الفصل السابع

العمل والطاقة

العمل :

نعرّف العمل في الفيزياء على أنه جداء القوة في مركّبة الانتقال باتجاه القوة .

فاذا كانت القوة F ثابتة في المنحى والاتجاه وانتقلت نقطة تطبيقها وفق هذا المنحى بالمقدار l كان العمل مساوياً $F.l$. أما إذا كانت القوة الثابتة تميل على منحى الانتقال بزاوية ثابتة Θ كان العمل $F\,l\cos\Theta$

ومن المفيد أن نعرّف الجداء السلّمي وأن نكتب عمل القوة بدلالته فنقول:

إننا نعرف الجداء السلمي لشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بأنه المقدار الجبري الحاصل من ضرب مقداري الشعاعين في جيب تمام الزاوية Θ الواقعة بين منحييهما الموجبين أي : $\vec{A}\,.\,\vec{B} = A\,B\cos\Theta$

ويصبح العمل في الحالتين المذكورتين :

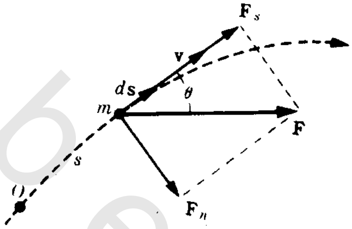
$$w = \vec{F}\,.\,\vec{l} \qquad (7-1)$$

ونرى أنه يمكن أن يكون العمل سالباً إذا كان اتجاه القوة معاكساً للانتقال .

أما إذا كانت القوة $\vec{F}$ التي نريد حساب عملها متغيرة القيمة والاتجاه عندما تنتقل من موضع لآخر فاننا نحسب أولاً عملها العنصري وهو العمل الذي

تقوم به من جراء انتقال نقطة تطبيقها مسافة صغيرة ds ثم نكامل أو نجمع هذه الأعمال العنصرية . ففي هذه الحالة يمكن أن نحسب عمل قوة متغيرة تنتقل نقطة تطبيقها على منحن كالمبين في الشكل (٧ — ١) فنكتب :

$$w = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad (7.2)$$



الشكل (٧ — ١)

الطاقة الحركية :

نسمي نصف جداء كتلة جسم ما بمربع سرعته الطاقة الحركية للجسم ونرمز لها بـ E_k . أي لدينا :

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (7-3)$$

مبدأ العمل والطاقة :

إذا استفدنا الآن من التعريفين المذكورين ومن قانون نيوتن الثاني نحصل على مايسمى بمبدأ العمل والطاقة . فمن تعريف العمل لدينا :

$$w = \int \vec{F} \cdot \vec{ds}$$

ولدينا : $\vec{v} = \frac{\vec{ds}}{dt}$ كما أن : $\vec{F} = m \frac{\vec{dv}}{dt}$ فيكون :

$$w = \int_{v_1}^{v_2} m \vec{v} \cdot \vec{dv} = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

ومنه نجد :

$$w = \frac{1}{2}\, m\, v_2^{2'} - \frac{1}{2}\, m\, v_1^2 = E_{k2} - E_{k1} \qquad (7-4)$$

وينص هذا المبدأ على أن عمل القوة الحاصلة الفاعلة في جسم ما، يساوي تغير طاقته الحركية .

الطاقة الكامنة الثقالية :

إذا حسبنا عمل قوى الثقالة خلال انتقال جسم ما ثقله $m\vec{g}$ انتقالاً شاقولياً بالجوار القريب من سطح الأرض ، حيث تكون القوة ثابتة في هذه الحالة ويكون الانتقال موازياً لمنحى القوة فاننا نجد :

$$w = (-mg)(y_2 - y_1) = -(mgy_2 - mgy_1) \qquad (7-5)$$

وقد أخذنا المحور y موجباً نحو الأعلى . فيكون العمل موجباً عندما يكون y_2 أصغر من y_1 أي أن الجسم يسقط ، وبالتالي فانه يمكن أن يعطي الجسم عملاً خلال سقوطه . أما عندما يكون y_2 أكبر من y_1 فيكون العمل سالباً وعلينا أن نصرف عليه عملاً للتغلب على قوى الثقالة . لو فرضنا الآن أن الانتقال ليس شاقولياً وإنما كان على خط منحن فان ما نحصل عليه لدى حساب العمل هو نفس المقدار (7-5) . فنستنتج أن عمل قوة الثقالة لايتعلق إلا بالعلو الابتدائي (الموضع الابتدائي) وبالعلو النهائي (الموضع النهائي) ، وهو مستقل عن المسار المتبع . ولابراز هذه الخاصة نعرف تابعاً مماثلاً للطاقة الحركية نسميه الطاقة الكامنة الثقالية E_p وذلك بالعلاقة :

$$E_p = mgy \qquad (7-6)$$

لنكتب الآن نظرية العمل والطاقة بفرض أن قوة الثقالة هي القوة الوحيدة الفاعلة على الجسم فنرى أن :

$$-\left(mgy_2 - mgy_1\right) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

أي أن:

$$m g y_2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = m g y_1 + \frac{1}{2} m v_1^2$$

أو :

$$E_{P2} + E_{k2} = E_{P1} + E_{k1} = E \qquad (7-7)$$

حيث تمثل E الطاقة الميكانيكية الكلية ، وهي تساوي مجموع الطاقتين الحركية والكامنة . ويبقى هذا المجموع ثابتاً خلال مراحل الحركة كلها .

أما إذا لم تكن الحركة قريبة من سطح الأرض فاننا ما نزال نستطيع تعريف طاقة كامنة ثقالية إلا أنها لاتعطى بالعلاقة (7-6) . فاذا انطلقنا من قانون التجاذب العالمي وحسبنا العمل w لقوة الثقالة الناتج من انتقال الجسم بين r_1 و r_2 فاننا نجد :

$$w = -G\, m.m_E \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$w = \left(\frac{Gmm_E}{r_2} - \frac{Gmm_E}{r_1}\right)$$

وبالمقارنة مع العلاقتين (7-5) و (7-6) نجد :

$$E_p = -\frac{Gmm_E}{r} \qquad (7-8)$$

الطاقة الكامنة المرنة :

إن أية قوة يكون عملها مستقلاً عن المسار المتبع ، يمكن أن نعرّف من أجلها طاقة كامنة وتسمى هذه القوة قوة محافظة . وقوة المرونة $\vec{F}$ التي تتولد في النابض والتي ترجعه الى طوله الطبيعي إذا ترك وشأنه هي قوة من هذا النوع . فاذا امتط نابض بمقدار صغير x تولدت فيه قوة معيدة F تعطى بالعلاقة :

$$F = k\,x \qquad (7\text{-}9)$$

حيث ترمز k الى ثابت قوة النابض .

وإذا حسبنا العمل فاننا نجد :

$$w\ (\text{مرنة}) = \int \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int_{x_1}^{x_2} F \cos\theta\, dx$$

و $\theta = \pi$ لأن القوة مُعيدة (عكس الانتقال) فيكون :

$$w\ (\text{مرنة}) = -\int_{x_1}^{x_2} k\,x\, dx = -\frac{1}{2}\left(k x_2^2 - k x_1^2\right)$$

$$E_p\ (\text{مرنة}) = \frac{1}{2} k x^2 \qquad (7\text{-}10)$$

الاستطاعة :

تعرف الاستطاعة الوسطى على انها نسبة العمل المتولد w على المجال الزمني T أو :

$$\overline{P} = \frac{w}{T} \qquad (7\text{-}11)$$

واذا كان هذا المقدار متغيراً مع الزمن عرفنا الاستطاعة الآنية بالعلاقة :

$$P = \frac{dw}{dt} \tag{7-12}$$

التي يمكن أن تكتب بدلالة السرعة والقوة على الشكل :

$$P = \frac{F \cdot dx}{dt} = F \quad v$$

وذلك اذا كانت القوة والسرعة على حامل واحد ، أما في الحالة العامة فنكتب العلاقة بشكل شعاعي أي :

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \vec{ds}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{ds}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{7 13}$$

تقدر الاستطاعة إما (بالقدم . باوند ثانية) أو بالحصان (hp) أو بالواط والتحويلات المقابلة التي تربط هذه المقادير هي :

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft . lb/s} = 746 \text{ watts}$$

* * *

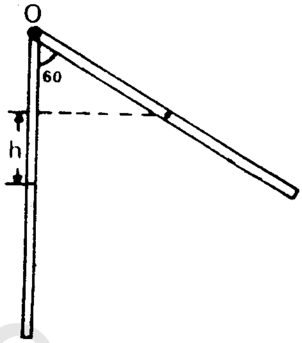
مسالة رقم (٧ ـ ١) :

تستند مسطرة خشبية طولها متر وكتلتها 300 g من إحدى نهايتيها على النحو المبين في الشكل (٧ ـ ٢) وتزاح بزاوية مقدارها 60° . ما هو مقدار ازدياد طاقتها الكامنة ؟

الحل (طريقة أولى) :

إذا اخترنا سطح الارض مستوي مقارنة فان كل جزء من المسطرة سيتغير

ارتفاعه عن سطح الارض بمقدار يختلف عن تغير جزء آخر من المسطرة ويمكن أن نحسب ازدياد الطاقة الكامنة بالإستفادة من خاصة مركز الثقل والتي تقول بتكافؤ قوى الثقالة المؤثرة على أجزاء المسطرة جميعها مع قوة وحيدة تساوي ثقل المسطرة كله ومطبقة عند مركز الثقل الذي يقع عند منتصف المسطرة في هذه الحالة . فتعود المسألة إلى حساب مقدار تغير ارتفاع منتصف المسطرة ، أي إلى حساب المقدار h الظاهر في الشكل (٧ — ٢) . وواضح من هذا الشكل أن :



الشكل (٧ — ٢)

$$h = 0.5 - 0.5 \cos 60^\circ = 0.5 - 0.25 = 0.25 \text{ m}$$

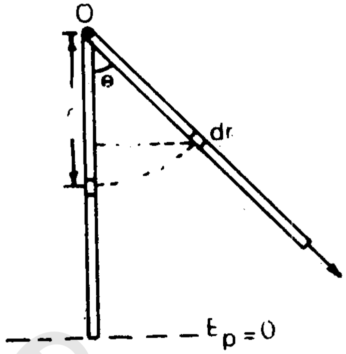
ويكون ازدياد الطاقة الكامنة : $E_{p_2} - E_{p_1} = mgh$ أي :

$$E_{p_2} - E_{p_1} = 0.300 \times 9.8 \times 0.25 = 0.735 \text{ joule} = 7.35 \times 10^6 \text{ ergs}$$

الحل (طريقة ثانية) :

نفترض عنصراً من القضيب طوله dr ويبعد مسافة r عن النقطة o في الشكل (٧ — ٣) . ان الطاقة الكامنة لهذا العنصر تساوي ثقله مضروباً ببعده عن سوية نختارها مبدأ لقياس الطاقات كالسوية المارة من الطرف السفلي للقضيب .

وإذا فرضنا أن μ هي كتلة وحدة الطول من القضيب فاننا نستطيع أن نكتب الطاقة الكامنة لهذا العنصر عندما يكون القضيب شاقولياً بالشكل :



الشكل (٧ – ٣)

$$dE_{p_1} = (\mu\, dr)\, g\, (L - r) \quad (1)$$

وذلك بفرض L طول القضيب .

فاذادارالقضيب زاوية θ اضحى ارتفاع هذا العنصر عن سوية الطاقة المعدومة مساوياً ($L - r\cos\Theta$) وتصبح طاقة العنصر في الوضع الجديد :

$$dE_{p_2} = (\mu\, dr)\, g\, (L - r\cos\Theta) \quad (2)$$

وتكون الزيادة في الطاقة الكامنة والتي تنشأ عن انتقال العنصر مساوية $dE_{p_2} - dE_{p_1}$ أي :

$$dE_{p_2} - dE_{p_1} = (\mu\, dr)\, g\, [\, r - r\cos\theta \,]$$

ونحصل على التغير الكلي في الطاقة الكامنة إذا جمعنا كل التغيرات المماثلة الناشئة عن كامل أجزاء القضيب بدءاً من $r = 0$ حتى $r = L$ أي أن :

$$\text{التغير الكلي في الطاقة الكامنة} = \int_0^L \mu g\, (r - r\cos\theta)\, dr$$

واذا عوضنا θ بـ $60°$ وجدنا :

$$= \int_0^L \mu g \frac{r}{2}\, dr = \mu g \left[\frac{r^2}{4}\right]_0^L = \mu g \frac{L^2}{4}$$

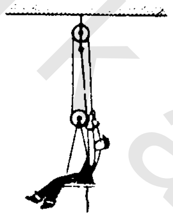
$$= (\mu g L) \cdot \frac{L}{4}$$

إلا أن $\frac{L}{4}$ ليس إلا المقدار الذي ارتفعه مركز ثقل القضيب كما بيَّنا بالطريقة الأولى و $\mu g L$ هو ثقل القضيب وعليه فالنتيجتان متطابقتان .

★ ★ ★

مسالة رقم (٧ ـ ٢) :

يزن رجل 150 lb ويجلس على منصة معلَّقة ببكرة قابلة للحركة ويرفع نفسه بحبل يمر على بكرة ثابتة على النحو المبين في الشكل (٧ – ٤). فاذا فرضنا عـدم وجود خسارة بالاحتكاك فأوجد (أ) القوة التي يجب عليه تطبيقها (ب) زيادة طاقته عندما يرفع نفسه مسافة 2 ft .



الشكل (٧ – ٤)

أجب عن الجزء (ب) بحساب زيادة طاقته الكامنة ، وكذلك بحساب جزء القوة المؤثرة في الحبل وطول الحبل المار من بين يديه .

الحـل :

(أ) يتضح من الشكل (٧ – ٤) أنه حتى يرتفع الشخص مسافة L فانه يجب أن يكون مجموع ما ينقص من طول الحبال الشاقولية الثلاث بمقدار 3L . وإذا كانت F هي القوة التي يؤثر بها الشخص على الحبـل الذي يمسك به فانه سيبذل عملًا مقداره F . 3 L وستزداد الطاقة الكامنة للشخص

بفعل هذا العمل بمقدار $mg\,L$ ونستطيع أن نكتب حسب مبدأ العمل والطاقة أن :

$$F \cdot 3\,L = mg\,L$$

ومنه :
$$F = \frac{mg}{3}$$

أي أن على الشخص أن يبدي قوة تساوي ثلث وزنه ، أي 50 lb .

(ب) اذا ارتفع الشخص مسافة h زادت طاقته الكامنة بالمقدار :

$$\Delta E_p = mg \cdot h = 150 \times 2 = 300 \ \ ft.lb$$

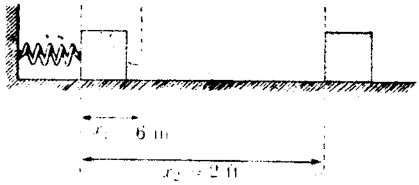
ونصل إلى نفس النتيجة اذا حسبنا العمل الذي بذله الشخص كي يرتفع مسافة 2 ft . حيث أن القوة التي عليه أن يؤثر بها تساوي 50 lb وأن طول الحبل الذي يمر بين يديه يساوي $3 \times 2 = 6$ ft . فالعمل الذي يبذله الشخص اذن هو $50 \times 6 = 300$ ft.lb وهو يختزن على صورة طاقة كامنة .

★ ★ ★

مسالة رقم (٧ ــ ٣) :

توضع قطعة وزنها 2 lb مبينة في الشكل (٧ ــ ٥) بحيث تضغط نابضاً مهمل الكتلة ، مسافة $x_1 = 6$ in . وتتحرك القطعة لدى افلاتها على سطح منضدة أفقي مسافة $x_2 = 2$ ft قبل أن تقف . فاذا كانت ثابتة مرونة النابض ($k = 8$ lb/ft) فما هو عامل الإحتكاك الإنزلاقي μ بين القطعة والمنضدة ؟

الحــل :



الشكل (٧ — ٥)

نكتب حسب مبدأ العمل والطاقة أن أعمال جميع القوى الفاعلة في القطعة تساوي تغير طاقتها الحركية . ولما كانت القطعة لحظة افلاتها ساكنة وكذلك بعد توقفها فإن تغير طاقتها الحركية معدوم . والقوى التي تفعل في القطعة أثناء تحركها هي ثقلها وقوة الاحتكاك ورد فعل المستوي والقوة المرنة الناشئة عن النابض . وأعمال هذه القوى ، بحسب التسلسل هي : صفر ف $-2\mu\, mg$ فصفر ف $\frac{1}{2} kx^2$ إذن يكون :

$$\frac{1}{2} kx^2 - 2\mu\, mg = 0$$

ومنه :

$$\mu = \frac{kx^2}{4\, mg}$$

$$\mu = \frac{8 \times \left(\frac{6}{12}\right)^2}{4 \times 2} = \frac{1}{4}$$

* * *

مسالة رقم (٧ ـ ٤) :

تترك قطعة وزنها 2 lb وهي في وضع السكون من النقطة A فتتحرك على مجرى

لـــه شكل ربع دائرة نصف قطرها $R = 4\ ft$ كما هو مبين في الشكل (٧ — ٦) . فتنزلق إلى الأسفل حتى تبلغ النقطة B بسرعة تساوي $12\ ft/s$. ثم تتابع حركتها اعتباراً من B على سطح مبتو مسافة $9\ ft$ إلى النقطة C حيث تقف . والمطلوب (أ) ماهو عامل الاحتكاك الانزلاقي بين القطعة والسطح الافقي ؟ (ب) ما هو العمل المبذول لمقاومة الاحتكاك عندما ينزلق الجسم الى الاسفل على القوس الدائري من A إلى B ؟

الشكل (٧ — ٦)

الحـــل :

(أ) إن قوة الاحتكاك هي القوة الافقية الوحيدة التي تفعل على القطعة ، والعمل المبذول هو العمل اللازم للتغلب على هذه القوة ، أما وزن القطعة ورد الفعل الناظمي فلا ينجزان ، على القطعة الأفقية ، أي عمل لتعامدهما مع الانتقال .و بالاستناد إلى مبدأ العمل والطاقة الحركية يكون :

$$w = \frac{1}{2}\ m\ v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = 0 - \frac{1}{2}\ m v_B^2$$

إلا أن $w = -\mu \cdot mg \cdot BC$ إذن :

$$-\mu\ mg \cdot BC = -\ \frac{1}{2}\ m\ v_B^2$$ ومنه :

$$\mu = \frac{v_B^2}{2g \cdot BC} = \frac{144}{2 \times 32 \times 9} = 0{\cdot}25$$

(ب) في حالة انزلاق القطعة من A إلى B نكتب أن أعمال جميع القوى الفاعلة في الجسم ماعدا قوة الثقالة يساوي تغير الطاقة الميكانيكية الكلية (أي الطاقة الكامنة + الطاقة الحركية) . وهذه القوى هي قوة الاحتكاك ولنفرض أن عملها w' ، ثم قوة رد الفعل وهي عمودية على الطريق ولذا فعملها معدوم ، إذن يكون :

$$[(m g R + 0) - (0 + \frac{1}{2} m v^2)] = w'$$

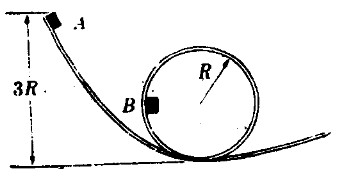
$$2 \times 4 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{32} \times 144 = w'$$

$$w' = 8 - 4.5 = 3.5 \text{ ft.lb}$$

* * *

مسالة رقم (٧ ــ ٥) :

ينزلق جسم صغير كتلته m بدون احتكاك على جهاز الحلقة المبين في الشكل (٧ ــ ٧) . فاذا بدأ الجسم حركته من السكون من النقطة A وعلى ارتفاع يساوي 3R من أسفل الحلقة ، وإذا بلغ الجسم النقطة B الواقعة في نهاية قطر أفقي للحلقة فاحسب عند النقطة B : (أ) تسارع الجسم القطري (ب) تسارع الجسم المماسي .



الشكل (٧ ــ ٧)

الحل :

(أ) إن التسارع القطري للجسم يساوي في الحركة الدائرية v^2/R ، حيث

v سرعة الجسم عند النقطة المدروسة . ولحساب هذه السرعة نستفيد من مبدأ العمل والطاقة والذي يقود في هذه الحالة الى مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية الكلية لأن القوى المؤثرة هي قوى الثقالة ، التي تشتق من طاقة الثقالة ، ورد الفعل الناظمي الذي لا يقوم بأي عمل . لذلك نكتب :

$$mgy_A + \frac{1}{2} mv_A^2 = mg\,y_B + \frac{1}{2} m\,v_B^2$$

$$m\,g \times 3R + 0 = mgR + \frac{1}{2} mv_B^2$$

أو :

$$\frac{1}{2} m\,v_B^2 = 2\,mg\,R$$

$$v_B^2/R = 4\,g$$

(ب) أما التسارع المماسي للجسم فيمكن استنتاجه من قانون نيوتن الثاني وهو يقضي بأن يكون :

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{N}$$

وذلك بفرض N قوة رد الفعل وهي عمودية على المسار . وباسقاط العلاقة السابقة على المماس نجد :

$$m\,a_T = mg + 0$$

ومنه :

$$a_T = g$$

★ ★ ★