الباب الحادي عشر

المتجهات

نحتاج في كثير من المجالات التي نطبق فيها الرياضيات (كالفيزياء والهندسة وغيرها) الى دراسة اشياء تعتمد في تحديدها على كم واتجاه . نضرب أمثلة على ذلك بالسرعة ، والتسارع ، والقوة ، الخ .... في هذا الباب سندرس المتجهات التي نستخدمها لتدل على هذه الاشياء التي تملك كما واتجاها .

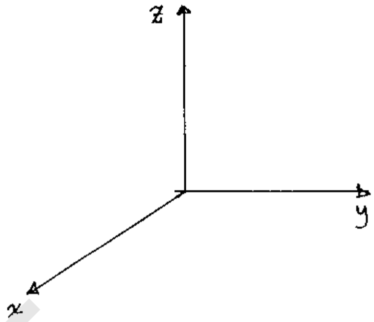
سنعتمد في هذا الباب الاسلوب الجبري لتقديم المتجهات وفي الوقت نفسه نعطي تفسيرا هندسيا له وللعمليات التي نعرفها عليه ، ما أمكن ذلك ، ولكن سنبدأ بتقديم انظمة احداثية في الفضاء .

(11.1) انظمة احداثيه في الفضاء الثلاثي R^3

حتى نستطيع أن نعين النقاط في الفضاء R^3 ذي الابعاد الثلاثة (نسميه من الآن وصاعدا الفضاء الثلاثي) فاننا نحتاج الى الرجوع الى نظام احداثي في R^3 . في هذا البند سنقدم ثلاثة انظمة من هذا القبيل ، اولها هو مانسميه النظام الاحداثي الديكارتي (أو النظام الاحداثي المتعامد) في الفضاء الثلاثي . اضافة الى هذا النظام الأكثر استعمالا سندرس ايضا نظامين احداثيين اخرين سنحتاج لهما اثناء دراستنا للاقترانات بعدة متغيرات .

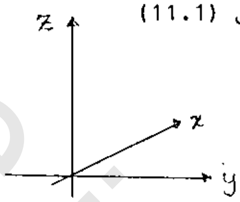
(أ) النظام الاحداثي المتعامد في الفضاء الثلاثي R^3 (النظام الاحداثي الديكارتي)

ان النظام الاحداثي المتعامد في الفضاء الثلاثي R^3 سيكون مرجعا لتعيين نقاط هذا الفضاء التي هي عبارة عن ثلاثيات مرتبة (a , b , c) من الاعداد الحقيقية . لذا سنفرض في هذا النظام ثلاثة مستقيمات متعامدة فيما بينها (أي أن كل اثنين منها متعامدان) وتلتقي ثلاثتها في نقطة مشتركة هي نقطة الأصل . تعرف هذه المستقيمات المتعامدة باسم المحاور الاحداثية وتمثل محور x ومحور y ومحور z . عندما نرسم هذه المحاور كما في شكل (11.1) نتصور أن محور y ومحور z يقعان في مستوى صفحة الكتاب بينما محور x يخرج عموديا على هذا المستوى في اتجاهنا . وفي هذا الوضع نسميه نظام اليد اليمنى ، ذلك انك اذا جعلت اصبع السبابة في اليد اليمنى يشير الى



شكل (11.1)

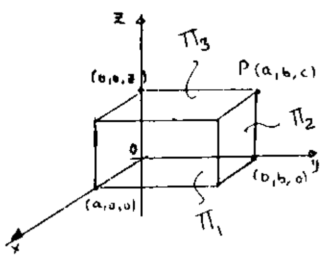
الاتجاه الموجب لمحور x والاصبع الوسطى يشير الى الاتجاه الموجب لمحور y فان ابهام اليد اليمنى سيشير الى الاتجاه الموجب لمحور z . أما اذا اعدنا رسم النظام الاحداثي وبدلنا مكاني محور x ومحور y فنحصل على نظام اليد اليسرى (انظر شكل (11.2)) .



شكل (11.2)

ان المحاور الثلاثة في هذا النظام تحدد بدورها ثلاثة مستويات احداثية . فالمستوى الذي يقع فيه محورا x ، y هو مستوى xy ، والمستوى الذي يقع فيه محورا y ، z هو مستوى yz ، واخيرا مستوى xz هو المستوى الذي يحوي محوري x ، z . هذه المستويات الاحداثية تقسم الفضاء R^3 الى ثمانية اقسام يعرف كل واحد منها بالثمن ، والثمن الاول هو ذلك الجزء من الفضاء R^3 الذي يضم النقاط التي جميع احداثياتها موجبة ، ولا توجد قاعدة متفق عليها لترتيب الأثمان السبعة الباقية .

افرض (a , b , c) عنصرا في الفضاء الثلاثي R^3 . بالرجوع الى النظام الاحداثي الديكارتي ، نضع على محور x (الذي نعتبره خطا حقيقيا) النقطة التي تقابل العدد a ونرسم المستوى Π_1 الذي يمر بهذه النقطة عموديا على محور x (اي موازيا للمستوى الاحداثي yz) ، ونضع على محور y النقطة التي تقابل العدد b ونرسم المستوى Π_2 الذي يمر بهذه النقطة عموديا على محور y (اي أنه يوازي مستوى xz) . اخيرا نضع على محور z النقطة التي تقابل العدد c ونرسم المستوى Π_3 الذي يمر بها عموديا على محور z (أي موازيا للمستوى xy) . تلتقي المستويات الثلاثة Π_1 ، Π_2 ، Π_3 في نقطة واحدة P تكون احداثياتها a ، b ، c ونكتبها P(a , b , c) ، انظر الشكل (11.3) .



شكل (11.3)

بالاتجاه الآخر ، اذا بدأنا بالنقطة P ورسمنا المستويات التي تمر بها وتعامد المحاور الاحداثية الثلاثة فنحصل على الاحداثيات a ، b ، c للنقطة P ، أي الثلاثي المرتب(a , b , c) الذي يمثل النقطة P .

مبرهنة (11.1) (المسافة بين نقطتين في R^3)

ان المسافة d(P , Q) بين النقطتين $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ هي:

$$d(P , Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad ....(1)$$

البرهان : تظهر النقطتان P , Q في الشكل (11.4) ، نرسم متوازي السطوح الذي تكون P , Q رأسين متقابلين فيه كما هو مبين في الشكل (11.4) .

بما أن المثلث PQS قائم الزاوية فان :

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{SQ}^2$$

كذلك في المثلث القائم الزاوية PRS نجد أن

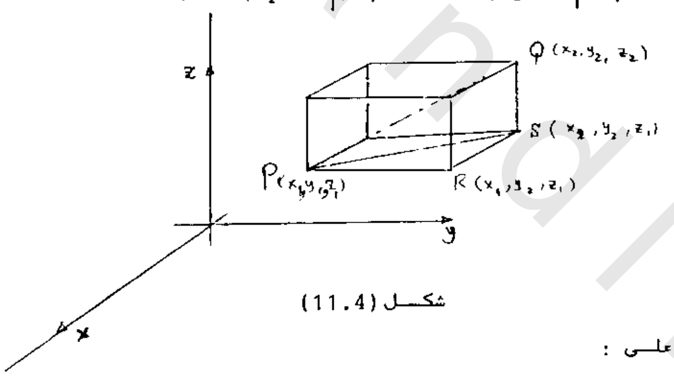
$$\overline{PS}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2$$

أي أن

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SQ}^2$$

ومن الشكل (11.4) نرى بسهولة أن :

$$\overline{SQ}^2 = (z_2 - z_1)^2 , \ \overline{RS}^2 = (x_2 - x_1)^2 , \ \overline{PR}^2 = (y_2 - y_1)^2$$



شكل (11.4)

وبذلك نحصل على :

$$\overline{PQ}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

أي أن :

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثل (11.1) احسب المسافة بين النقطتين P(4,-5,3) , Q(6,-2,-3) .

الحل : نستخدم القانون (1) لنجد أن :

$$d(P,Q)=\sqrt{(4-6)^2+[(-5)-(-2)]^2+[3-(-3)]^2}$$
$$=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$$

مثل (11.2) أي النقاط $P(-3,0,2)$, $Q(2,1,3)$, $R(-1,3,1)$ اقرب الى نقطة الاصل $O(0,0,0)$.

الحل : عندما نحسب الابعاد الثلاثة :

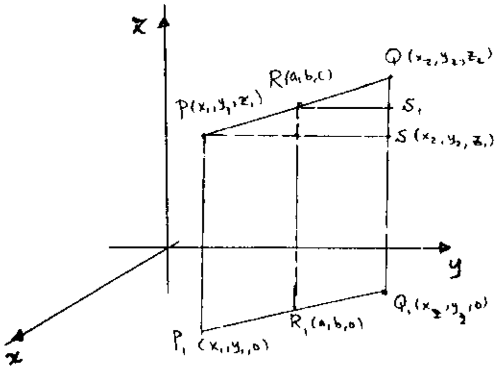
$$d(P,O)=\sqrt{(-3-0)^2+(0-0)^2+(2-0)^2}$$
$$=\sqrt{9+0+4}=\sqrt{13}$$
$$d(Q,O)=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(3-0)^2}$$
$$=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$$
$$d(R,O)=\sqrt{(-1-0)^2+(3-0)^2+(1-0)^2}$$
$$=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$$

نجد أن النقطة R هى الأقرب الى نقطة الأصل O .

مبرهنة (11.2) (قاعدة نقطة المنتصف)

افرض النقطتين $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$. ان نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ هي النقطة $R(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$.

البرهان : افرض نقطة المنتصف هي $R(a,b,c)$. في الشكل (11.5) اخذنا النقاط $P_1(x_1,y_1,0)$, $Q_1(x_2,y_2,0)$, $R_1(a,b,0)$ التي هي مساقط P , Q , R على التوالي في المستوى xy.



شكل (11.5)

بما أن R_1 هي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{P_1Q_1}$ في مستوى xy فهي النقطة $R_1(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},0)$. ولكن R تشارك النقطة R_1 احداثيها x وكذلك احداثيها y ، لذلك $a=\frac{x_1+x_2}{2}$ ، $b=\frac{y_1+y_2}{2}$. من جهة ثانية النقطة S_1 منتصف القطعة العمودية SQ ولذلك احداثيها z يساوي $\frac{z_1+z_2}{2}$ وهو نفس الاحداثي z للنقطة R ، أي أن $c=\frac{z_1+z_2}{2}$. حصلنا بذلك على النقطة $R(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$.

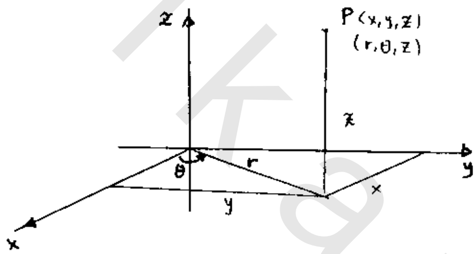
مثل (11.3) افرض $P(2,4,-5)$, $Q(4,-2,3)$. جد نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$.

الحل : اذا $R(x_0 , y_0 , z_0)$ هي نقطة منتصف القطعة $\overline{PQ}$ فان :

$x_0 = \frac{2+4}{2} = 3$, $y_0 = \frac{4+(-2)}{2} = 1$, $z_0 = \frac{3+(-5)}{2} = -1$ اي أن $R(3 , 1 , -1)$.

(ب) النظام الاحداثي الاسطواني :

نستفيد من نظام الاحداثيات القطبية في المستوى لتعريف نظام احداثي جديد في الفضاء الثلاثي R^3 . فاذا كانت النقطة $P(x,y,z)$ معطاة في النظام الاحداثي الديكارتي في الفضاء R^3 فاننا نعرف احداثياتها الاسطوانية بالثلاثي المرتب (r , θ , z) ، وهنا r , θ الاحداثيان القطبيان للنقطة P_1 (انظر شكل (11.6)) التي هي مسقط P على المستوى xy ، حيث $r \geq 0$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$. وتحتفظ P بالاحداثي الثالث z في كلا النظامين.



شكل (11.6)

والعلاقة بين الاحداثيات الديكارتية (x , y , z) والاحداثيات الاسطوانية (r , θ , z) للنقطة P في R^3 هي :

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ , \ z = z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

ونحصل من هذه القوانين على :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \ \tan\theta = \frac{y}{x} \ (\text{عندما } x \neq 0) \ , \ z = z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

مثل (11.4) افرض $P(5 , \frac{\pi}{2} , 3)$ بالاحداثيات الاسطوانية ، جد احداثيات P الديكارتية .

الحل : هنا $r = 5$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $z = 3$. باستخدام القانون (2) نجد أن :

$$x = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$y = r\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{2} = 5$$

$$z = 3$$

فهي النقطة $P(0 , 5 , 3)$ في النظام الديكارتي .

مثل (11.5) افرض $P(1,1,-2\sqrt{2})$ بالاحداثيات الديكارتية ، جد احداثيات P الاسطوانية .

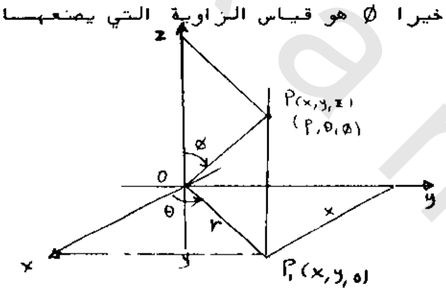
الحـل : هنا نلجأ الى القوانين (3) حيث $x = 1$, $y = 1$, $z = -2\sqrt{2}$ ، نجد أن :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$
$$z = -2\sqrt{2}$$

فهي النقطة $P\left(2 , \frac{\pi}{4} , -2\sqrt{2}\right)$ في النظام الاحداثي الاسطواني .

(جـ) النظام الاحداثي الكروي :

هذا نظام احداثي ثالث نستخدمه لتعيين نقاط الفضاء الثلاثي R^3 . فاذا $P(x , y , z)$ تختلف عن نقطة الاصل ومعطاة بدلالة النظام الاحداثي الديكارتي ، فان احداثيات P الكروية يعطيها الثلاثي المرتب (ρ , θ , ϕ) . وهنا ρ طول القطعة المستقيمة $\overline{OP}$ ، θ الاحداثي القطبي الثاني للنقطة $P_1(x,y,0)$ التي هي مسقط P في المستوى xy (انظر شكل (11.7)) . واخيرا ϕ هو قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم المار بالنقطتين P , O مع الاتجاه الموجب لمحور z . نقيد قيم هذه الاحداثيات بالمتباينات التالية : $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.
أما نقطة الاصل فتكون احداثياتها الكروية عبارة عن أي ثلاثي مرتب $(0,\theta,\phi)$.



شكل (11.7)

نستطيع أن نحصل على الاحداثيات الديكارتية (x , y , z) لنقطة P في R^3 من احداثياتها الكروية بواسطة القوانين التالية التي تتبع بسهولة من شكل(11.7) :

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi \;,\; y = \rho\sin\theta\sin\phi \;,\; z = \rho\cos\phi \quad \ldots\ldots (4)$$

بينما تعطينا القوانين التالية الاحداثيات الكروية لنقطة P من احداثياتها الديكارتية (x , y , z) :

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \;,\; \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\ (x \neq 0) \;,\; \phi = \cos^{-1}\frac{z}{\rho}\ (\rho \neq 0) \quad \ldots\ldots (5)$$

واخيرا ، القوانين التالية تربط الاحداثيات الاسطوانية لنقطة P مع احداثياتها الكرويـة :

$$z = \rho \cos \phi \ , \ \theta = \theta \ , \ r = \rho \sin \phi \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

مثل(11.6) اكتب المعادلة $x^2+y^2+z^2=4z$ باستخدام الاحداثيات الكروية .

الحــل : عندما نكتب المعادلة بالصيغة $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ بعد اكمال المربع $z^2 - 4z$ ، نلاحظ مباشرة أن رسم المعادلة سطح كرة مركزها $C(0 , 0 , 2)$ ونصف قطرها يساوي 2 . وباستخدام القوانين (4) نجد أن المعادلة تأخذ الصيغة :

$$\rho^2 = 4\rho \cos \phi$$

أي أن :

$$\rho(\rho - 4\cos\phi) = 0$$

لكن $\rho \neq 0$ لكل نقطة على الكرة ، لذلك نحصل على المعادلة :

$$\rho = 4 \cos \phi$$

بالاحداثيات الكروية .

مثل(11.7) اكتب المعادلة $\rho = 2\sec\phi$ بالاحداثيات الديكارتية ، ما هو رسمها ؟

الحــل : نكتب

$$\rho = 2\sec\phi = \frac{2}{\cos\phi}$$

فنحصل على المعادلة

$$\rho\cos\phi = 2$$

أي أن :

$$z = 2$$

ورسم هذه المعادلة مجموعة كل النقاط (x , y , z) في R^3 حيث $z = 2$ ، فهو عبارة عن المستوى الذي يوازي المستوى xy ويقطع محور z في النقطة $(0 , 0 , 2)$.

تمارين(1.1)

في التمارين من 1 - 4 جد البعد بين النقطتين P , Q :

(1) $P(0,0,0)$, $Q(12,-15,16)$ (2) $P(0,1,0)$, $Q(-4,3,4)$

(3) $P(1,1,5)$, $Q(10,3,-1)$ (4) $P(1,-1,1)$, $Q(-1,1,-1)$

في التمارين من 5 - 8 جد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$:

(5) $P(1,-7,0)$, $Q(-9,11,2)$ (6) $P(-4,9,2)$, $Q(6,3,8)$

(7) $P(-1,3,-5)$, $Q(2,-4,6)$ (8) $P(-5,10,-20)$, $Q(5,-10,20)$

(9) اكتب بالاحداثيات الديكارتية معادلة الكرة التي مركزها $C(-1,1,-1)$ ونصف قطرها 5 .

(10) اضلاع متوازي سطوح توازي المحاور الاحداثية وله رأسان متقابلان

$V_1(2,1,-1)$, $V_2(-1,3,1)$. جد رؤوسه الستة الأخرى ثم ارسمه .

(11) جد النقطة P على محور y التي بعدها عن النقطة $Q(1,-3,7)$ يساوي بعدها عن النقطة $R(5,7,-5)$.

(12) اثبت أن النقاط الثلاث $P(3,-1,6)$, $Q(-1,7,-2)$, $R(1,-3,2)$ تؤلف رؤوس مثلث قائم الزاوية . ما هو الوتر في هذا المثلث ؟

في التمارين من 13 - 18 اكتب الاحداثيات الاسطوانية للنقاط المعطاة باحداثياتها الديكارتية :

(13) $(2\sqrt{2}\,,\,2\,,\,-2)$ (14) $(\sqrt{2}\,,\,-\sqrt{2}\,,\,1)$ (15) $(1\,,\,0\,,\,0)$

(16) $(-1\,,\,1\,,\,4)$ (17) $(2\,,\,2\sqrt{3}\,,\,-5)$ (18) $(1\,,\,1\,,\,2)$

في التمارين من 19 - 24 اكتب الاحداثيات الكروية للنقاط المعطاة باحداثياتها الديكارتية :

(19) $(1\,,\,1\,,\,0)$ (20) $(1\,,\,1\,,\,\sqrt{2})$ (21) $(1\,,\,-1\,,\,\sqrt{2})$

(22) $(-\sqrt{3}\,,\,-1\,,\,2)$ (23) $(2\,,\,\sqrt{3}\,,\,4)$ (24) $(1\,,\,\sqrt{3}\,,\,0)$

في التمارين من 25 - 29 اكتب النقاط المعطاة بأحد النظم الاحداثية بدلالة النظامين الآخرين :

(25) $(4\,,\,\frac{\pi}{4}\,,\,\frac{\pi}{4})$ في النظام الكروي (26) $(4\,,\,\frac{2\pi}{3}\,,\,\frac{\pi}{3})$ في النظام الكروي

(27) $(1\,,\,0\,,\,-3)$ في النظام الاسطواني (28) $(3\,,\,\frac{3\pi}{4}\,,\,2)$ في النظام الاسطواني

(29) $(10\,,\,\frac{5\pi}{3}\,,\,-3)$ في النظام الاسطواني

في التمارين من 30 - 32 اثبت أن رسم المعادلة هو كرة ثم جد مركزها ونصف قطرها ، واكتب معادلتها بالاحداثيات الاسطوانية وكذلك بالاحداثيات الكروية :

(30) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$ (31) $2x^2+2y^2+2z^2-3y-4z=0$

(32) $x^2+y^2+z^2-10y-16z+80=0$

في التمارين من 33 - 44 تعرف على رسم المعادلة أو المتباينة في الفضاء الثلاثي R^3 :

(33) $xy=0$ (34) $xyz=0$ (35) $\phi=\frac{\pi}{6}$

(36) $r=4\cos\theta$ (37) $\rho=4\cos\phi$ (38) $x^2+y^2+z^2>1$

(39) $\rho^2-3\rho+2=0$ (40) $1<y^2+z^2<4$ (41) $\phi=0$

(42) $z^2-y^2=0$ (43) $y^2-8x=0$ (44) $r^2=\cos 2\theta$

(11.2) المتجهـــات :

نبدأ هذا البند بتقديم التعريف الجبري للمتجهات في الفضاء R^3 ثم نبيـــن أن تعديلا مناسبا فيه يزودنا بتعريف المتجهات في المستوى R^2 ، ويرافـق هــذه المعلومات التي نعطيها عن المتجهات تفسير هندسي لها في الفضاء R^3 .

تعريف (11.3)

(أ) الفضاء المتجهي V_3 يتالف من المجموعة $\{(a , b , c) : a , b , c \in R\}$ وتخضـع عناصرها للعمليتين التاليتين :

(1) جمع المتجهات : فاذا (a_1 , b_1 , c_1) , (a_2 , b_2 , c_2) عنصران في هـذه المجموعة فاننا نعرف مجموعهما المتجهي كما يلي :

$$(a_1 , b_1 , c_1) + (a_2 , b_2 , c_2) = (a_1 + a_2 , b_1 + b_2 , c_1 + c_2)$$

(2) ضرب متجه بقياسي (عدد) : اذا (a , b , c) عنصر في V_3 , α قياســي (أي عدد حقيقي) فنعرف ضربهما على انه :

$$\alpha (a , b , c) = (\alpha a , \alpha b , \alpha c)$$

(ب) نسمي كل عنصر في الفضاء المتجهي V_3 متجها ثلاثيا (أو ببساطه متجها ، اذا لم يكن هنالك مجال للالتباس) .

اذا (a , b , c) متجه ، نسمي الأعداد c , b , a مركبات هذا المتجــه . ونعتمد في كتابة متجه الاسلوب $\underline{u} = (a , b , c)$ باستخدام أحد الاحرف w , v , u مع خط اسفله ، والمتجه صفر هو المتجه $\underline{0} = (0 , 0 , 0)$ الذي جميع مركباته اصفار .

افرض $\underline{u} = (a_1 , b_1 , c_1)$, $\underline{v} = (a_2 , b_2 , c_2)$. نكتب $\underline{u} = \underline{v}$ عندما تتساوى مركباتهما المتناظرة ، أي عندما $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. كما أننا نكتـب $-\underline{u}$ ليعني $(-1)\underline{u}$. فاذا $\underline{u} = (a_1 , b_1 , c_1)$, $\underline{v} = (a_2 , b_2 , c_2)$ فاننا نعرف عمليــة طرح $\underline{u}$, $\underline{v}$ بانه :

$$\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v}) = (a_1 - a_2 , b_1 - b_2 , c_1 - c_2) \quad .... \quad (5)$$

في التعريف (11.3)، اذا أخذنا مجموعة كل الأزواج المرتبة (a , b) بــدل مجموعة الثلاثيات المرتبة واخضعنا عناصرها للعمليتين الجبريتين (1) - (2) فاننا نحصل على تعريف الفضاء المتجهي V_2 ونسمي أي عنصر فيه متجها ثنائيا (أو ببساطة متجها) .

افرض أن $(a\ ,\ b)\in V_2$. نستطيع ان نطابق المتجه الثنائي $(a\ ,\ b)$ مع المتجه الثلاثي $(a\ ,\ b\ ,\ 0)$ لكي نتمكن بهذا الاسلوب أن نعامل (عندما يكون ذلك مناسبا) الفضاء V_2 كفضاء جزئي من الفضاء V_3 .

فيما تبقى من هذا الباب نقوم بدراسة المتجهات الثلاثية فقط على اساس أن جميع المعلومات التي نذكرها تسري على المتجهات الثنائية ايضا الا في تلك الحالات التي يرد فيها نفي صريح لذلك .

مثل(11.8) افرض $\underline{u} = (-2,6,1)$, $\underline{v} = (3,-3,-1)$ ، جد $\underline{u} + \underline{v}$ وكذلك $3\underline{u}$.

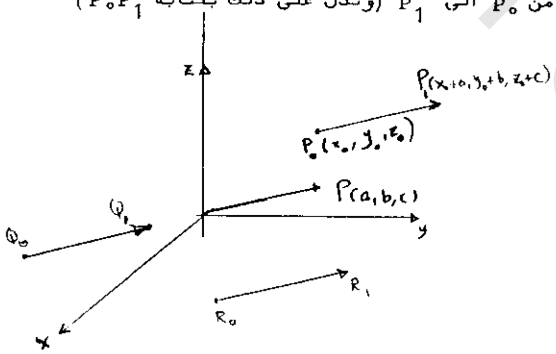
الحل : اولا ، متجه الجمع $\underline{u} + \underline{v}$ هو :

$$\begin{aligned} \underline{u} + \underline{v} &= (-2,6,1) + (3,-3,-1) \\ &= (-2+3\ ,\ 6-3\ ,\ 1-1) \\ &= (1\ ,\ 3\ ,\ 0) \end{aligned}$$

أما المتجه $3\underline{u}$ فهو :

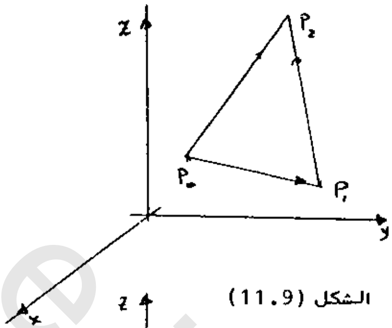
$$\begin{aligned} 3\underline{u} &= 3(-2,6,1) = (3 \times -2\ ,\ 3 \times 6\ ,\ 3 \times 1) \\ &= (-6,18,3) \end{aligned}$$

نعبر هندسيا عن المتجه $\underline{u} = (a\ ,\ b\ ,\ c)$ في الفضاء R^3 بأن نختار نقطة ما $P_0(x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ ثم نعين النقطة $P_1(x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$ (انظر الشكل(11.8)) ونعتبر القطعة المستقيمة التي تتجه من P_0 الى P_1 (وندل على ذلك بكتابة $\overrightarrow{P_0P_1}$) ممثلا هندسيا للمتجه $\underline{u}$. ان القطع المستقيمة المتجهة $\overrightarrow{P_0P_1}$ ، $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ ، $\overrightarrow{R_0R_1}$ في الشكل (11.8) لها جميعها الطول نفسه ، والاتجاه نفسه . ولذلك نعتبر كل واحدة منها ممثلا هندسيا للمتجه $\underline{u} = (a\ ,\ b\ ,\ c)$. ونميز من بين القطع المستقيمة المتجهة التي كل واحدة منها ممثلا هندسيا للمتجه $\underline{u}$ ، تلك القطعة التي تبدأ بنقطة الأصل $O(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$ وتنتهي بالنقطة $P(a\ ,\ b\ ,\ c)$. فنطلق على القطعة المستقيمة المتجهة $\overrightarrow{OP}$ اسم <u>متجه الموضع</u> للمتجه $\underline{u} = (a\ ,\ b\ ,\ c)$. هندسيا ، تتم عملية



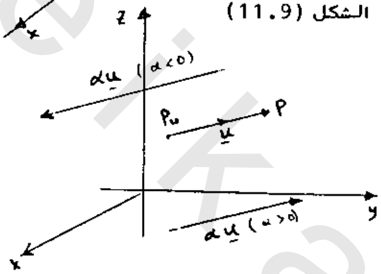
الشكل (11.8)

جمع المتجهين $\underline{u} = (a_1 , b_1 , c_1)$ ، $\underline{v} = (a_2 , b_2 , c_2)$ بأن نرسم اولا الممثل الهندسي $\overrightarrow{P_0P_1}$ للمتجه $\underline{u}$ (شكل (11.9)) ومن نهايته P_1 نبدأ الممثل الهندسي $\overrightarrow{P_1P_2}$ للمتجه $\underline{v}$ ، فتكون القطعة المتجه $\overrightarrow{P_0P_2}$ ممثلة هندسيا لمتجه المجموع $\underline{u} + \underline{v}$.



الشكل (11.9)

افرض $\overrightarrow{P_0P_1}$ ممثلا هندسيا للمتجه $\underline{u}$ ، اذا α قياسي يختلف عن الصفر فاننا نستطيع ان نمثل المتجه $\alpha\underline{u}$ هندسيا بقطعة مستقيمة متجهة طولها يساوي حاصل ضرب α في طول $\overrightarrow{P_0P_1}$ ، ولها نفس اتجاه $\overrightarrow{P_0P_1}$ اذا $\alpha > 0$ وعكس اتجاه $\overrightarrow{P_0P_1}$ عندما $\alpha < 0$ ، انظر الشكل (11.10) .



الشكل (11.10)

مثل (11.9) افرض $\underline{u} = (1 , 2 , -3)$ ، $\underline{v} = (-4 , 0 , 1)$ ، جد $\underline{u} - 2\underline{v}$.

الحل : نجد أولا :

$$-2\underline{v} = -2(-4 , 0 , 1) = (8 , 0 , -2)$$

ثم نطرح لنحصل على :

$$\underline{u} - 2\underline{v} = \underline{u} + (-2\underline{v}) = (1 , 2 , -3) + (8 , 0 , -2)$$
$$= (9 , 2 , -5)$$

مثل (11.10) افرض $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ، $P_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطتين في الفضاء R^3 ، جد المتجه $\underline{u}$ الذي يمثله $\overrightarrow{P_0P_1}$ هندسيا .

الحل : افرض $\underline{u} = (a,b,c)$ ، بما أن $\overrightarrow{P_0P_1}$ ممثل هندسي للمتجه $\underline{u}$ فان :

$$(x_1,y_1,z_1) = (x_0 + a , y_0 + b , z_0 + c)$$

هذا يعني أن :

$$x_1 = x_0 + a$$
$$y_1 = y_0 + b$$
$$z_1 = z_0 + c$$

ونحصل على : $a = x_1 - x_0$ ، $b = y_1 - y_0$ ، $c = z_1 - z_0$. وبذلك يكون

$\underline{u} = (x_1 - x_0 , y_1 - y_0 , z_1 - z_0)$.

تعريف (11.4) افرض $\underline{u} = (a,b,c)$. نعرف مقياس $\underline{u}$ (ونكتبه $\|\underline{u}\|$) بأنه :

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

اذا $\overrightarrow{P_0P_1}$ ممثل هندسي للمتجه $\underline{u}$ الذي يختلف عن متجه الصفر ، فان المقياس $\|\underline{u}\|$ يساوي البعد بين النقطتين P_0 , P_1 . اذا $\|\underline{u}\| = 0$ فان $\underline{u}$ متجه الصفر ، والعكس ايضا صحيح . نقول أن $\underline{u}$ متجه وحدة اذا $\|\underline{u}\| = 1$.

افرض المتجه $\underline{u} = (a,b,c)$ والقياسي α ، نحصل بسهولة على المساواة :

$$\|\alpha \underline{u}\| = |\alpha| \, \|\underline{u}\| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

مثل (11.11) افرض $\underline{u} = (-2, 2\sqrt{3}, 0)$ ، $\alpha = -2$ ، جد $\|\underline{u}\|$ ، $\|\alpha \underline{u}\|$.

الحل : من تعريف مقياس $\underline{u}$ نرى أن :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}\| &= \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{4 + 12 + 0} \\ &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

وعندما نستخدم القانون (6) نحصل على :

$$\begin{aligned} \|\alpha \underline{u}\| &= |\alpha| \, \|\underline{u}\| = |-2| \, (4) \\ &= 8 \end{aligned}$$

تعريف (11.5) افرض $\underline{u}$, $\underline{v}$ متجهين يختلفان عن متجه الصفر . نقول ان $\underline{u}$, $\underline{v}$ متوازيان اذا وجدنا قياسيا α بحيث $\underline{u} = \alpha \underline{v}$. في هذه الحالة يكون $\underline{u}$, $\underline{v}$ لهما الاتجاه نفسه اذا $\alpha > 0$ ، ويتعاكسان بالاتجاه عندما $\alpha < 0$ ، نعتبر متجه الصفر $\underline{0}$ موازيا لكل متجه $\underline{u}$.

مثل (11.12) أثبت أن المتجهين $\underline{u} = (2,-3,1)$, $v = (-4,6,-2)$ متوازيان متعاكسان بالاتجاه .

الحل : يمكننا أن نكتب :

$$\underline{v} = (-4 , 6 , -2) = -2(2 , -3 , 1)$$

أي أن $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ حيث $\alpha = -2$ ، لذلك $\underline{u}$, $\underline{v}$ متوازيان وبما أن $\alpha = -2 < 0$ لذلك $\underline{u}$, $\underline{v}$ متعاكسان بالاتجاه .

افرض $\underline{u} \neq \underline{0}$. ان المتجه $\frac{1}{\|u\|}\underline{u}$ (لاحظ أن $\|u\| \neq 0$) قياسه يساوي 1 .

يوازي $\underline{u}$ وله اتجاهه . في الواقع من قانون (6) نجد أن :

$$\left\| \frac{1}{\|\underline{u}\|}\, \underline{u} \right\| = \left| \frac{1}{\|\underline{u}\|} \right| \, \|\underline{u}\| = \frac{1}{\|\underline{u}\|}\, \|u\| = 1$$

مع ملاحظة أن $0 < \frac{1}{\|\underline{u}\|} = \alpha$. من الآن فصاعدا سنكتب $U_{\underline{u}}$ ليدل على متجه الوحدة $\frac{1}{\|\underline{u}\|}\,\underline{u}$ الذي له نفس اتجاه $\underline{u}$.

<u>مثل (11.13)</u> جد متجه وحدة له اتجاه $\underline{u} = (-1,2,1)$ وآخر يعاكسه في الاتجاه .

الحـــل : نحسب مقياس $\underline{u}$ لنجد :

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

ونأخذ المتجه :

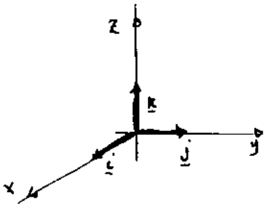
$$U_{\underline{u}} = \frac{1}{\|\underline{u}\|}\, \underline{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\, (-1 , 2 , 1)$$

الذي هو متجه وحدة له اتجاه $\underline{u}$ ، بينما $-U_{\underline{u}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\,(-1 , 2 , 1)$ متجه وحدة ايضا ولكنه يعاكس اتجاه $\underline{u}$.

للمتجهات :

$$\underline{k} = (0 , 0 , 1) \quad , \quad \underline{j} = (0 , 1 , 0) \quad , \quad \underline{i} = (1 , 0 , 0)$$

اهمية خاصة ، فكل واحد منها متجه وحدة له الاتجاه الموجب لأحد المحاور الاحداثية الثلاث ، ولذا فهي تعرف باسم متجهات الوحدة الاحداثية ، انظر الشكل (11.11) .



الشكل (11.11)

كذلك أي متجه $\underline{u} = (a , b , c)$ نستطيع أن نكتبه بالصيغة :

$$\underline{u} = (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$
$$= a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$$

وهي على شكل تجميع خطي بالمتجهات الثلاث $\underline{i}$ ، $\underline{j}$ ، $\underline{k}$.

<u>مثل (11.14)</u> افرض $\underline{u} = 2\underline{i} - 4\underline{j} + 7\underline{k}$ ، $\underline{v} = 2\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}$ ، جد $2\underline{u} + \underline{v}$.

الحـــل : اولا ،

$$2\underline{u} = 2(2\underline{i} - 4\underline{j} + 7\underline{k})$$
$$= 4\underline{i} - 8\underline{j} + 14\underline{k}$$

ولذلك فان :

$$2\underline{u} + \underline{v} = (4\underline{i} - 8\underline{j} + 14\underline{k}) + (2\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k})$$

$$= 6\underline{i} - 9\underline{j} + 17\underline{k}$$

مثل (11.15) جد متجه الوحدة الذي له اتجاه المتجه $\underline{u} = \underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k}$.

الحـــل : بما أن :

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

فنجد أن :

$$U_{\underline{u}} = \frac{1}{\|\underline{u}\|}\,\underline{u} = \frac{1}{3}(\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k})$$
$$= \frac{1}{3}\underline{i} + \frac{2}{3}\underline{j} - \frac{2}{3}\underline{k}$$

هو متجه الوحدة الذي له اتجاه $\underline{u}$.

تمارين (11.2)

(1) اثبت أن عملية جمع المتجهات تحقق كلا من الخصائص التالية :

(أ) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ (تبديليـــــة)

(ب) $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$ (تجميعيــــة)

(جـ) $\underline{u} + \underline{O} = \underline{u}$ (الحياد الجمعي)

(د) $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{O}$ (النظير الجمعي)

في التمارين من 2 – 7 جد $\underline{u} + \underline{v}$:

(2) $\underline{u} = (1,0,1)$, $\underline{v} = (0,1,1)$ (3) $\underline{u} = (3,-1,2)$, $\underline{v} = (-3,2,0)$

(4) $\underline{u} = (-4,-1,2)$, $\underline{v} = (5,3,0)$ (5) $\underline{u} = (6,-2,3)$, $\underline{v} = (1,4,1)$

(6) $\underline{u} = \underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{v} = 3\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$ (7) $\underline{u} = 4\underline{j} - 2\underline{k}$, $\underline{v} = \underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$

في التمارين من 8 – 11 جد المتجه $\underline{u}$ الذي ممثله الهندسي $\overline{P_oP_1}$:

(8) $P_o(1,-2,0)$, $P_1(1,-2,3)$ (9) $P_o(2,-1,3)$, $P_1(1,0,3)$

(10) $P_o(-1,3,2)$, $P_1(6,0,-3)$ (11) $P_o(4,4,-4)$, $P_1(-3,3,-3)$

في التمارين من 12 – 17 جد كلا من $\underline{u}$ ، $2\underline{u}$ ، $\underline{u} - \underline{v}$ ، $3\underline{u} + 4\underline{v}$:

(12) $\underline{u} = (5,-12,4)$, $\underline{v} = (-2,8,-6)$ (13) $\underline{u} = (2,-3,6)$, $\underline{v} = (1,4,1)$

(14) $\underline{u} = (3,2,-1)$, $\underline{v} = (0,6,7)$ (15) $\underline{u} = \underline{i} - \underline{j}$, $\underline{v} = \underline{j} + \underline{k}$

(16) $\underline{u} = \underline{i} + \underline{j} + k$, $\underline{v} = 2\underline{i} - \underline{j} + 3\underline{k}$ (17) $\underline{u} = 6\underline{i} + \underline{k}$, $\underline{v} = \underline{i} - 2j + 7\underline{k}$

في التمارين من 18 – 20 جد متجه وحدة له اتجاه $\underline{u}$ وآخر يعاكسه بالاتجاه :

(18) $\underline{u} = (-1\,,\,4\,,\,-3)$ (19) $\underline{u} = 2\underline{i} - 4\underline{j} + 6\underline{k}$ (20) $\underline{u} = \underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}$

(21) افرض : $\underline{u} = \underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$ ، $\underline{v} = 2\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$

$\underline{w} = 3\underline{i} - 3\underline{j} + 6\underline{k}$ ، $\underline{z} = -2\underline{i} + 2\underline{j} + 4\underline{k}$

اي هذه المتجهات متوازية ؟ لها الاتجاه نفسه ؟ تتعاكس في الاتجاه ؟

(22) افرض : $\underline{u} = 3\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$ ، $\underline{v} = \alpha\underline{i} - 4\underline{j} + 4\underline{k}$ ، جد قيمة α حتى يكون $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ متوازيين .

(23) جد المتجه الذي له اتجاه المتجه $\underline{u} = \underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ ومقياسه يساوي 2 .

(24) جد المتجهين الموازيين للمتجه $\underline{u} = 3\underline{j} + 2\underline{k}$ ومقياس كل منهما يساوي 2 .

(11.3) الضرب الداخلي (الضرب القياسي)

نعرف كيف نضرب قياسيا α مع متجه $\underline{u}$ لنحصل على المتجه $\alpha\underline{u}$. وهنالك اسلوبان لاجراء عملية ضرب متجهين $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ ، سنتعرف في هذا البند على احدهما بينما ندرس الآخر في البند التالي .

تعريف (11.6) افرض $\underline{u} = (a_1, b_1, c_1)$ ، $\underline{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ، نعرف الضرب الداخلي (أو القياسي) للمتجهين $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ (ونكتبه $\underline{u} \cdot \underline{v}$) بواسطة القانون :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

مثل (11.16) (أ) $(2,1,3)\cdot(-3,1,4) = -6 - 1 + 12 = 5$

(ب) $(2,-1,3)\cdot(-1,1,1) = -2 - 1 + 3 = 0$

(جـ) $(i + j)\cdot(\underline{i} - 2\underline{j} + 2\underline{k}) = 1 - 2 + 0 = -1$

مبرهنة (11.7) (خواص الضرب الداخلي)

افرض المتجهات $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ ، $\underline{w}$ والقياسي α ، فان الضرب الداخلي يحقق :

(أ) $\underline{u} \cdot \underline{u} = \|\underline{u}\|^2$ (ب) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$

(جـ) $(\alpha\underline{u}) \cdot \underline{v} = \alpha(\underline{u} \cdot \underline{v})$ (د) $\underline{0} \cdot \underline{u} = 0$

(هـ) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$

البرهان : اثبات جميع هذه الخصائص يتم بالاستخدام المباشر لتعريف الضرب الداخلي، وسنكتفي هنا باثبات (هـ) بينما نترك للقارئ اثبات الخصائص الباقية .

افرض $\underline{u} = (a_1 , b_1 , c_1)$ ، $\underline{v} = (a_2 , b_2 , c_2)$ ، $\underline{w} = (a_3 , b_3 , c_3)$.
عندئـذ نجـد مـا يلـي :

$$\begin{aligned} \underline{v} + \underline{w} &= (a_2 , b_2 , c_2) + (a_3 , b_3 , c_3) \\ &= (a_2 + a_3 , b_2 + b_3 , c_2 + c_3) \end{aligned}$$

ولـذلـك فـان :

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) &= a_1 (a_2 + a_3) + b_1 (b_2 + b_3) + c_1 (c_2 + c_3) \\ &= (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3) \\ &= \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w} \end{aligned}$$

مثل (11.17) جد $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w})$ عندمـــا $\underline{u} = (-2 , 3 , 1)$ ، $\underline{v} = (7 , 4 , 5)$ ، $\underline{w} = (1 , -5 , 2)$.

الحــل : نحسب كلا من :

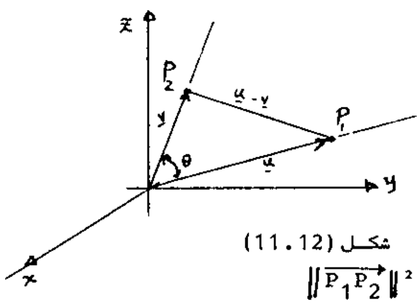
$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{v} &= (-2 , 3 , 1) \cdot (7 , 4 , 5) \\ &= -14 + 12 + 5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{w} &= (-2 , 3 , 1) \cdot (1 , -5 , 2) \\ &= -2 - 15 + 2 = -15 \end{aligned}$$

ولذلك يكــون :

$$\begin{aligned} u \cdot (\underline{v} + \underline{w}) &= \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w} \\ &= 3 - 15 \\ &= -12 \end{aligned}$$

تعريف (11.8) افرض أن المتجهين $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ يختلفان عن متجه الصفر . أفرض أن $\overrightarrow{OP_1}$ متجه الموضع للمتجه $\underline{u}$ و $\overrightarrow{OP_2}$ متجه الموضع للمتجه $\underline{v}$ ، نعرف الزاوية بين المتجهين $\underline{u}$ و $\underline{v}$ بأنها الزاوية θ المحصورة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{OP_1}$ ، $\overleftrightarrow{OP_2}$ وتحقق المتباينة $0 \leq \theta \leq \pi$ ، انظر الشكــل (11.12) ، وعندما نطبق قانون جيب التمام في المثلث OP_1P_2 نحصــل علـى :



شكــل (11.12)

$$\| \overrightarrow{P_1P_2} \|^2 = \| \overrightarrow{OP_1} \|^2 + \| \overrightarrow{OP_2} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{OP_1} \| \| \overrightarrow{OP_2} \| \cos \theta$$

أي أن : $\|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\cos\theta$

وباستخدام الخاصية (أ) في مبرهنة (11.7) نكتب :

$$(\underline{u} - \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\cos\theta$$

أي أن : $\underline{u} \cdot \underline{u} - 2\,\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\cos\theta$

التي نستطيع أن نكتبها على النحو :

$$\|\underline{u}\|^2 - 2\,\underline{u} \cdot \underline{v} + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\cos\theta$$

ونحصل منها على القاعدة :

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

وعندما $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ يختلفان عن متجه الصفر فاننا نكتب القاعدة (8) على نحو:

$$\cos\theta = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|} = \frac{\underline{u}}{\|\underline{u}\|} \cdot \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = U_{\underline{u}} \cdot U_{\underline{v}} \quad \ldots . (9)$$

<u>مثل (11.18)</u> جد الزاوية θ بين المتجهين $\underline{u} = (1,2,2)$, $\underline{v} = (3,4,0)$.

الحل : اولا نجد كلا من :

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{9 + 16 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (1)(3) + (2)(4) + (2)(0) = 11$$

وعندما نستخدم القاعدة (8) نحصل على :

$$11 = (3)(5)\cos\theta$$

أي $\cos\theta = \frac{11}{15}$ أو $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{15}\right)$.

<u>تعريف (11.9)</u> يكون المتجهان $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ <u>متعامدين</u> عندما $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$. هذا يعني ان متجه الصفر $\underline{O}$ يعامد كل متجه $\underline{u}$. اما اذا $\underline{u} \neq \underline{O} \neq \underline{v}$ فان $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ عندما $\cos\theta = 0$ أي $\theta = \frac{\pi}{2}$.

<u>مثل(11.19)</u> جد قيمة α ليكون المتجهان $\underline{u} = 3\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$ ، $\underline{v} = \alpha\underline{i} + 2\underline{j} - \frac{1}{2}\underline{k}$ متعامدين .

الحل : يكون المتجهان $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ متعامدين عندما :

$$0 = \underline{u} \cdot \underline{v} = 3\alpha - 3$$

وهذا يعني أن $\alpha = 1$.

مبرهنة (11.10) (متباينة شوارتز)

أي متجهين $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ يحققان المتباينة :

$$|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq \|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\|$$

البرهان : نستخدم القانون (8) لنكتب :

$$|\underline{u} \cdot \underline{v}| = \left| \|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\| \, \cos\theta \right|$$

$$= \|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\| \, |\cos\theta|$$

$$\leq \|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\| \qquad (\text{لأن } |\cos\theta| \leq 1)$$

نستطيع الآن أن نبرهن الخاصية الهامة التالية بشأن مقياس المتجهات .

مبرهنة (11.11) (المتباينة المثلثية)

أي متجهين $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ يحققان المتباينة :

$$\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$$

البرهان : نبدأ بأن نحسب :

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = (\underline{u} + \underline{v}) \cdot (\underline{u} + \underline{v})$$

$$= \underline{u} \cdot \underline{u} + 2\,\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v}$$

$$= \|\underline{u}\|^2 + 2\,\underline{u} \cdot \underline{v} + \|\underline{v}\|^2$$

$$\leq \|\underline{u}\|^2 + 2\,\|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\| + \|\underline{v}\|^2$$

$$= (\|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|)^2$$

وعندما نأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على المتباينة :

$$\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$$

زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه :

افرض المتجه $\underline{u} = (a\,,b\,,c)$ يختلف عن متجه الصفر . ان زوايا الاتجاه $\alpha\,,\beta\,,\gamma$ للمتجه $\underline{u}$ هي الزوايا بين المتجه $\underline{u}$ ومتجهات الوحدة الاحداثية $\underline{i}\,,\underline{j}\,,\underline{k}$ على التوالي . ونسمي المقادير $\cos\alpha\,,\cos\beta\,,\cos\gamma$ <u>جيوب تمام الاتجاه</u> للمتجه $\underline{u}$. وباستخدام القانون (8) نحصل على :

$$a = \underline{u} \cdot \underline{i} = \|\underline{u}\| \cos\alpha$$

$$b = \underline{u} \cdot \underline{j} = \|\underline{u}\| \cos\beta \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

$$c = \underline{u} \cdot \underline{k} = \|\underline{u}\| \cos\gamma$$

ونستطيع عندئذ أن نكتب :

$$\underline{u} = \|\underline{u}\| (\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

وعندما نأخذ مقياس المتجه $\underline{u}$ نحصل على :

$$\|\underline{u}\| = \|\underline{u}\| \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$$

وبذلك نجد أن :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

اما اذا $\underline{u}$ متجه وحدة فان (11) يأخذ الصيغة :

$$\underline{u} = (\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma)$$

مثل (11.20) جد متجه الوحدة U الذي له زوايا الاتجاه $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، $\beta = \frac{\pi}{4}$ ، $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

الحل : ان المتجه U في هذه الحالة هو :

$$U = (\cos\alpha , \cos\beta , \cos\gamma)$$
$$= (\cos\frac{\pi}{3} , \cos\frac{\pi}{4} , \cos\frac{2\pi}{3})$$
$$= (\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} , -\frac{1}{2})$$

تعريف (11.12) مركبة المتجه $\underline{u}$ على امتداد المتجه $\underline{v} \neq \underline{0}$ (ونكتبها $COMP_{\underline{v}}\underline{u}$) هي:

$$COMP_{\underline{v}}\underline{u} = \|\underline{u}\| \cos\theta$$

حيث θ الزاوية بين المتجهين $\underline{u}$ ، $\underline{v}$. ونسمي المتجه :

$$(COMP_{\underline{v}}\underline{u}) \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = (COMP_{\underline{v}}\underline{u}) U_{\underline{v}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

مسقط $\underline{u}$ على $\underline{v}$ وندل عليه اختصارا بالرمز $PROJ_{\underline{v}}\underline{u}$. لاحظ أن :

$$COMP_{\underline{v}}\underline{u} = \|\underline{u}\| \cos\theta = \|\underline{u}\| \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\|} = \underline{u} \cdot U_{\underline{v}}$$

ولذلك فان :

$$PROJ_{\underline{v}}\underline{u} = (\underline{u} \cdot U_{\underline{v}}) U_{\underline{v}}$$

مثل (11.21) افرض أن $\underline{u} = 3\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ ، $\underline{v} = 2\underline{i} + 3\underline{k}$. جد كلا من $COMP_{\underline{v}}\underline{u}$، $PROJ_{\underline{v}}\underline{u}$.

الحل : نحسب :

$$COMP_{\underline{v}}\underline{u} = \underline{u} \cdot U_{\underline{v}} = \underline{u} \cdot \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{13}} ((3)(2) + (2)(0) + (-1)(3))$$
$$= \frac{3}{\sqrt{13}}$$

والآن نحسب :

$$\begin{aligned} PROJ_{\underline{v}}\underline{u} &= (COMP_{\underline{v}}\underline{u})\ U_{\underline{v}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{13}}\left[\frac{1}{\sqrt{13}}(2\underline{i} + 3\underline{k})\right] \\ &= \frac{6}{13}\underline{i} + \frac{9}{13}\underline{k} \end{aligned}$$

تمارين(11.3)

في التمارين من 1 − 6 احسب $\underline{v} \cdot \underline{u}$ واذكر فيما اذا كانا متعامدين أم لا :

(1) $\underline{v} = (2,8,-6)\ ,\ \underline{u} = (-1,-2,-3)$ (2) $\underline{v} = (\ \ ,2\ ,3\ )\ ,\ \underline{u} = (1,-1,1)$

(3) $\underline{v} = \underline{i} - 3\underline{j} + \underline{k}\ ,\ \underline{u} = 2\underline{i} + 3\underline{j} - 4\underline{k}$ (4) $\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j}\ ,\ \underline{u} = \underline{i} - \underline{k}$

(5) $\underline{v} = (3,-2,4)\ ,\ \underline{u} = (4,-3,-2)$ (6) $\underline{v} = (3\ ,0\ ,4)\ ,\ \underline{u} = (12,0,-5)$

في التمارين من 7 − 10 جد النّاتج في ابسط صورة :

(7) $(3\underline{u}\cdot\underline{v}) - (\underline{u}\cdot 2\underline{v})$ (8) $\underline{v}\cdot(\underline{v}-\underline{u}) + \underline{u}\cdot(\underline{u}+\underline{v})$

(9) $(\underline{u}-\underline{v})\cdot\underline{w} + \underline{v}\cdot(\underline{w}+\underline{u})$

(10) $\underline{v}\cdot(\underline{v}+2\underline{w}) + (2\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{v}+2\underline{w}) - 2\underline{u}\cdot(\underline{v}+2\underline{w})$

في التمارين من 11 − 15 جد زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه للمتجه $\underline{u}$:

(11) $\underline{u} = 2\underline{i} + 6\underline{j} + 9\underline{k}$ (12) $\underline{u} = 12\underline{i} + 4\underline{j} - 3\underline{k}$ (13) $\underline{u} = 6\underline{i} + 2\underline{j} + 3\underline{k}$

(14) $\underline{u} = \underline{i} - 3\ \underline{k}$ (15) $\underline{u} = \underline{i} - \underline{j} + 2\ \underline{k}$

في التمارين من 16 − 19 جد الزاوية بين المتجهين $\underline{u}$ ، $\underline{v}$:

(16) $\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k}\ ,\ \underline{u} = 3\underline{i} - \underline{j} - 2k$ (17) $\underline{v} = (2,-3,1)\ ,\ \underline{u} = (-3,1,9)$

(18) $\underline{v} = (6,2,0)\ ,\ \underline{u} = (5,3,-2)$ (19) $\underline{v} = 6\underline{i} - 2\underline{j} - 3\underline{k}\ ,\ \underline{u} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$

(20) جد قيمة x ليكون المتجهان $\underline{u} = (x,1,2)\ ,\ \underline{v} = (3,4,x)$ متعامدين ٠

(21) جد متجه وحدة يكون عموديا على كل من $\underline{u} = \underline{i} + \underline{j}\ ,\ \underline{v} = \underline{i} + \underline{k}$

(22) افرض أن $\underline{u} = (1\ ,x\ ,1)\ ,\ \underline{v} = (2,-1,y)$ ٠ جد قيمتي $x\ ,\ y$ لكي يكون $\underline{u}\ ,\ \underline{v}$ متعامدين و $\|\underline{v}\| = \|\underline{u}\|$ ٠

(23) جد قياس الزاوية المحصورة بين ضلع مكعب وقطره ٠

(24) اذا المتجه $\underline{u}$ له زوايا الاتجاه α, β, γ فما هي زوايا الاتجاه للمتجه $-\underline{u}$ ٠

في التمارين من 25 − 28 احسب $COMP_{\underline{v}}\underline{u}\ ,\ PROJ_{\underline{v}}\underline{u}$:

(25) $\underline{v} = (1,1,1)\ ,\ \underline{u} = (4,2,0)$ (26) $\underline{v} = (-1,-2,2)\ ,\ \underline{u} = (3,3,4)$

(27) $\underline{v} = (1,-1,0)\ ,\ \underline{u} = (1,0,1)$ (28) $\underline{v} = (-2,1,3)\ ,\ \underline{u} = (1,-2,1)$

(11.4) الضرب المتجهي

نقدم في هذا البند عملية الضرب المتجهي التي تجرى على المتجهات الثلاثية فقط ، بعكس عملية الضرب الداخلي .

تعريف (11.13) اذا $\underline{u} = (a_1, b_1, c_1)$ ، $\underline{v} = (a_2, b_2, c_2)$ فان الضرب المتجهي لهما (ونكتبه $\underline{u} \times \underline{v}$) هو المتجه :

$$\underline{u} \times \underline{v} = (b_1c_2 - b_2c_1 , a_2c_1 - a_1c_2 , a_1b_2 - a_2b_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

فبينما عملية الضرب الداخلي ناتجها قياسي فان ناتج الضرب المتجهي هو متجه ، ولتبسيط الحصول على مركبات $\underline{u} \times \underline{v}$ نستخدم المخطط التالي مماثلا للمحدد:

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \underline{k} \quad \ldots (15)$$

مثل (11.22) احسب $\underline{u} \times \underline{v}$ عندما $\underline{u} = (-1 , -3 , 1)$ ، $\underline{v} = (1 , 2 , -1)$.

الحل : باستخدام (15) نجد أن :

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \underline{k}$$

$$= \underline{i} + \underline{k}$$

مثل (11.23) احسب $\underline{u} \times \underline{v}$ عندما $\underline{u} = (1 , 1 , 0)$ ، $\underline{v} = (1 , 0 , -1)$.

الحل : نستخدم (15) لنحصل على :

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \underline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \underline{k}$$

$$= -\underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$$

نلخص أهم خصائص الضرب المتجهي في المبرهنة التالية . برهان كل منهما يعتمد حسابات تستخدم التعريف مباشرة ونترك للقارئ اجراءها .

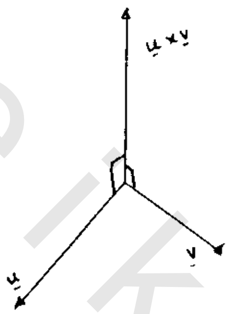
مبرهنة (11.14) فيما يلي نفرض المتجهات $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ غير صفرية والقياسيين α, β :

(أ) $\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$ (ب) $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$ اذا وفقط اذا $\underline{u}$, $\underline{v}$ متوازيان

(جـ) $(\alpha\underline{u})\times(\beta\underline{v}) = \alpha\beta(\underline{u}\times\underline{v})$ (د) $\underline{u}\times(\underline{v}+\underline{w}) = \underline{u}\times\underline{v}+\underline{u}\times\underline{w}$

(هـ) $\|\underline{u}\times\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2\,\|\underline{v}\|^2 - (\underline{u}\cdot\underline{v})^2$ (و) $\underline{u}\cdot(\underline{u}\times\underline{v})=0$, $\underline{v}\cdot(\underline{u}\times\underline{v})=0$

الخاصية (و) تقول أن المتجه $\underline{u}\times\underline{v}$ يكون عموديا على كل من $\underline{u}$, $\underline{v}$. فاذا جعلنا السبابه في اليد اليمنى يؤشر باتجاه $\underline{u}$ والاصبع الوسطى يؤشر باتجاه $\underline{v}$ فان الابهام ستؤشر باتجاه $\underline{u}\times\underline{v}$ ، أي أن المتجهات $\underline{u}$, $\underline{v}$ ، $\underline{u}\times\underline{v}$ تولف نظام اليد اليمنى ، كما في الشكل(11.13) .



الشكل(11.13)

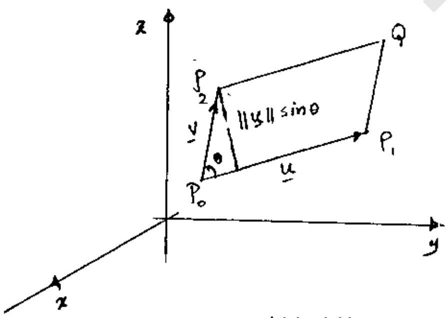
أما الخاصية (هـ) فتمكننا أن نكتب :

$$\|\underline{u}\times\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2\,\|\underline{v}\|^2 - (\underline{u}\cdot\underline{v})^2$$
$$= \|\underline{u}\|^2\,\|\underline{v}\|^2 - (\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\cos\theta)^2$$
$$= \|\underline{u}\|^2\,\|\underline{v}\|^2\,(1-\cos^2\theta)$$
$$= \|\underline{u}\|^2\,\|\underline{v}\|^2\sin^2\theta$$

وعندما نأخذ الجذر التربيعي للمقدارين نحصل على :

$$\|\underline{u}\times\underline{v}\| = \|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

حيث θ الزاوية بين المتجهين $\underline{u}$, $\underline{v}$. لكي نفسر هندسيا القانون (16) ، نأخذ $\overrightarrow{P_oP_1}$ ممثلا هندسيا للمتجه $\underline{u}$ ونأخذ $\overrightarrow{P_oP_2}$ ممثلا هندسيا للمتجه $\underline{v}$ ولنفرض أن θ الزاوية بينهما . بالرجوع الى الشكل (11.14) فان $\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\sin\theta$ يساوي مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه القطعتان P_oP_1 , P_oP_2 ضلعان متجاوران .



الشكل(11.14)

مثل (11.24) احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $P_o(4\,,-3\,,1)$ ، $P_1(6\,,-4\,,7)$ ، $P_2(1\,,2\,,2)$.

الحل : مساحة المثلث $P_oP_1P_2$ تساوي نصف مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $\overrightarrow{P_oP_1}$ ، $\overrightarrow{P_oP_2}$ ضلعان متجاوران ، فاذا فرضنا أن $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ يقابلان هاتين القطعتين المتجهتين على التوالي فان $\underline{u}=(2,-1,6)$ ، $\underline{v}=(-3,5,1)$. وبذلك تكون مساحة المثلث هي :

$$A = \frac{1}{2}\,\|\underline{u}\|\,\|\underline{v}\|\sin\theta = \frac{1}{2}\,\|\underline{u}\times\underline{v}\|$$

ولكن
$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -31\,\underline{i} - 20\,\underline{j} + 7\,\underline{k}$$

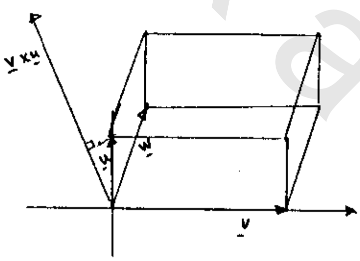
ولذلك فان :
$$A = \frac{1}{2}\sqrt{961 + 400 + 49} = \frac{1}{2}\sqrt{1410}$$

ان المقدار $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ يسمى الضرب الداخلي الثلاثي للمتجهات $\underline{u} = (a_1, b_1, c_1)$ ، $\underline{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ، $\underline{w} = (a_3, b_3, c_3)$ ، وباجراء حسابات مباشرة نرى أن :

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

هندسيا ، فان العدد $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ يساوي حجم متوازي السطوح الذي فيه المتجهات $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ تكون ثلاثة اضلاع متجاورة فيه كما في الشكل(11.15) .



الشكل(11.15)

فمساحة قاعدته تساوي $\|\underline{v} \times \underline{w}\|$ بينما ارتفاعه يساوي :

$$\left|\text{comp}_{\underline{v} \times \underline{w}}\, \underline{u}\right| = \left|\underline{u} \cdot U_{\underline{v} \times \underline{w}}\right| = \frac{|\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})|}{\|\underline{v} \times \underline{w}\|}$$

اذا كان $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = 0$ فان حجم متوازي السطوح عندئذ يساوي صفرا ، والتفسير الهندسي لذلك بأن المتجهات الثلاث $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ ، $\underline{w}$ تشترك في المستوى نفسه . العكس ايضا صحيح ، لأن $\underline{v} \times \underline{w}$ يعامد المستوى الذي يقع فيه المتجهان $\underline{v}$, $\underline{w}$ ولذلك $\underline{v} \times \underline{w}$ عمودي على $\underline{u}$ ، أي ان $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = 0$.

تمارين (11.4)

في التمارين من 1 - 6 جد $\underline{u} \times \underline{v}$:

(1) $\underline{u} = (1,1,0)$, $\underline{v} = (1,-1,0)$ (2) $\underline{u} = (1,-2,0)$, $\underline{v} = (0,0,3)$

(3) $\underline{u} = (3,-7,0)$, $\underline{v} = (1,0,1)$ (4) $\underline{u} = (3,-4,2)$, $\underline{v} = (6,-3,5)$

(5) $\underline{u} = (3,-1,-1)$, $\underline{v} = (2,-3,5)$ (6) $\underline{u} = (2,4,6)$, $\underline{v} = (-1,-1,3)$

(7) اثبت كلا من : $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$, $\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$

في التمارين من 8 – 15 احسب المقدار في ابسط صورة :

(8) $(\underline{i} + \underline{j}) \times (\underline{i} - \underline{j})$ (9) $(\underline{i} - \underline{j}) \times (\underline{j} - \underline{i})$ (10) $\underline{i} \cdot (\underline{j} \times \underline{k})$

(11) $(\underline{j} \times \underline{i}) \cdot (\underline{i} \times \underline{k})$ (12) $(\underline{i} \times \underline{j}) \times \underline{k}$ (13) $(2\underline{j} - \underline{k}) \times (\underline{i} - 3\underline{j})$

(14) $[(\underline{i} - \underline{j}) \times (\underline{j} - \underline{k})] \times (\underline{j} + 5\underline{k})$ (15) $(i - j) \times [(j - k) \times (\underline{j} + 5\underline{k})]$

في التمارين من 16 – 19 احسب مساحة المثلث $P_o P_1 P_2$:

(16) $P_o(3,1,7)$, $P_1(2,-3,4)$, $P_2(7,-2,4)$

(17) $P_o(1,0,0)$, $P_1(0,1,0)$, $P_2(0,0,1)$

(18) $P_o(0,1,0)$, $P_1(-1,1,2)$, $P_2(2,1,-1)$

(19) $P_o(1,2,3)$, $P_1(-1,3,2)$, $P_2(3,-1,2)$

في التمارين من 20 – 22 احسب حجم متوازي السطوح الذي فيه المتجهات $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ ، $\underline{w}$ تكون ثلاثة اضلاع متجاورة فيه :

(20) $\underline{u} = \underline{i} + \underline{j}$, $\underline{v} = 2\underline{i} - \underline{k}$, $\underline{w} = 3\underline{j} + \underline{k}$

(21) $\underline{u} = \underline{i} - 3\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{v} = 2\underline{j} - \underline{k}$, $\underline{w} = \underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$

(22) $\underline{u} = 2\underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{v} = 3\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k}$, $\underline{w} = 3\underline{i} + 2\underline{j}$

(23) اثبت أن : $\|\underline{u} \times \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 \|\underline{v}\|^2 - (\underline{u} \cdot \underline{v})^2$

(24) اثبت أن : $\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) + \underline{v} \times (\underline{w} \times \underline{u}) + \underline{w} \times (\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{0}$

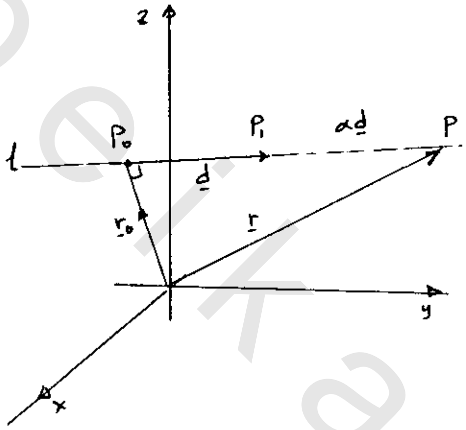
(25) جد متجه وحدة يكون عموديا على كل من $\underline{u} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$, $\underline{v} = 4\underline{j} + 3\underline{k}$.

(11.5) معادلة الخط المستقيم في الفضاء R^3

ان أي خط مستقيم في الفضاء R^3 نحدده (وكما هو الحال في المستوى) بالتعرف على نقطتين يمر بهما . لكي نحصل على معادلة المستقيم l الذي يمر بالنقطتين $P_\circ(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ ، $P_1(x_1,y_1,z_1)$ نأخذ المتجه $\underline{r}_\circ = \overrightarrow{OP_\circ} = (x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ والمتجه $\underline{d} = \overrightarrow{P_\circ P_1} = (x_1-x_\circ,y_1-y_\circ,z_1-z_\circ)$ ، انظر شكل (11.16). وعندما النقطة $P(x,y,z)$ تقع على المستقيم l ونضع $\underline{r} = \overrightarrow{OP} = (x,y,z)$ فنحصل على المعادلة :

$$\underline{r} = \underline{r}_\circ + t\,\underline{d} \quad .... \quad (17)$$

حيث t عدد حقيقي ، والمتجه $\underline{d}$ الذي يوازي المستقيم l يسمى <u>متجه الاتجاه</u> للمستقيم ، ويمكن أن نستبدل به أي متجه آخر يكون موازيا للمستقيم l ، وان المعادلة (17) هي <u>معادلة المتجه</u> للمستقيم l . بما أن :



شكل (11.16)

$$\underline{r} - \underline{r}_\circ = (x,y,z) - (x_\circ,y_\circ,z_\circ) = (x-x_\circ, y-y_\circ, z-z_\circ)$$

$$t\,\underline{d} = t(x_1-x_\circ, y_1-y_\circ, z_1-z_\circ) = (t\,d_1, t\,d_2, t\,d_3)$$

حيث وضعنا $d_1 = x_1 - x_\circ$ ، $d_2 = y_1 - y_\circ$ ، $d_3 = z_1 - z_\circ$ ، نستطيع الآن أن نكتب معادلة (17) كما يلي :

$$(x-x_\circ\,,\, y-y_\circ\,,\, z-z_\circ) = (t\,d_1\,,\, t\,d_2\,,\, t\,d_3)$$

ومن تساوي متجهين نحصل على المعادلات التالية :

$$\begin{aligned} x - x_\circ &= t\,d_1 & \qquad x &= x_\circ + t\,d_1 \\ y - y_\circ &= t\,d_2 & \text{أو} \qquad y &= y_\circ + t\,d_2 \qquad .... \quad (18) \\ z - z_\circ &= t\,d_3 & \qquad z &= z_\circ + t\,d_3 \end{aligned}$$

التي نسميها مجموعة المعادلات المعلمية للمستقيم l الذي يمر بالنقطة $P_\circ(x_\circ,y_\circ,z_\circ)$ وله متجه اتجاه (أي يوازي) $\underline{d} = (d_1,d_2,d_3)$.

<u>مثل (11.25)</u> اكتب المعادلات المعلمية للمستقيم l الذي يمر بالنقطتين

. $Q(3,1,-2)$, $P(2,-1,6)$

الحـل : حتى نكتب هذه المعادلات نحتاج أن نحصل على متجه يوازي المستقيم l .

نأخذ المتجه :

$$\underline{d} = \overrightarrow{PQ} = (1\ ,\ 2\ ,\ -8)$$

موازيا للمستقيم l الذي يمر بالنقطة $P(2\ ,\ -1\ ,\ 6)$ ، ونكتب معادلاته المعلميه كما يلي :

$$x = 2 + t$$

$$y = -1 + 2t$$

$$z = 6 - 8t$$

و t عدد حقيقي .

مثل (11.26) اكتب معادلة متجه للمستقيم l الذي يمر بالنقطة $P(1\ ,\ -2\ ,\ 4)$ ويوازي المتجه $\underline{u} = \underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$ ، كذلك اكتب معادلاته المعلميه .

الحـل : واضح أننا نستطيع أن نأخذ المتجه $\underline{u}$ ليكون متجه اتجاه للمستقيم l ، أي نأخذ :

$$\underline{d} = \underline{u} = \underline{i} + \underline{j} - \underline{k}$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\underline{r}_o = \overrightarrow{OP} = \underline{i} - 2\underline{j} + 4\underline{k}$$

ومعادلة المتجه للمستقيم l هي :

$$\underline{r} = (x\ ,\ y\ ,\ z) = \underline{r}_o + t\,\underline{d}$$

$$= (1\ ,\ -2\ ,\ 4) + t(1\ ,\ 1\ ,\ -1)$$

بينما معادلاته المعلميه هي :

$$x = 1 + t$$

$$y = -2 + t$$

$$z = 4 - t$$

و t عدد حقيقي .

عندما تختلف المركبات d_3 , d_2 , d_1 لمتجه الاتجاه $\underline{d}$ لمستقيم l جميعها عن الصفر ، فان اختزال t من المعادلات المعلميه (18) يعطينا مجموعة المعادلات :

$$\frac{x - x_o}{d_1} = \frac{y - y_o}{d_2} = \frac{z - z_o}{d_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

وهي معادلات المستقيم l بالصيغة التماثلية .

مثل (11.27) اكتب بالصيغة التماثليه معادلات المستقيم الذي يمر بالنقطتين $Q(-2, 5, 6)$ ، $P(3, 4, -1)$.

الحل : نأخذ المتجه :

$$\underline{d} = \overrightarrow{PQ} = (-5, 1, 7)$$

موازيا للمستقيم المطلوب ، فتكون معادلاته بالصيغه التماثلية هي :

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{7}$$

اذا كانت احدى مركبات متجه الاتجاه $\underline{d}$ للمستقيم l صفرا فنفسر ذلك بأن المستقيم l يحتويه مستوى يوازي احد المستويات الاحداثيه الثلاث ، أي أن احد الاحداثيات للنقاط الواقعة على l يبقى ثابتا . فعلى سبيل المثل ، اذا $d_1 = 0$ بينما $d_2 \neq 0 \neq d_3$ فان اختزال t في المعادلات المعلميه (18) يعطينا :

$$\frac{y-y_0}{d_2} = \frac{z-z_0}{d_3}, \quad x = x_0$$

ويكون المستقيم في هذه الحالة واقعا في مستوى يوازي مستوى yz ويقطع محور x في النقطة $(x_0, 0, 0)$ ، وان اسقاطه على المستوى yz يكون المستقيم الذي معادلته :

$$\frac{y-y_0}{d_2} = \frac{z-z_0}{d_3}$$

مثل (11.28) اكتب بالصيغه التماثليه معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $Q(-2,0,3)$ ، $P(-4,1,3)$.

الحل : ان المتجه :

$$\underline{d} = \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 0)$$

يوازي المستقيم المطلوب . ونلاحظ هنا أن $d_3 = 0$ ، نستدل من ذلك أن الاحداثي z ثابت لجميع النقاط على هذا المستقيم وهو $z = 3$.
بينما المعادلة الأخرى فهي : $\frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-1}$ ، فالمستقيم يقع في مستوى يوازي المستوى الاحداثي xy ، ومعادلاته في الصيغة التماثليه هي :

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-1}, \quad z = 3$$

تعريف (11.15) افرض المستقيمين :

$$l_1 : \underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t\,\underline{d}$$

$$l_2 : \underline{R}(s) = \underline{R}_o + s\,\underline{D}$$

ان المستقيمين l_1 ، l_2 يتقاطعان اذا وجدنا قيما للمعلمين t ، s تجعل $\underline{r}(t) = \underline{R}(s)$. وفي هذه الحالة نعرف الزاوية بين المستقيمين l_1 ، l_2 بأنها الزاوية θ التي تحقق :

$$\cos\theta = \left| U_{\underline{d}} \cdot U_{\underline{D}} \right| \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (20)$$

مثل (11.29) جد نقطة تقاطع المستقيمين :

$$l_1 : \underline{r}(t) = (1\,,\,-6\,,\,2) + t(1\,,\,2\,,\,1)$$

$$l_2 : \underline{R}(s) = (0\,,\,4\,,\,1) + s(2\,,\,1\,,\,2)$$

ثم احسب الزاوية المحصورة بينهما .

الحل : نكتب :

$$\underline{r}(t) = (1 + t\,;\,-6 + 2t\,,\,2 + t)$$

$$\underline{R}(s) = (2s,\,4 + s\,,\,1 + 2s)$$

وعندما نأخذ $\underline{r}(t) = \underline{R}(s)$ نحصل على المعادلات :

$$1 + t = 2s$$

$$-6 + 2t = 4 + s$$

$$2 + t = 1 + 2s$$

وعندما نضرب المعادلة الثانية بالعدد -2 ونجمعها الى المعادلة الأولى نحصل على $-8 = 13 - 3t$ ، أي أن $t = 7$. وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد $s = 4$.

وبما أن :

$$\underline{r}(7) = (8\,,\,8\,,\,9) = \underline{R}(4)$$

فان $P(8\,,\,8\,,\,9)$ نقطة تقاطع المستقيمين l_1 ، l_2. اما الزاوية θ المحصورة بينهما فتحقق :

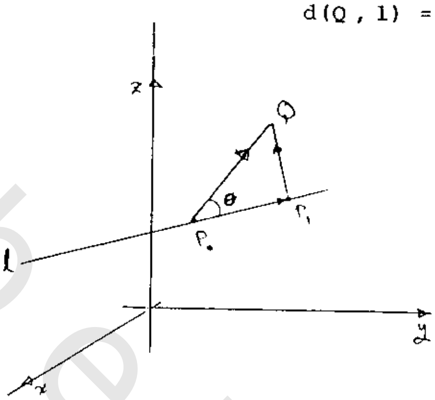
$$\cos\theta = \left| \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1\,,\,2\,,\,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{9}}\,(2\,,\,1\,,\,2) \right|$$

$$= \left| \frac{(1)(2) + (2)(1) + (1)(2)}{3\sqrt{6}} \right| = \frac{6}{3\sqrt{6}}$$

أي أن $\theta \approx 0.62$ (بالقياس نصف القطري) .

مبرهنة (11.16) افرض المستقيم $l : \underline{r}(t) = \underline{r_o} + t\,\underline{d}$ والنقطة $Q(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$ التي لا تقع على المستقيم l. ان البعد $d(Q\,,\,l)$ من النقطة Q الى المستقيم l هو :

$$d(Q , l) = \frac{\| \underline{d} \times \overrightarrow{P_0 Q} \|}{\| \underline{d} \|} \quad .... \quad (21)$$



حيث P_0 نقطة تقع على المستقيم l .

البرهان : بالرجوع الى الشكل (11.17)

نلاحظ أن المسافة من Q الى المستقيم l هي:

$$d(Q , l) = \| \overrightarrow{P_1 Q} \| = \| \overrightarrow{P_0 Q} \| \sin \theta$$

بينما قاعدة (16) تعطينا :

$$\| \underline{d} \times \overrightarrow{P_0 Q} \| = \| \underline{d} \| \; \| \overrightarrow{P_0 Q} \| \sin Q$$

فنحصل عندئذ على :

$$d(Q , l) = \| \overrightarrow{P_0 Q} \| \sin \theta = \frac{\| \underline{d} \times \overrightarrow{P_0 Q} \|}{\| \underline{d} \|}$$

شكل (11.17)

مثل (11.30) جد البعد من النقطة $Q(2 , 0 , 1)$ الى المستقيم $\underline{r}(t) = (1,2,0) + t(1,1,-5)$.

الحل : نختار نقطة P_0 على المستقيم ، مثلا نضع $t = 0$ ونحصل على $P_0(1,2,0)$.

نجد أن $\overrightarrow{P_0 Q} = (1 , -2 , 1)$ بينما $\underline{d} = (1 , 1 , -5)$ ، لذلك فان :

$$\underline{d} \times \overrightarrow{P_0 Q} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -9 \underline{i} - 6 \underline{j} - 2 \underline{k}$$

وهذا يعني أن $\| \underline{d} \times \overrightarrow{P_0 Q} \| = \sqrt{126}$ بينما $\| \underline{d} \| = \sqrt{27}$ ، وتكون المسافة هي:

$$d(Q , l) = \frac{\underline{d} \times \overrightarrow{P_0 Q}}{\underline{d}} = \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{27}}$$

$$= \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{42}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{42}$$

تمارين (11.5)

(1) قرر اي النقاط $P(1 , 2 , 0)$ ، $Q(-5 , 1 , 5)$ ، $R(-4 , 2 , 5)$ تقع على المستقيم $\underline{r}(t) = (\underline{i} + 2\underline{j}) + t(6\underline{i} + \underline{j} - 5\underline{k})$.

(2) قرر أي المستقيمات التالية تكون متوازية :

$$l_1 : \underline{r}_1(t) = (\underline{i} + 2\underline{k}) + t(\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k})$$

$$l_2 : \underline{r}_2(u) = (\underline{i} + 2\underline{k}) + u(\underline{i} + 2\underline{j} - 3\underline{k})$$

$l_3 \ : \ \underline{r}_3(v) = (6\underline{i} - \underline{j}) - v(2\underline{i} - 4\underline{j} + 6\underline{k})$

$14 \ : \ \underline{r}_4(w) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w)\,\underline{i} - w\underline{j} + (1 + \frac{3}{2}w)\,\underline{k}$

في التمارين من 3 - 10 اكتب : (أ) معادلة متجه (ب) معادلات معلميه (جـ) معادلات بالصيغة التماثليه للمستقيم l :

(3) الذي يمر بالنقطتين $P(2 , 1 , 3)$, $Q(1 , 2 , -1)$.

(4) الذي يمر بالنقطتين $P(1,-1,1)$, $Q(-1 , 1 , -1)$.

(5) الذي يمر بالنقطتين $P(1 , 2 , 4)$, $Q(1 , 2 , 7)$.

(6) الذي يمر بالنقطتين $P(-3,-1,6)$, $Q(-3,1,-6)$.

(7) الذي يمر بالنقطة $P(-1,-6,2)$ ويوازي $\underline{u} = (4 , 1 , -3)$.

(8) الذي يمر بالنقطة $P(1 , 0 , 3)$ ويوازي $\underline{u} = (1 , -1 , 0)$.

(9) الذي يمر بالنقطة $P(3 , 1 , 0)$ ويوازي المستقيم $\underline{r}(t) = (\underline{i} - \underline{j}) + t\,\underline{k}$.

(10) الذي يمر بالنقطة $P(3 , 1 , -2)$ ويوازي المستقيم $\frac{x + 1}{3} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - 2}{-4}$.

في التمارين من 11 - 14 قرر هل المستقيمان l_1 ، l_2 يتقاطعان أم لا ، في حالة تقاطعهما جد الزاوية المحصورة بينهما :

(11) $l_1 : \underline{r}(t) = (2,-1,3) + t(1,2,4)$, $l_2 : \underline{R}(s) = (9,-2,1) + s(1,-1,-2)$.

(12) $l_1 : x = 3 + 2t, y = 2 - t, z = 1 + t$, $l_2 : x = 4 - s , y = -2 + 3s , z = 2 + 2s$.

(13) $l_1 : x = 1 + 2t, y = 1 - 4t, z = 5 - t$, $l_2 : x = 4 - s , y = -1 + 6s , z = 4 + s$.

(14) $l_1 : \underline{r}(t) = (\underline{i} - 4\ 3\,\underline{j}) + t(\underline{i} + 3\underline{j})$, $l_2 : \underline{R}(s) = (4\underline{i} + 3\ 3\,\underline{j}) + s(\underline{i} - 3\,\underline{j})$.

في التمارين من 15 - 18 جد البعد $d(Q , l)$:

(15) $l : x = 3 + t \ , \ y = 2 - 4t \ , \ z = t \ , \ Q(4 , 3 , 2)$

(16) $Q(2 , -6 , 1)$ ، والمستقيم l يمر بالنقطتين $P_o(3,4,-2)$, $P_1(7,-1,5)$

(17) $l : \underline{r}(t) = (-2 , 1 , -4) + t(2 , -4 , 6) \ , \ Q(1 , 5 , 0)$

(18) $l : \underline{r}(t) = \underline{j} + \underline{t}\ (\underline{i} + \underline{j}) \ , \ Q(0 , 2 , 1)$

(19) (أ) عندما نأخذ نقطتين P ، Q في الفضاء R^3 ونضع $\underline{r}_o = \overrightarrow{OP}$ ، $\underline{r}_1 = \overrightarrow{OQ}$ فان المعادلة :

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_o + t(\underline{r}_1 - \underline{r}_o) \ , \ t \text{ عدد حقيقي}$$

تعطي المستقيم الذي يمر بالنقطتين P ، Q . حدد الفترة المغلقة التي

يتغير عليها المعلم t لكي نحصل من $\underline{r}(t)$ على جميع نقاط القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$.

(ب) اكتب المعادلات المعلمية للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ حيث $P(2, 7, -1)$ ، $Q(4, 2, 3)$.

(20) افرض أن $l : \underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t\underline{d}$.

(أ) جد العدد t_0 لكي يكون $\underline{r}(t_0)$, $\underline{d}$ متعامدين .

(ب) اكتب معادلة متجه $\underline{R}(s) = \underline{R}_0 + s\underline{D}$ للمستقيم l يكون فيها $\underline{R}_0 \perp l$ ، $\|\underline{D}\| = 1$. هذه المعادلة تسمى معادلة متجه قياسية للمستقيم l

(جـ) استخدم نتيجة فرع (أ) لتحسب $d(O, l)$ حيث

$l : \underline{r}(t) = (2,1,-4) + t(1,1,1)$ و $O(0,0,0)$

(21) استخدم نتيجة فرع (ب) في تمرين (20) لتكتب معادلة متجه قياسية للمستقيم l عندما :

(أ) المستقيم l يمر بالنقطة $P(0, 1, -2)$ ويوازي المتجه $\underline{u} = (1,-1,3)$.

(ب) المستقيم l يمر بالنقطة $P(3, 0, 0)$ ويوازي المتجه $\underline{u} = (1,1,1)$.

(11.6) المستويات في الفضاء R^3

المستوى في الفضاء R^3 عبارة عن مجموعة جزئية Π بحيث انه عندما $P , Q \in \Pi$ فان الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين P , Q يقع بأكمله في المجموعة Π .

نقول أن المتجه $\underline{u} \neq \underline{0}$ عمودي على المستوى Π عندما يكون $\underline{u}$, $\overline{PQ}$ متعامدين ، لأي نقطتين P , Q في المستوى Π . نسمي $\underline{u}$ متجها ناظما للمستوى Π .

نستطيع أن نكتب معادلة مستوى Π عندما نعرف نقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ تقع في Π ومتجها $\underline{n} = (a , b , c)$ ناظما للمستوى Π . فاذا أخذنا نقطة $P(x , y , z)$ في الفضاء R^3 فان هذه النقطة P تنتمي الى Π اذا وفقط اذا تحققت المعادلة :

$$\underline{n} \cdot \overline{P_0 P} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

أي أن : $(a , b , c) \cdot (x - x_0 , y - y_0 , z - z_0) = 0$

ونحصل بذلك على المعادلة :

$$a x + b y + c z = d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

حيث وضعنا $d = a x_0 + b y_0 + c z_0$ ، اما اذا وضعنا $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ ، $\underline{r_0} = \overrightarrow{OP_0}$

فان المعادلة (22) تأخذ الشكل :

$$\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r_0}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

وهذه معادلة متجه للمستوى Π الذي يمر بالنقطة P_0 وله $\underline{n}$ متجه ناظم .

مثل (11.31) اكتب معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $P_0(5,-2,4)$ وله الناظم $\underline{n} = (2 , 1 , 3)$.

الحل : عندما نستخدم المعادلة (22) نحصل على :

$$\begin{aligned} 0 = \underline{n} \cdot \overline{P_0 P} &= (2 , 1 , 3) \cdot (x - 5 , y + 2 , z - 4) \\ &= (2)(x - 5) + (1)(y + 2) + (3)(z - 4) \\ &= 2x + y + 3z - 20 \end{aligned}$$

أي أن

$$2x + y + 3z = 20$$

من جهة ثانية ، اذا بدأنا بمعادلة خطية :

$$a x + b y + c z = d$$

في x , y , z ولم تكن جميع معاملاتها a , b , c اصفارا ، فان مجموعة كل النقاط $P(x , y , z)$ التي تحقق هذه المعادلة هي المستوى π الذي يملك ناظما $\underline{n} = (a , b , c)$. لأنه اذا فرضنا أن النقطة $P_0(x_0 , y_0 , z_0)$ تحقق المعادلة ، أي أن $a x_0 + b y_0 + c z_0 = d$ فنحصل عندئذ على :

$$a x + b y + c z = a x_0 + b y_0 + c z_0$$

وهذا يعني أن :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

فالنقطة $P(x , y , z)$ تقع مع $P_0(x_0 , y_0 , z_0)$ في المستوى الذي له $\underline{n}$ ناظم. نقول أن المستويين π_1 ، π_2 متوازيان اذا ناظماهما متوازيان ، بينما π_1 ، π_2 متعامدان عندما يكون ناظماهما متعامدين .

افرض أن المستويين π_1 ، π_2 يتقاطعان وأن $\underline{n_1}$ ناظم للمستوى π_1 وأن $\underline{n_2}$ ناظم للمستوى π_2. نعرف الزاوية بين المستويين π_1 ، π_2 بأنها الزاوية θ التي تحقق المعادلة :

$$\cos\theta = \left| U_{\underline{n_1}} \cdot U_{\underline{n_2}} \right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

<u>مثل (11.32)</u> جد الزاوية بين المستويين :

$$\pi_1 : 3x + 3y - z = 5$$

$$\pi_2 : 2x - y - z = 4$$

الحل : هنا $\underline{n_1} = (3 , 3 , -1)$, $\underline{n_2} = (2 , -1 , -1)$. نجد أن :

$$U_{\underline{n_1}} = \frac{1}{\sqrt{19}} (3 , 3 , -1)$$

$$U_{\underline{n_2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2 , -1 , -1)$$

وعندما نستخدم المعادلة (25) نجد أن :

$$\cos\theta = \left| U_{\underline{n_1}} \cdot U_{\underline{n_2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{19}} \frac{1}{\sqrt{6}} [(3)(2) + (3)(-1) + (-1)(-1)]$$

$$= \frac{4}{114}$$

أي أن $\theta = \cos^{-1} \frac{4}{114}$.

<u>مثل (11.33)</u> اكتب معادلة المستقيم l الذي ينتج من تقاطع المستويين :

$$\pi_1 : x - 2y + 3z = 6$$

$$\pi_2 : 3x + 2y - 5z = 10$$

الحـل : هنا $\underline{n}_1 = (1 , -2 , 3)$ ، $\underline{n}_2 = (3 , 2 , -5)$. بما أن المستقيم 1 محتوى في Π_1 وكذلك في Π_2 فهو معامد لكل من $\underline{n}_1$ ، $\underline{n}_2$. لذلك نستطيع أن نأخذ متجه اتجاه $\underline{d}$ للمستقيم 1 متجها يوازي $\underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ لذا نحسب :

$$\underline{n}_1 \times \underline{n}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\,\underline{i} + 14\,\underline{j} + 8\,\underline{k}$$

ونختار $\underline{d} = 2\,\underline{i} + 7\,\underline{j} + 4\,\underline{k}$. والآن نعثر على نقطة تقع على 1 بأن نأخذ على سبيل المثل $z = 0$ ونحل آنيا المعادلتين الناتجتين $x - 2y = 6$، $3x + 2y = 10$ ، فنحصل على $x = 4$ ، $y = -1$ ، أي أن النقطة $P_0(4 , -1 , 0)$ تقع على المستقيم 1.

نكتب الآن معادلة المتجه للمستقيم 1 :

$$\underline{r}(t) = (4 , -1 , 0) + t(2 , 7 , 4)$$

مثل (11.34) اكتب معادلة المستوى الذي يحوي النقاط الثلاث $P(3 , -1 , 2)$ ، $Q(4 , -1 , -1)$ ، $R(2 , 0 , 2)$.

الحـل : نحتاج أن نعثر على متجه $\underline{n}$ ناظم للمستوى Π ومتجه من هذا القبيل يجب أن يعامد $\overline{PQ}$ وكذلك $\overline{PR}$ ، لذا يمكن أن نختار $\underline{n}$ موازيا للمتجه $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. ولكن :

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\,\underline{i} + 3\,\underline{j} + \underline{k}$$

فنأخذ $\underline{n} = (3 , 3 , 1)$ ، ونكتب الآن معادلة المستوى Π باستخدام النقطة $P(3 , -1 , 2)$ فنحصل على :

$$(3 , 3 , 1) \cdot (x - 3 , y + 1 , z - 2) = 0$$

أي أن :

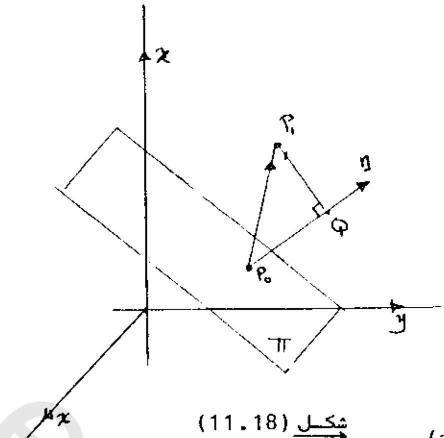
$$3x + 3y + z = 8$$

افرض المستوى $\Pi : ax + by + cz = d$ والنقطة $P_1(x_1 , y_1 , z_1)$. ان المسافة $d(P_1 , \Pi)$ من النقطة P_1 الى المستوى Π هي :

$$d(P_1 , \Pi) = \frac{|a x_1 + b y_1 + c z_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

بالرجوع الى الشكل (11.18) ، نرى أن :

$$d(P_1 , \Pi) = \| \overrightarrow{P_0 Q} \| = | \operatorname{comp}_{\underline{n}} \overrightarrow{P_0 P_1} |$$



شكل (11.18)

$$= \left| \frac{\underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}}{\| \underline{n} \|} \right|$$

وإذا فرضنا أن $P_0(x_0,y_0,z_0)$ تقع في المستوى π، لذلك $a x_0+b y_0+c z_0 = d$، ونجد الآن :

$$d(P_1 , \pi) = \left| \frac{\underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}}{\| \underline{n} \|} \right| = \left| \frac{(a,b,c)(x_1 - x_0 , y_1 - y_0 , z_1 - z_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{a x_1 + b y_1 + c z_1 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

مثل (11.35) احسب البعد بين النقطة $P(4,-1,1)$ والمستوى $\pi : 4x - 3y + 5z = 3$.

الحـل : نستخدم القانون (26) في حساب هذه المسافة لنجد أن :

$$d(P , \pi) = \left| \frac{(4)(4) + (-3)(-1) + (5)(1) - 3}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2 + (5)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{16 + 3 + 5 - 3}{\sqrt{50}} \right|$$

$$= \frac{21}{5\sqrt{2}}$$

تمارين (11.6)

في التمارين من 1 - 8 اكتب معادلة المستوى الذي :

(1) يمر بنقطة الاصل وله ناظم $\underline{n} = (4 , 5 , -3)$.

(2) يمر بالنقطة $P(2 , 1 , -1)$, $\underline{n} = (1 , -2 , 3)$.

(3) يمر بالنقطة $P(3,-1,5)$ وعمودي على المستقيم المار بهذه النقطة والنقطة $Q(6 , -7 , 9)$.

(4) يمر بالنقطة $P(3,4,-5)$ ويوازي كلا المتجهين $\underline{u} = (3,2,-1)$, $\underline{v} = (1,-2,1)$

(5) يمر بالنقطتين $P(2,-1,3)$ ، $Q(3 , 1 , 2)$ ويوازي المتجه $\underline{u} = (3,-1,-4)$

(6) يمر بالنقطتين $P(1,-1,-2)$ ، $Q(3 , 1 , 1)$ وعمودي على المستوى $x - 2y - 3z=5$

(7) يمر بالنقاط الثلاث : $P(3,2,1)$, $Q(-1,1,-2)$, $R(3,-4,1)$

(8) يمر بالنقطة $P(2,5,-6)$ ويوازي المستوى $3x - y + 2z = 10$

في التمارين من 9 - 12 اكتب المعادلات المعلمية للمستقيم l الذي هو تقاطع

المستويين π_1 ، π_2 ثم جد الزاوية θ بين هذين المستويين :

(9) $\pi_1 : 5(x-1) - 3(y+2) + 2z = 0$, $\pi_2 : x + 3(y-1) + 2(z+4) = 0$

(10) $\pi_1 : 2x - y + 3z = 5$, $\pi_2 : 5x + 5y - z = 1$

(11) $\pi_1 : x - y + z = 1$, $\pi_2 : 2x + y + 3z = -5$

(12) $\pi_1 : 4x + y + z = 0$, $\pi_2 : 2x + 3y - 2z = -5$

في التمارين من 13 – 15 جد المسافة $d(P, \pi)$:

(13) $\pi : 6x - 2y - 9z = -12$, $P(1, 6, -3)$

(14) $\pi : 12y - 5z = 27$, $P(8, 3, -2)$

(15) $\pi : 2x + 4y - z + 1 = 0$, $P(2, -1, 3)$

(16) جد النقطة التي يقطع بها المستقيم $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ المستوى $2x + 3y + z - 11 = 0$.

(17) جد معادلتي المستويين اللذين يتقاطعان في المستقيم $\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{1}$

(18) جد متجهي وحدة ناظمين للمستوى $2x - 3y + 7z = 3$

نقول أن المتجهات $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ ، $\underline{w}$ في مستوى واحد اذا أمكن العثور على اعداد α ، β ، γ ليست جميعها اصفارا بحيث ان : $\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w} = \underline{0}$

في التمارين من 19 – 21 قرر هل $\underline{u}$ ، $\underline{v}$ ، $\underline{w}$ تقع في مستوى واحد أم لا :

(19) $\underline{u} = \underline{i}$, $\underline{v} = \underline{i} - 2\underline{j}$, $\underline{w} = 3\underline{j} + \underline{k}$

(20) $\underline{u} = \underline{j} - \underline{k}$, $\underline{v} = 3\underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$, $\underline{w} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + 3\underline{k}$

(21) $\underline{u} = \underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$, $\underline{v} = 2\underline{i} - \underline{j}$, $\underline{w} = 3\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$