان رسم f هو منحن .



الشكل (12.12)

خصائص المنحنيات

يهمنا ثلاث خصائص للمنحنيات : المنحني المغلق والممهد ، والممهد اجزاءً .

تعريف (12.13) المنحني C مغلق اذا مَعْلَمَتُه مجالها فترة مغلقة [a , b] وان $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$. انظر الشكل (12.13) للمنحنى المغلق وغير المغلق (المفتوح).

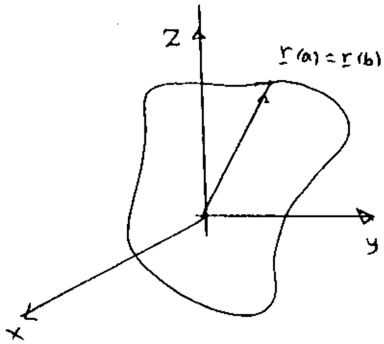
مثل (12.22) افرض المنحني C

$$\underline{r}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 2\sin t\,\underline{j}\ ,\ 0 < t \le 2\pi$$

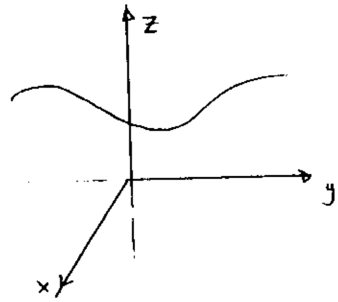
فهذا المنحني هو دائرة نصف قطرها 2 ، ولاحظ أن $\underline{r}(0) = \underline{r}(2\pi)$.

تعريف (12.14)

(أ) الاقتران المتجه $\underline{r}$ على الفترة I ممهد اذا $\underline{r}$ له مشتقة متصلة على I ، وان



منحن مغلق



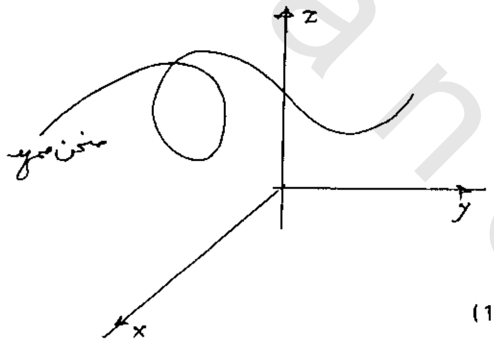
منحن غير مغلق

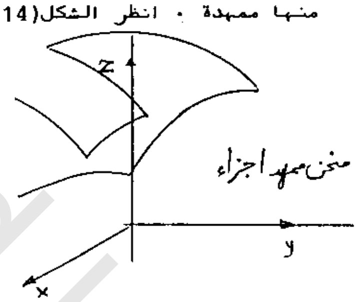
الشكل (12.13)

$\underline{r}'(t) \neq \underline{0}$ لاي $t \in I$ ، الا ربما عند احد طرفي I .

(ب) الاقتران المتجه المتصل $\underline{r}$ على الفترة I هو <u>ممهد اجزاء</u> اذا I مؤلفة من عدد محدود من الفترات الجزئية على كل منها $\underline{r}$ ممهد .

ومن ناحية الشكل فان المنحني الممهد مؤلف من قطعة واحدة دون ان يكون فيه اجزاء تلتقي في زوايا حادة ، والمنحني الممهد اجزاء مؤلف من عدة قطع كل منها ممهدة . انظر الشكل (12.14) .





الشكل (12.14)

<u>مثل (12.22)</u> نثبت أن منحني الدائرة ممهد .

<u>البرهان</u> : معادلة الدائرة المعلمية هي

$$\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \sin t\,\underline{j}\ ,\quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

لذلك

$$\underline{r}'(t) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}$$

والمشتقة متصلة على $[0\ ,\ 2\pi]$. كذلك

$$\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

وحسب التعريف اعلاه ، فان منحني الدائرة ممهد .

<u>مثل (12.23)</u> اثبت أن منحني الدويري الذي معادلته

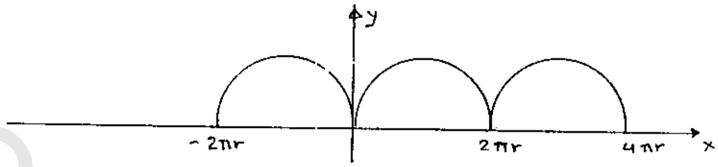
$$\underline{r}(t) = r(t - \sin t)\underline{i} + r(1 - \cos t)\underline{j} \quad , \quad [-2\pi, 2\pi]$$

هـو ممهـد اجـزاء ٠

البرهان : $\underline{r}'(t) = r(1 - \cos t)\underline{i} + r \sin t\, \underline{j}$

منها نجد ان $\underline{r}'$ متصل ، لكن $\underline{0} = \underline{r}'(t)$ عندما $0 = t$ أو $\pm 2\pi$.

لذلك فان هذا المنحني ممهد اجزاء ٠ انظر الشكل(12.15) .



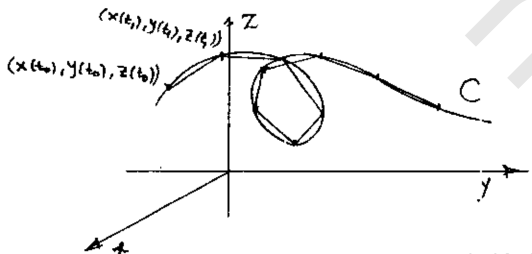
الشكـل (12.15)

طول المنحني : في اشتقاقنا للقاعدة التي تعطي طول منحن ممهد على فترة مغلقـة ، فاننا نعمم ما درسناه سابقا لطول منحن حقيقي ٠ انظر البند(5:11) .

افرض C منحنيا ممهدا معلما حسب

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} \quad , \quad a \leq t \leq b$$

افرض $P = t_0 , t_1 , t_2 , \ldots\ldots , t_n$ تجزئة للفترة $[a , b]$ ٠ وافـرض أن L هو كثير الاضلاع الذي يصل بين نقاط C حسب هذه التجزئة ٠ انظر الشكل(12.16) .



الشكل (12.16)

وحسب قاعدة المسافة بين نقطتين فان

$$L_k = \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2}$$

وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة ، توجد اعداد u_k , v_k , w_k في $[t_{k-1} , t_k]$ بحيث أن

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(u_k)\Delta t_k \;,\; y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(v_k)\Delta t_k$$

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(w_k)\Delta t_k$$

أي أن

$$L_k = \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2 + [z'(t_k)]^2}\;\Delta t_k$$

فاذا $\|P\| < < 1$ (*) فان طول C يمكن تقريبه بالمجموع $\sum_{k=1}^{n} L_k$ أي أن

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x'(u_k)]^2 + [y'(t_k)]^2 + [z'(t_k)]^2}\ \Delta t_k \qquad (*)$$

ومماثل لما كنا نصنع في هذه المجاميع سابقا فانه مع $\|P\| \rightarrow 0$ نجد أن (*) تؤول الى

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t_k)]^2 + [z'(t_k)]^2}\ dt$$

وبما أن $\sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(tk)]^2 + [z'(t_k)]^2} = \|\underline{r}'(t)\|$

فان طول المنحني يؤول الى

$$\int_a^b \|\underline{r}'(t)\|\ dt$$

وهذا يقودنا الى التعريف التالي

تعريف(12.15) افرض C منحنيا ممهدا اجزاء على [a , b] له تمثيل مَعْلَمي $\underline{r}$. فان طول C معرف حسب

$$L = \int_a^b \|\underline{r}'(t)\|\ dt$$

واذا

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}\ , \quad a \le t \le b$$

فان

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\ dt$$

مثل(12.23) نجد طول اللولب الدائري

$$\underline{r}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 2\sin t\,\underline{j} + 2t\,\underline{k}\ , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

الحل : حسب القاعدة اعلاه

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (2)^2}\ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\ dt = 4\pi\sqrt{2}$$

مثل(12.25) جد طول المنحني الذي معادلاته : $y = e^t$، $z = e^t \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$، $x = e^t \cos t$.

الحل:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + (e^t)^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{3}\ e^t\ dt = \sqrt{3}\ e^t \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{3}\ (e^{2\pi} - 1)$$

(*) العلاقة $< < 1$ تعني صغير جدا ، لذلك $\|P\| < < 1$ تعني أن مقياس التجزئة الذي هو طول اكبر فترة جزئية ، هو صغير جدا .

والتمثيل المَعْلَمي لمنحن ما ليس وحيدا ، فقد تكون له اكثر من صيغة ، ومع ذلك يبقى طول هذا المنحني لا يتغير ، أي أن الطول مستقل عن التمثيل المَعْلَمي .

مثل (12.26) افرض قطعة مستقيم من $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ الى $(2, 2, 2)$. فان أيا من المعادلات المعلمية التالية تمثل هذه القطعة

$$\underline{r}_1(t) = t\,\underline{i} + t\,\underline{j} + t\,\underline{k} \quad , \quad \frac{1}{9} \le t \le 2$$

$$\underline{r}_2(t) = (t-1)\,\underline{i} + (t-1)\,\underline{j} + (t-1)\,\underline{k} \quad , \quad \frac{10}{9} \le t \le 3$$

$$\underline{r}_3(t) = t^2\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + t^2\,\underline{k} \quad , \quad \frac{1}{3} \le \quad \le \sqrt{2}$$

ونحسب الطول حسب كل من هذه المعادلات

$$L_1 = \int_{1/9}^{2} \sqrt{1+1+1}\ dt = \sqrt{3}\ t \Big|_{1/9}^{2} = \sqrt{3}\ \frac{(17)}{9}$$

$$L_2 = \int_{10/9}^{3} \sqrt{1+1+1}\ dt = \sqrt{3}\ t \Big|_{10/9}^{3} = \sqrt{3}\ \frac{(17)}{9}$$

$$L_3 = \int_{1/3}^{2} \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2 + (2t)^2}\ dt = \int_{1/3}^{2} 2\sqrt{3}\ t\,dt$$

$$= \sqrt{3}\ t^2 \Big|_{1/3}^{2} = \frac{17\sqrt{3}}{9}$$

طول منحن بالاحداثيات القطبية

ذكرنا فيما سبق (البند 10:6) طول منحن موصوف بالاحداثيات القطبية فاذا $r = f(\theta)$ ، فان المنحني C يعطى على $[\alpha, \beta]$ كما يلي

$$\underline{r}(\theta) = r\cos\theta\,\underline{i} + r\sin\theta\,\underline{j} = f(\theta)\cos\theta\,\underline{i} + f(\theta)\sin\theta\,\underline{j}$$

لذلك

$$\underline{r}'(\theta) = [f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]\,\underline{i} + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]\,\underline{j}$$

$$\|\underline{r}'(\theta)\|^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2$$

أي أن طول المنحني هو حسب القاعدة

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2}\ d\theta$$

مثل (12.27) احسب طول المنحني القلبي $r = 1 + \cos\theta\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

الحل : $f(\theta) = 1 + \cos\theta$ لذلك $f'(\theta) = -\sin\theta$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\ d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\ d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8$$

اقتران طول المنحني : اعتمادا على ما سبق ، فانه اذا المنحني C هو

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}\ ,\ t \in I$$

واذا فرضنا a عددا ثابتا من الفترة I ، فاننا نعرف اقتران طول المنحني كما يلي

$$s(t) = \int_a^t \|\underline{r}'(u)\|\,du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}\,du \quad t \in I.$$

فاذا $t \geq a$ فان $s(t)$ هو ذلك الجزء من المنحني بين $\underline{r}(a)$ ، $\underline{r}(t)$. انظر الشكل(12.17) . واذا $\underline{r}(t)$ هو متجه الموضع في اللحظة $a \leq t$ فان $s(t)$ هو المسافة التي يقطعها الجسم بين اللحظتين t , a . لاحظ أن

$$\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\underline{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

فاذا $\underline{r}$ هو موضع الجسم ، فان $\underline{v}$ متجه سرعته . كذلك

$$\|\underline{r}'(t)\| = \|\underline{v}(t)\| = \frac{ds}{dt} \geq 0$$

وبما أن $\frac{ds}{dt} > 0$ (الا ربما عند طرفي الفترة) ، فانه يمكن اعتبار t اقترانا في s ، وهكذا نحصل على $\underline{r}(t(s))$ على $s \in [0 , L]$. ونستفيد من هذه الملاحظة لحساب $\frac{ds}{dt}$.

مثل(12.28) افرض $\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j} - t^3\,\underline{k}$

فان

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 4t^2 + 9t^4}$$

تمارين(12.4)

للتمارين (1) - (8)حدد ايا من هذه المنحنيات ممهدا أو ممهدا اجزاء

(1) $\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j} + t^3\,\underline{k}$

(2) $\underline{r}(t) = (t+1)\underline{i} - (t+1)\underline{j} + (t+1)\underline{k}$

(3) $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} - |t|\,\underline{j} + t\,\underline{k}$

(4) $\underline{r}(t) = t^2\,\underline{i} + t\,\underline{j} - t^{3/2}\,\underline{k}$

(5) $\underline{r}(t) = \sin t\,\underline{i} - \cos t\,\underline{j} - t^2\,\underline{k}$

$$\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + e^t\underline{j} + e^t\underline{k} \tag{6}$$

$$\underline{r}(t) = t^2\,\underline{i} - t^3\,\underline{j} + (e^t - t)\underline{k} \tag{7}$$

$$\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + 2t^2\,\underline{j} - \ln t\,\underline{k} \tag{8}$$

للتمارين (9) - (16) جد تمثيلا معلميا ممهدا

(9) قطعة المستقيم من (1 , 2 , 2) الى (2 , 4 , 4)

(10) قطعة المستقيم من (1- , 2 , 1) الى (2 , 2 , 3)

(11) دائرة في مستوى xy ، مركزها نقطة الاصل ، ونصف قطرها 5 .

(12) دائرة في مستوى z = 1 مركزها (1 , -1 , -1) ونصف قطرها $\frac{4}{5}$.

(13) نصف دائرة في مستوى xy تمر بالنقاط (0 , 1) , (1 , 0) , (0 , -1) .

(14) ربع دائرة في مستوى xy طرفاه (0 , 1-) ، (1- , 0) ، ومركزها نقطة الاصل .

(15) قطع ناقص في مستوى xy ، محوراه يمران في (±a , 0) , (0 , ±b) .

(16) منحني f حيث $f(x) = x^2 - 1$.

للتمارين (17) - (20) جد تمثيلا معلميا ممهدا اجزاء

(17) مربع في مستوى xy رؤوسه (0 , 2) , (2 , 2) , (0 , 2) , (0 , 0) .

(18) مثلث في مستوى xy رؤوسه (0 , 1-) , (1 , 0) , (0 , 2) .

(19) المضلع الواصل بين (1 , 0 , 0) , (0 , 2 , 3) , (0 , 2 , 3) , (3 , 0 , 4) .

(20) المضلع الواصل بين (0 , 0 , 0) , (0 , 2 , 1) , (1 , 2 , 0) , (1 , 2 , 0) , (1 , 2 , 1)
(1 , 2 , 1) , (2 , 3 , -1) .

للتمارين (21) - (28) احسب طول المنحني

$$\underline{r}(t) = 5t\,\underline{i} + 4t^2\,\underline{j} + 3t^2\,\underline{k}\ ,\ [0\ ,\ 2] \tag{21}$$

$$\underline{r}(t) = t^2\,\underline{i} + t\sin t\,\underline{j} + t\cos t\,\underline{k}\ ,\ [0\ ,\ 1] \tag{22}$$

$$\underline{r}(t) = e^t\cos t\,\underline{i} + e^t\,\underline{j} + e^t\sin t\,\underline{k}\ ,[0\ ,\ 2\pi] \tag{23}$$

$$\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} + 4\sin 3t\,\underline{j} + 4\cos 3t\,\underline{k}\ ,[0\ ,\ 2\pi] \tag{24}$$

$$\underline{r}(t) = 3t^2\,\underline{i} + t^3\,\underline{j} + 6t\,\underline{k}\ ,\ [0\ ,\ 1] \tag{25}$$

$$\underline{r}(t) = (1 - 2t^2)\,\underline{i} + 4t\,\underline{j} + (3 + 2t^2)\underline{k},[0\ ,\ 2] \tag{26}$$

$$\underline{r}(t) = e^t\,\underline{i} + e^{-t}\,\underline{j} + \sqrt{2}\,t\,\underline{k}\ ,\ [0\ ,\ 1] \tag{27}$$

$$\underline{r}(t) = \cosh t\,\underline{i} + \sinh t\,\underline{j} + t\,\underline{k}\ ,\ [0\ ,\ 1] \tag{28}$$

للتمارين (29) - (33) جد ds/dt

$$\underline{r}(t) = t\cos t\,\underline{i} + t\sin t\,\underline{j} + t\,\underline{k} \tag{29}$$

$$\underline{r}(t) = t\sin t\,\underline{i} - t\cos t\,\underline{j} + t\,\underline{k} \tag{30}$$

$$\underline{r}(t) = \sin 2t\,\underline{i} + \cos 2t\,\underline{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\,\underline{k} \tag{31}$$

$$\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} - t^2\,\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\,\underline{k} \tag{32}$$

$$\underline{r}(t) = (t - \sin t)\,\underline{i} + (1 - \cos t)\,\underline{j} + t\,\underline{k} \tag{33}$$

للمنحنيات القطبية التالية (34) - (36) احسب اطوالها

$$r = a\cos\theta\ ,\ [-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}] \tag{34}$$

$$r = a\sin\theta\ ,\ [0\ ,\ \pi] \tag{35}$$

$$r = \theta\ ,\ [0\ ,\ 1] \tag{36}$$

للتمارين (37) - (40) استعمل قاعدة سمبسون مع n = 4 لتحسب طول المنحني

$$[-1\ ,\ 1]\ ,\ \underline{r}(t) = \sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\,\underline{k} \tag{37}$$

$$[0\ ,\ 2]\ ,\ \underline{r}(t) = \cos 2t\,\underline{i} + \sin 2t\,\underline{j} + \frac{4}{5}t^{5/2}\,\underline{k} \tag{38}$$

$$[-1\ ,\ 1]\ ,\ \underline{r}(t) = t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + t^3\,\underline{k} \tag{39}$$

(40) $\underline{r}(t) = (t - \sin t)\,\underline{i} + (1 - \cos t)\,\underline{j}$ احسب طول فرع واحد من هذا الدويري.

(اول من حسبه هو المهندس المعماري البريطاني كرستوفر رن Wren سنة1658 .

والجواب هو 8) .

(12.5) المماس والناظم والانحناء

بعد أن قدمنا مشتقة اقتران متجه ، نستطيع أن نعرف المماس لمنحني هذا الاقتران .

تعريف (12.16) افرض C منحنيا ممهدا ، وان $\underline{r}$ مَعْلَمَةٌ له معرفة على فترة I . فانه لأي $t_0 \in I$ ليست احدى طرفي I ، نعرف المماس (أو متجه مماس الوحدة) عند النقطة $\underline{r}(t_0)$ على انه

$$\underline{T}(t_0) = \frac{\underline{r}'(t_0)}{\|\underline{r}'(t_0)\|} \quad \ldots\ldots \; (1)$$

من الواضح ان $\underline{T}$ متجه وحدة ، لذلك فهو معرف باتجاهه فقط .

مثل (12.29) ندرس الدائرة $\underline{r}(t) = a\cos t\,\underline{i} + a\sin t\,\underline{j}$ ، على $[0 , 2\ \ ]$

فان $\underline{r}'(t) = -a\sin t\,\underline{i} + a\cos t\,\underline{j}$

كذلك لجميع t في الفترة : $\|\underline{r}'\| = a$

لهذا $\underline{T} = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}$

لاحظ أن $\|\underline{T}\| = 1$ كما هو متوقع .

وبما انه لجميع t في الفترة $\underline{T}(t)\cdot\underline{r}(t) = 0$

فان متجه المماس معامد على متجه الموضع لجميع t . انظر الشكل (12.17) .

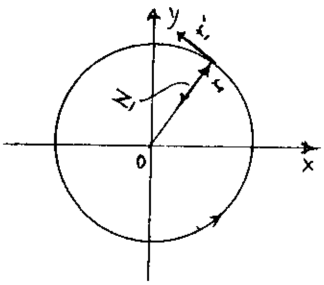
مثل (12.30) في اللولب الدائري ، $\underline{r}(t) = 3\cos t\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j} + 3t\,\underline{k}$

نجد أن $\underline{r}'(t) = -3\sin t\,\underline{i} + 3\cos t\,\underline{j} + 3\,\underline{k}$

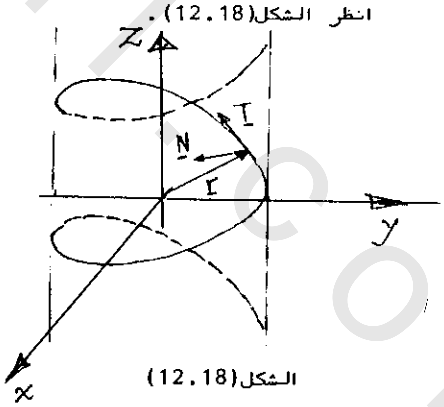
كذلك $\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

لهذا $\underline{T}(t) = -\frac{1}{2}\sin t\,\underline{i} + \frac{1}{2}\cos t\,\underline{j} + \frac{1}{2}\underline{k}$

انظر الشكل (12.18) .

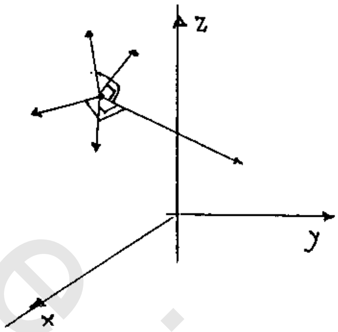


الشكل (12.17)



الشكل (12.18)

والآن ندرس المستقيمات المعامدة للمماسات ، وهي ايضا متجهات نسمي الواحد منها ناظما . على أي حال لو عزلنا متجها ما في الفضاء $\underline{a}$ ، فان المتجهات المعامدة لهذا المتجه $\underline{a}$ عديدة ، كما نرى في الشكل (12.19) . ونختار احدها لتعريفنا الناظم .



الشكل (12.19)

تعريف(12.17) افرض C منحنيا ممهدا وان $\underline{r}$ معلمة له على فترة I ، وان $\underline{r}'$ ممهد ايضا على I .

لاي t_0 في الفترة I ، ليست احد طرفيها ، نعرف متجه الناظم $\underline{N}(t_0)$ على أنه

$$\underline{N}(t_0) = \frac{\underline{T}'(t_0)}{\|\underline{T}'(t_0)\|} \quad \ldots\ldots (2)$$

وهكذا نرى أن متجه الناظم هو متجه وحدة ، كذلك $\underline{N}$ معامد للمماس $\underline{T}$ لان

$$\underline{T}.\underline{T} = 1$$

لذلك باشتقاقها نصل الى $\underline{T}.\underline{T}' = 0$.

مثل(12.31) بالنسبة الى الدائرة $\underline{r}(t) = a\cos t\,\underline{i} + a\sin t\,\underline{j}$ وجدنا أن

$$\underline{T}(t) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}$$

لذلك

$$\underline{T}'(t) = -\cos\,\underline{i} - \sin t\,\underline{j}$$

في هذه الحال $\|\underline{T}'(t)\| = 1$ لجميع t ، لذلك

$$\underline{N}(t) = -\cos t - \sin t\,\underline{j} = -\frac{1}{\|\underline{r}\|}\underline{r}(t)$$

أي أن اتجاه $\underline{N}$ هو عكس اتجاه $\underline{r}(t)$ ، انظر الشكل(12.17) .

مثل(12.32) بالنسبة الى اللولب الدائري $\underline{r}(t) = 3\cos t\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j} + 3t\,\underline{k}$

فان

$$\underline{T}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\underline{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{k}$$

لهذا

$$\underline{T}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\underline{j}$$

لكن

$$\|\underline{T}'(t)\| = 1$$

لذلك

$$\underline{N}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\underline{j}$$

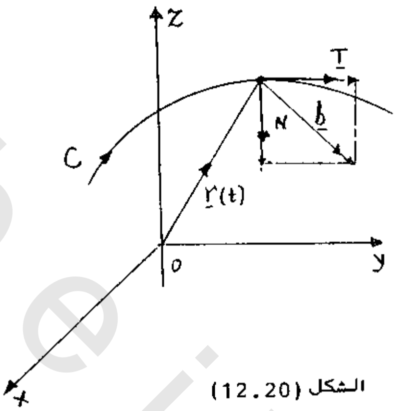
انظر الشكل (12.18) .

نجد الآن المركبتين المماسية والناظمية للتسارع .

بما أن $\underline{T}$ ، $\underline{N}$ متعامدان في أي نقطة $\underline{r}(t)$ ، لذلك يمكن تحليل أي متجه $\underline{b}$ عند $\underline{r}(t)$ الى مركبتين احداهما في اتجاه $\underline{T}$، والاخرى في اتجاه $\underline{N}$. انظر الشكل (12.20). اي أن

$$\underline{b} = b_T\underline{T} + b_N\underline{N}$$

ونسمي b_T ، b_N المركبتين المماسية والناظمية على الترتيب للمتجه $\underline{b}$.



الشكل (12.20)

الآن اذا $\underline{r}(t)$ هو متجه موضع لجسم يتحرك حيث $\underline{r}'$ ممهد ، فان

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| \underline{T} = \| \underline{v} \| \underline{T}$$

لذلك $\underline{v}$ متجه السرعة ، له مركبة واحدة مماسية ، اما بالنسبة الى التسارع فان

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\| \underline{v} \| \underline{T} \right) = \| \underline{v} \| \frac{d\underline{T}}{dt} + \left(\frac{d}{dt} \| \underline{v} \| \right) \underline{T}$$

لكن $\frac{d\underline{T}}{dt} = \left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\| \underline{N}$ ، لذلك

$$\underline{a} = \left(\frac{d}{dt} \| \underline{v} \| \right) \underline{T} + \| \underline{v} \| \left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\| \underline{N} = a_T\underline{T} + a_N\underline{N}$$

حيث $a_T = \frac{d}{dt} \| \underline{v} \|$, $a_N = \| \underline{v} \| \left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\|$

لاحظ أن

$$\| \underline{a} \|^2 = \underline{a} \cdot \underline{a} = (a_T\underline{T} + a_N\underline{N}) \cdot (a_T\underline{T} + a_N\underline{N})$$

$$= a_T^2 \| \underline{T} \|^2 + a_N^2 \| \underline{N} \|^2$$

$$= a_T^2 + a_N^2$$

مثل (12.33) افرض $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + t^2\,\underline{k}$

فان

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{i} + 2t\,\underline{j} + 2t\,\underline{k}$$

$$\| \underline{v} \| = \sqrt{\quad + 8t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \| \underline{v} \| = \frac{8t}{\sqrt{1 + 8t^2}} = a_T$$

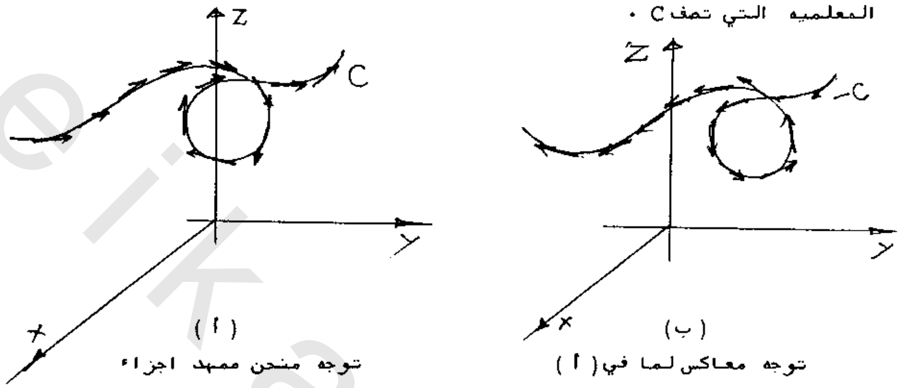
$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = 2\,\underline{j} + 2\,\underline{k} \quad , \quad \| \underline{a} \| = 8 = 2\sqrt{2}$$

من العلاقة

$$a_N = \sqrt{\| \underline{a} \|^2 - a_T^2}$$

$$= \sqrt{8 - \frac{64t^2}{1 + 8t^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 8t^2}}$$

<u>توجيه المنحنيات</u> : لاي منحن ممهد اجزاء C متجهات مماسة عند كل نقاطه الا عددا محدودا منها . وبما ان المماس يدل على الاتجاه الذي يرسم فيه المنحني من قبل $\underline{r}$ ، فاننا نقول ان $\underline{r}$ تحدد <u>توجه</u> (<u>أو اتجاه</u>) C . انظر الشكل (12.21) . وعادة ما يكون هناك توجهان لمنحن معين ممهد اجزاء ، وعلى هذا يكون اتجاه المماسات لتوجه ما معاكسا لاتجاهها في توجه معاكس . كما انه اذا ما حدّد لمنحن ما C توجه معين ، فان المتجهات المماسة لهذا المنحني ستكون معرفة تفردا مهما كانت المعادلات المعلميه التي تصف C .



(أ) توجه منحن ممهد اجزاء

(ب) توجه معاكس لما في (أ)

الشكل (12.21)

فاذا $\underline{r}(t)$ مَعْلَمَة ممهدة اجزاء لمنحن C على [a , b] ، فان

$$\underline{R}(u) = r(a+b-u) \quad , \quad u \in [a , b]$$

هو مَعْلَمَة ممهدة اجزاء للمنحني C لها توجه معاكس للتوجه السابق . انظر الشكل (12.21) . وقد ندل على عكس توجه C بالرمز C- . وفي حال منحن في مستوى واحد (مثلا xy) ، يمكن ان نسمي التوجهين : مع عقارب الساعة أو ضدها . انظر الشكل (12.22)

ضد عقارب الساعة

مع عقارب الساعة

الشكل (12.22)

(أ) (ب)

الانحناء : كيف نعبّر عن التغير في اتجاه مماس الوحدة $\underline{T}$ ؟ وبخاصة أن التغير الوحيد الممكن فيه هو اتجاهه (لماذا ؟).بما أن $\underline{T}$ يسير مع طول المنحني s ، لذلك نقيس التغير في اتجاه $\underline{T}$ بدراسة المقدار $\frac{d\underline{T}}{ds}$. وهذا هو ما نسميه الانحناء .

تعريف(12.18) افرض C منحنيا ممهدا له معلمة $\underline{r}$ ، وان $\underline{r}'$ ممهدة ايضا فاننا نعرف انحناء C على انه

$$k = \left\| \frac{d\underline{T}}{ds} \right\| \quad ......(3)$$

ولحساب k (الحرف اليوناني كابّا) نلاحظ أن

$$\frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{d\underline{T}/dt}{ds/dt} = \frac{d\underline{T}/dt}{\|d\underline{r}/dt\|} \quad .....(4)$$

ويلاحظ من التعريف أن $k \geq 0$.

مثل(12.34) لدائرة مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها a فان

$$\underline{r}(t) = (x_0 + a\cos t)\underline{i} + (y_0 + a\sin t)\underline{j}$$

$$\underline{r}'(t) = -a\sin t\,\underline{i} + a\cos t\,\underline{j}$$

$$\|\underline{r}'(t)\| = a\ ,\ \underline{T}(t) = -\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}\ ,\ \underline{T}'(t) = -\cos t\,\underline{i} - \sin t\,\underline{j}$$

$$k(t) = \frac{\|\underline{T}'(t)\|}{\|\underline{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}$$

أي أن الانحناء (في هذه الحالة) هو معكوس نصف القطر . وهكذا نرى أن الدائرة ذات نصف قطر كبير جدا ، يظهر انحناؤها صغيرا جدا ، كما نلاحظ من أي مقطع للكرة الارضية .

مثل(12.35) احسب انحناء اللولب الدائري

$$\underline{r}(t) = a\sin t\,\underline{i} + a\cos t\,\underline{j} + bt\,\underline{k}$$

الحل :

$$\underline{r}'(t) = a\cos t\,\underline{i} - a\sin t\,\underline{j} + b\,\underline{k}$$

$$\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\underline{T} = \frac{a\cos t\,\underline{i} - a\sin t\,\underline{j} + b\,\underline{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{d\underline{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\sin t\,\underline{i} - a\cos t\,\underline{j})$$

$$\left\| \frac{d\underline{T}}{dr} \right\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

لذلك

$$\kappa = \frac{\| d\underline{T}/dt \|}{\| d\underline{r}/dt \|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

في حال منحن C في بعدين (مستوي xy مثلا) يمكن أن نجد معادلة اخرى للانحناء . افرض معادلة C هي $y = f(x)$. نكتبها

$$\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + f(t)\,\underline{j}$$

$$\underline{r}' = \underline{i} + f'\,\underline{j}$$

$$\| \underline{r}' \| = \sqrt{1 + f'^2}$$

$$\underline{T} = \frac{\underline{i} + f'\,\underline{j}}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

$$\underline{T}' = \frac{\sqrt{1 + f'^2}\,(f''\,\underline{j}) - (\underline{i} + f'\,\underline{j})\,f'f''(1 + f'^2)^{-1/2}}{(1 + f'^2)}$$

$$\| \underline{T}' \| = \frac{|f''|}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

لذلك

$$\kappa = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

أما اذا معادلة C على النحو $\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j}$

فانه يمكن الوصول الى العلاقة

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

والاشتقاق هو بالنسبة الى t .

مثل(12.36) جد انحناء القطع المكافىء $y = a x^2$

الحل : $y = 2a x \;,\; y'' = 2a$

لذلك

$$\kappa = \frac{|2a|}{(1 + 4a^2 x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{2\,|a|}{(1 + 4a\,y)^{3/2}}$$

طريقة اخرى لحساب الانحناء : يمكن الوصول الى معادلة الانحناء باستعمال الضرب المتجهي كما نرى ادناه .

$$\underline{v} = \|\underline{v}\|\;\underline{T} \;,\; \underline{a} = a_T\underline{T} + a_N\underline{N}$$

لذلك

$$\underline{v} \times \underline{a} = (\|\underline{v}\|\;\underline{T}) \times (a_T\underline{T} + a_N\underline{N})$$

$$= (\|\underline{v}\|\ \underline{T} \times a_T \underline{T}) + (\|\underline{v}\|\ \underline{T} \times a_N \underline{N})$$

$$= (\|v\|\ a_N)\ (\underline{T} \times \underline{N})$$

بما أن $\underline{N}$, $\underline{T}$ متعامدان ، وكذلك $a_N = \|\underline{v}\|\ \|d\underline{T}/dt\|$ فان

$$\|\underline{v} \times \underline{a}\| = \|\underline{v}\|\ a_N = \|\underline{v}\|^2\ \left\|\frac{d\underline{T}}{dt}\right\|$$

لكن

$$K = \frac{\|d\underline{T}/dt\|}{\|d\underline{r}/dt\|} = \frac{\|d\underline{T}/dt\|}{\|\underline{v}\|}$$

أي أن

$$K = \frac{\|\underline{v} \times \underline{a}\|}{\|\underline{v}\|^3} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

مثل(12.37) افرض معادلة المنحني C هي

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{3} t^3\ \underline{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} t^2\ \underline{j} - t\,\underline{k}$$

استعمل المعادلة اعلاه لتحسب K .

الحل :

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = t^2\ \underline{i} - \sqrt{2}\ t\,\underline{j} - \underline{k}$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = t^2 + 1$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = 2t\ \underline{i} - \sqrt{2}\ \underline{j}$$

$$\underline{v} \times \underline{a} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & k \\ t^2 & -2t & 1 \\ 2t & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\ \underline{i} + 2t\,\underline{k} + 2t^2\ \underline{k}$$

$$\|\underline{v} \times \underline{a}\| = \sqrt{2 + 4t^2 + 2t^4} = \sqrt{2}\ (1 + t^2)$$

لذلك

$$K = \frac{\|\underline{v} \times \underline{a}\|}{\|\underline{v}\|^3} = \frac{\sqrt{2}(1 + t^2)}{(1 + t^2)^3} = \frac{\sqrt{2}}{1 + t^2}$$

نسمي المقدار $\rho = \frac{1}{K}$ نصف قطر الانحناء ، والنقطة التي تقع على المستقيم الخارج من تلك النقطة في اتجاه الناظم وتبعد عن المنحنى مسافة ρ تسمى مركز الانحناء .

ويمكن البرهنة على أن التسارع بمركبتين يمكن كتابته على النحو

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt}\ \underline{T} + \frac{v^2}{P}\ \underline{N} = \frac{d^2 s}{dt^2}\ \underline{T} + K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \underline{N}\ ,\quad v = \|\underline{v}\| \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

مثل(12.37) في المثل السابق ، جد مركبتي التسارع $\underline{a}$.

الحـل :
$$v = \frac{ds}{dt} = t^2 + 1 \;,\; \frac{dv}{dt} = 2t$$

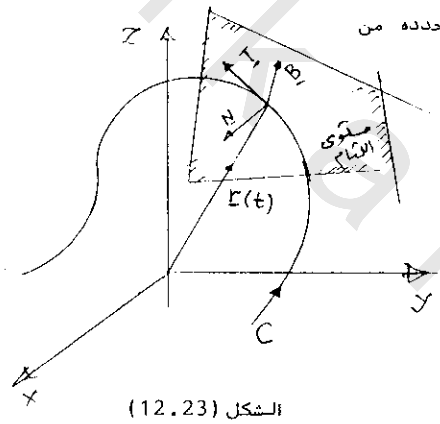
لذلك

$$\underline{a} = 2t\,\underline{T} + \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}\,(t^2+1)^2\,\underline{N}$$
$$= 2t\,\underline{T} + \sqrt{2}\,(1+t^2)\,\underline{N}$$

أي أن
$$a_N = \sqrt{2}\,(1+t^2) \;,\; a_T = 2t$$

معادلات فرينيه – سيريه : لمنحن فضائي C ، انظر الشكل (12.23) ، شريطة ان يكون ممهدا وان تكون مشتقته ممهدة ، ففي كل نقطة من نقاطه عدا الطرفين ، يوجد متجه مماس وحدة $\underline{T}$. كما وجدنا ناظما $\underline{N}$ باتجاه مركز الانحناء . وهناك متجه آخر معامد لهذين المتجهين نسميه ثنائي الناظم $\underline{B}$ ، ونحدده من

$$\underline{B} = \underline{T} \times \underline{N} \;......\; (9)$$



الشكل (12.23)

ولذلك نميز $\underline{N}$ على انه الناظم الرئيسي (في ثلاثة ابعاد) نسمي الثلاثي $\underline{T}$, $\underline{N}$, $\underline{B}$ ثلاثي فرينيه – سيريه . وبما أنها متعامدة فيما بينها فانها تصلح لان تكون نظاما احداثيا يتحرك مع نقاط المنحني C .

يسمونه في الهندسة التفاضلية نظاما اصيلا . ونسمي المستوى الذي يحوي $\underline{T}$, $\underline{B}$ مستوى اللثام . كما نسمي المستوى الذي يحوي $\underline{T}$, $\underline{N}$ المستوى الناظم . ونسمي المستوى الذي يحوي $\underline{N}$, $\underline{B}$ المستوى المقوّم .
لاحظ أن $\underline{B}$ متجه وحدة ايضا .

مثل(12.27) افرض اللولب الدائري
$$\underline{r}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 2\sin t\,\underline{j} + 3t\,\underline{k}$$
جد $\underline{T}$ ، $\underline{N}$ ، $\underline{B}$ ، والانحناء ، والمستويات : اللثام والناظم والمقوم عند النقطة $(2 \;,\; 2 \;,\; \frac{3}{4})$ ، أي عند $t = \frac{\pi}{4}$.

الحـل :
$$\underline{r}'(t) = -2\sin t\,\underline{i} + 2\cos t\,\underline{j} + 3\underline{k}$$

$$|\underline{r}'| = \sqrt{17} \;,\; \underline{T} = \frac{1}{\sqrt{17}}\,(-2\sin t\,\underline{i} + 2\cos t\,\underline{j} + 3\underline{k})$$

$$\frac{d\underline{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{17}} (-2\cos t\,\underline{i} - 2\sin t\,\underline{j})$$

$$\left\|\frac{d\underline{T}}{dt}\right\| = \frac{2}{\sqrt{17}} \,,\quad \underline{N} = -\cos t\,\underline{i} - \sin t\,\underline{j}$$

$$\underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{17}}\sin t & \frac{2}{\sqrt{17}}\cos t & \frac{3}{\sqrt{17}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{\sqrt{17}}\sin t\,\underline{i} - \frac{3}{\sqrt{17}}\cos t\,\underline{j} + \frac{2}{\sqrt{17}}\underline{k}$$

أما الانحناء فهو $K = \dfrac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{17}} = \dfrac{2}{17}$

مستوى اللثام

$$\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}(x-\sqrt{2}) - \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}(y-\sqrt{2}) + \frac{2}{\sqrt{17}}\left(z-\frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$3\sqrt{2}\,x - 3\sqrt{2}\,y + 2z = 3\pi/2$$

المستوى الناظم

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}(x-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}(y-\sqrt{2}) + \frac{3}{\sqrt{17}}\left(z-\frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$-\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y + 3z = 9\pi/4$$

المستوى المقوّم

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y-\sqrt{2}) = 0$$

$$x + y = 2\sqrt{2}$$

تمارين (12.5)

للتمارين (1) – (10) جد $\underline{r}'(t)$ ، ثم جد $\underline{T}$ ، $\underline{N}$ ، K .

(1) $\underline{r}(t) = \cos t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + 2\sin t\,\underline{k}$

(2) $\underline{r}(t) = \cos^2 t\,\underline{i} + \sin^2 t\,\underline{j} - \underline{k}$ ، $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$

(3) $\underline{r}(t) = (t^2+4)\,\underline{i} + 2t\,\underline{j}$

(4) $\underline{r}(t) = \cos^3 t\,\underline{i} + \sin^3 t\,\underline{j}$ ، $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$

(5) $\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\,\underline{k}$

(6) $\underline{r}(t) = -\frac{4}{5}\cos t\,\underline{i} + (1-\sin t)\underline{j} - \frac{3}{5}\cos t\,\underline{k}$

(7) $\underline{r}(t) = e^{t}\,\underline{i} + e^{-t}\,\underline{j} + \sqrt{2}\,t\,\underline{k}$

(8) $\underline{r}(t) = \cosh t\,\underline{i} - \sinh t\,\underline{j} + t\,\underline{k}$

(9) $\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + \ln t\,\underline{k}$

(10) $\underline{r}(t) = 2t^{9/2}\,\underline{i} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,t^3\,\underline{j} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,t^3\,\underline{k}$

استعمل المعادلة (7) لتحسب الانحناء في التمارين (11) – (17) .

(11) $\underline{r}(t) = (2t+1)\,\underline{i} + (t^2-1)\,\underline{j}$

$$\underline{r}(t) = t\cos t\,\underline{i} - t\sin t\,\underline{j} \quad (12)$$

$$\underline{r}(t) = e^{t}\sin t\,\underline{i} + e^{t}\sin t\,\underline{j} - t\,\underline{k} \quad (13)$$

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{3}(t^2 - 1)^{3/2}\,\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}t^2\,\underline{j} - \frac{\sqrt{2}}{4}t^2\,\underline{k} \quad (14)$$

$$\underline{r}(t) = \sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\,\underline{k} \quad (15)$$

$$\underline{r}(t) = t^2\,\underline{i} - t^3\,\underline{j} + t^4\,\underline{k} \quad (16)$$

$$\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + \frac{1}{2}t^2\,\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\,\underline{k} \quad (17)$$ نسمي المنحني المكعب الملتوي.

للتمارين (18) - (27) استعمل المعادلة (5) أو (6) لتحسب انحناء المنحنيات التاليــة

(18) $y = e^{x}$ (19) $y = \ln \sec x$

(20) $y = x^3$ (21) $y = e^{-x}$

(22) $y = x - x^2$ (23) $y = \sin x$

(24) $\underline{r}(t) = e^{t}\,\underline{i} - e^{-t}\,\underline{j}$ (25) $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + \frac{t^2}{2}\,\underline{j}$

(26) $\underline{r}(t) = \cosh t\,\underline{i} + \sinh t\,\underline{j}$ (27) $\underline{r}(t) = e^{t}\cos t\,\underline{i} + e^{t}\sin t\,\underline{j}$

للتمارين (28) - (31) جد الانحناء ثم احسب نصف قطر الانحناء عند النقطة المفروضة

$$(\tfrac{1}{4}\pi, 2)\ ,\ y = 2\sin 2x \quad (28)$$

$$(2\ ,\ 2)\ ,\ y^2 = 2x \quad (29)$$

$$t_0 = 0\ ,\ \underline{r}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j} \quad (30)$$

$$t_0 = \pi/2\ ,\ \underline{r}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j} \quad (31)$$

للتمارين (32) - (39) جد مركبتي التسارع المماسية والناظمية :

$$\underline{r}(t) = r(t - \sin t)\,\underline{i} + r(1 - \cos t)\,\underline{j} \quad (32)$$

$$\underline{r}(t) = 2\cos t\,\underline{i} + 3\sin t\,\underline{j} \quad (33)$$

$$\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\,\underline{k} \quad (34)$$

$$\underline{r}(t) = \frac{4}{5}\cos t\,\underline{i} + (1 - \sin t)\,\underline{j} - \frac{3}{5}\cos t\,\underline{k} \quad (35)$$

$$\underline{r}(t) = (1 - 2t)\,\underline{i} + (3 + 4t)\,\underline{j} + (2 - 3t)\,\underline{k} \quad (36)$$

$$\underline{r}(t) = e^{t}\cos t\,\underline{i} + e^{t}\sin t\,\underline{j} + e^{t}\,\underline{k} \quad (37)$$

$$\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + t^2\,\underline{j} + \frac{2}{3}t^3\,\underline{k} \quad (38)$$

(39) $\underline{r}(t) = t\,\underline{i} + \frac{1}{2}t^2\,\underline{j} + \frac{1}{3}t^3\,\underline{k}$

(40) اثبت أن الانحناء لمنحن ذي معادلة قطبية $r = f(\theta)$ هو

$$K = \frac{\left|[f(\theta)]^2 + 2[f'(\theta)]^2 - f(\theta)f''(\theta)\right|}{([f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2)^{3/2}}$$

(41) احسب الانحناء للحلزون اللوغرتمي $r = e^{a\theta}$.

(42) احسب الانحناء لحلزون ارخميدس $r = a\theta$.

(43) احسب الانحناء للمنحني القلبي $r = a(1 - \cos\theta)$ بدلالة r .

للتمارين (44) - (49) اكتب المعادلات المَعْلمية لهذه المنحنيات حسب التوجهات المفروضة

(44) دائرة في المستوى $x = 2$ ، مركزها $(2, -2, 1)$ ، نصف قطرها 3 ذات توجه مع عقارب الساعة .

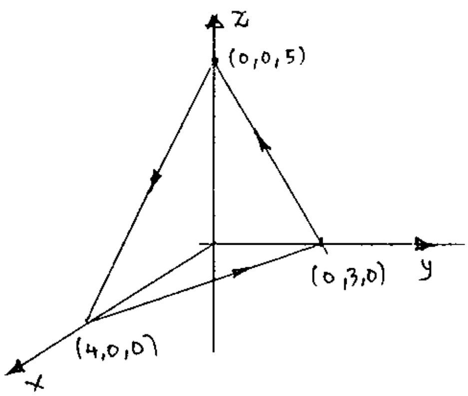
(45) دائرة في المستوى $x = -2$ ، مركزها $(-2, -2, -1)$ ، نصف قطرها 3 ، ذات توجه مع عقارب الساعة .

(46) نصف دائرة في مستوى yz ، تبدأ في $(0, 0, 5)$ ، وتمر في $(0, -5, 0)$ ، وتنتهي في $(0, 0, -5)$.

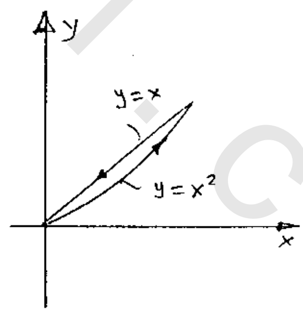
(47) ربع الدائرة في الربع الاول في مستوى xy ، ومن $(1, 0, 0)$ الى $(0, 1, 0)$ وقطع المستقيمين من محور y ومحور x اللذين يغلقان هذا المنحني .

(48) المنحني في الشكل (12.24) .

(49) المنحني في الشكل (12.25) .



الشكل (12.25)



الشكل (12.24)

(50) اثبت أن المنحنيين $\underline{r}_1(t) = t\,\underline{i} + 2t\,\underline{j} + t^2\,\underline{k}$

$\underline{r}_2(t) = t^2\,\underline{i} + (1-t)\,\underline{j} + (2-t^2)\,\underline{k}$

يتقاطعان في $(1 , 2 , 1)$ ، وان متجهي المماسين لهما في النقطة $(1,2,1)$ متعامدان .

(51) اثبت أن المنحنيين $\underline{r}_1(t) = (\frac{1}{2}t^2 + t)\,\underline{i} + (t+1)\,\underline{j} - t\,\underline{k}$

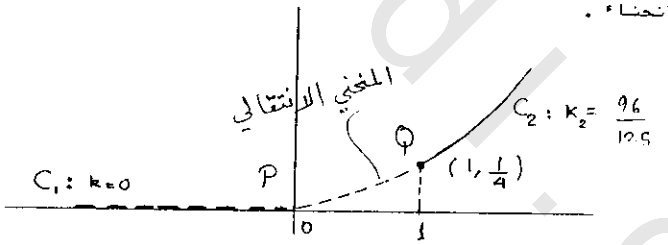
$\underline{r}_2(t) = \sin t\,\underline{i} + e^t\,\underline{j} - \tan t\,\underline{k}$

يتقاطعان في $(0 , 1 , 0)$ ، وان متجهي المماسين لهما في النقطة $(0,1,0)$ متوازيان .

(52) جد اين يكون منحني $y = e^x$ له اكبر انحناء ؟

(53) جد جميع النقاط على القطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 36$ حيث الانحناء ذو قيمة عظمى ، وذو قيمة صغرى .

(54) (المنحنيات الانتقالية) يتجنب المهندسون تغييرات مفاجئة في الخط الحديدي الذي يسير عليه القطار ، وللربط بين جزء مستقيم من الخط وجـزء منحن ، يصلون بينهما بمنحن انتقالي يكون انحناؤه صفرا عند التقائـه بالمستقيم (النقطة P في الشكل (12.26)) ، وله الانحناء مثل انحناء الجـزء الاخر (النقطة Q) . جد منحنيا معادلته $y = ax^n \ , \ x \in [0 , 1]$ يصل القوسين C_1 ، C_2 في الشكل (12.26) دون ان يكون هناك انفصـال في الانحناء .



الشكل (12.26)

(56) سيارة تسير في طريق دائري نصف قطره 729 قدما . في لحظة ما كانت سرعة السيارة 81 قدما / ثانية . ثم يضغط السائق الكوابح لتصير السرعة صفرا في خلال 9 ثوان بتسارع ثابت . احسب المركبتين المماسية والناظمية للتسارع .

(56) (أ) اثبت ان $\frac{d\underline{B}}{ds}$ يوازي $\underline{N}$ ، لذلك يوجد عدد قياسي τ يحقق

$$\frac{d\underline{B}}{ds} = \tau \underline{N}$$

(ارشاد : $\underline{B}$ متجه وحدة ، لذلك $\underline{B} \perp d\underline{B}/ds$. اثبت ان $\underline{T} \perp d\underline{B}/ds$

بالاشتقاق $\left(\frac{d\underline{B}}{ds} = \frac{d}{ds}(\underline{T} \times \underline{N}) \right)$

(ب) اثبت ان $\frac{d\underline{N}}{ds} = -\kappa \underline{T} - \tau \underline{B}$. لاحظ ان $\underline{B} \times \underline{T} = \underline{N}$, $\underline{N} \times \underline{B} = \underline{T}$

(جـ) نسمي العدد τ التواء المنحني . ما هو المعنى الهندسي للعدد τ .

والمعادلات $\frac{d\underline{T}}{ds} = \kappa \underline{N}$, $\frac{d\underline{N}}{ds} = -\kappa \underline{T} - \tau \underline{B}$, $\frac{d\underline{B}}{ds} = \tau \underline{N}$

قدمهما الفرنسي فردريك فرينيه (1816 - 1900) ، واكتشفها مستقلا عنه مواطنه الفرد سيريه (1819 - 1885) .

مسرد المصطلحات :

اقترانات متجهة	Vector - valued functions	كُويْــري	Cycloid
تسارع مركزي	Centripital acceleration	مُمَاس	Tangent
ساتل	Artificial Satellite	ناظم	Normal
مركبة ناظمية	Normal Component	توجه	Orientation
ممهد اجزاء	Piecewise Smooth	انحناء	Curvature
نصف قطر الانحناء	Radius of Curvature	فرينيه - سيريه	Frenit - Serret
مركز الانحناء	Center of Curvature	المستوى الناظم	Normal Plane
المستوى المقوّم	Rectifying Plane	نظام اصيل	Intrinsic System
لولب دائري	Circular helix	مستوى اللثام	Osculating Plane
متجه شعاعي	Radial vector	مركبة	Component
منحني فضائي	Space Curve	ازاحة	Displacement
معلمة	Parametrization	مغلق	Closed
مكعب ملتو	Twisted Cubic	مَعْلَم	Parameter
منحني انتقالي	Transitional	مُمهد	Smooth
		التواء	Torsion