الفصل السادس

الحركة المستوية

تعريف :

نقول بأن جسيماً يقوم بحركة مستوية اذا تحرك في مستوٍ ، ويكفي لتعيين وضع الجسيم معرفة المركبتين القائمتين له مثلاً . يتحـــدد المستوي الذي يتحرك فيه الجسيم بالقوى الفاعلة فيـــه وبالشروط الابتدائية التي تصف الحالة الحركية للجسيم لحظة البدء . وان حركة القذيفة والحركة الدائريـة مثالان على الحركة المستوية .

حركة القذيفة :

القذيفة هي أي جسم يخضع لقوة وزنه فقط ، أي أننا نهمل قوة مقاومة الهواء لحركة الجسم . نستنتج من قانون نيوتن الثاني ، إذا أخذنا المحور y شاقولياً متجهاً نحو الاعلى والمحوران x و z في المستوي الافقي ، أن :

$$\sum F_x = o = ma_x \text{ ، } \sum E_y = -mg = m\,a_y \text{ ، } \sum F_z = o = ma_z$$

أو أن :

$$a_x = o \quad \text{،} \quad a_y = -g \quad \text{،} \quad a_z = o$$

لنفرض بعدئذ أن مبدأ الجملة الاحداثية هو نقطـة الاطلاق (أو النقطـة

التي تبدأ القذيفة بالحركة عندها) وأننا اخترنا المستوي oxy المستوي الشاقولي الذي يحتوي السرعة الابتدائية $\vec{v}_o$، فتكون مركبات السرعة الابتدائية هي $\vec{v}_o\,(v_{ox}, v_{oy}, o)$. وتعني مركبة التسارع المساوية للصفر في اتجاه ما ثبات مركبة السرعة في ذلك الاتجاه ، وتكون قيمة المركبة الثابتة للسرعة هي قيمة المركبة الابتدائية ، لذلك يكون :

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{ox} \\ v_y &= v_{oy} - gt \\ v_z &= o \end{aligned}\right\} \qquad (6-1)$$

أما احداثيات القذيفة فهي :

$$x = v_{ox}\, t \quad , \quad y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad z = o$$

لأننا اخترنا نقطة الاطلاق مبدأ للجملة الاحداثية . ونستنتج أن الحركة مستوية ، حيث ان هناك احداثيان متغيران فقط . ويكون المحرك عبارة عن قطع مكافيء يتعين مستويه بشعاع السرعة الابتدائية والشاقول. وقد تعطى السرعة الابتدائية بدلالة قيمة السرعة v_o وزاوية الاطلاق Θ_o ، فتكون العلاقات مابين هذين المقدارين والمركبتين المذكورتين هي :

$$v_{ox} = v_o \cos \Theta_o \quad , \quad v_{oy} = v_o \sin \Theta_o \qquad (6-2)$$

تسمى المسافة الافقية ، أي المسافة من نقطة البدء الى النقطة التي تعود عندها القذيفة الى نفس الارتفاع ، المدى الافقي R . وبما أن المبدأ هو نقطة الاطلاق ، أي $y_o = o$ ، فاننا نحصل على الفترة التي تستغرقها القذيفة حتى تعود

الى الارتفاع الأول بتعويض $y = o$ في معادلات القذيفة . ونستنتج من ذلك ان :

$$R = v_o \cos \Theta_o \frac{2 v_o \sin \Theta_o}{g}$$ أو :

$$R = v_o^2 \sin 2 \Theta_o / g \qquad (6-3)$$

أما أعلى نقطة تصل اليها القذيفة فنحصل عليها بجعل مركبة السرعة الشاقولية v_y مساوية للصفر ثم تعويض قيمة t المقابلة في معادلة y فنجد :

$$y = v_{oy} (v_{oy}/g) - \frac{1}{2} g (v_{oy}/g)^2 = \frac{v_{oy}^2}{2 g} \qquad (6-4)$$

الحركة الدائرية :

في هذه الحركة نفترض أن الجسم يقوم بحركة دائرية فحسب السرعة والتسارع المقابلين للحركة المفروضة ثم نستنتج القوى اللازمة حتى يقوم الجسم بهذا النوع من الحركة . وأول مانستنتجه هو أن منحى شعاع السرعة الآنية مماس للدائرة . وعندما نفترض أن الحركة الدائرية منتظمة ، ونرمز للزمن اللازم للجسم حتى يقوم بدورة كاملة بـ T ، وهو ما نسميه بالدور، يكون :

$$v T = 2 \pi R$$ **أو :**

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2 \pi R f = R \omega \qquad (6-5)$$

حيث $f = \frac{1}{T}$ وهو التواتر ، أي عدد الدورات في وحدة الزمن . و ω

السرعة الزاوية أي الزاوية التي يقطعها الجسم في وحدة الزمن . وعلى الرغم من ثبات قيمة السرعة الآنية فان الحركة متسارعة بسبب تغير منحى السرعة . ويعطى التسارع في هذه الحالة بالعلاقة :

$$a_R = \frac{v^2}{R} = R\,\omega^2 \tag{6-6}$$

ويتجه شعاع التسارع نحو مركز الدائرة ولذا ندعوه تسارعاً مركزياً أو جابذاً . بعد ذلك نستنتج أن القوة اللازمة حتى يقوم الجسم بحركة دائرية هي قوة مركزية مقدارها $m\,v^2/R$ وتسمى القوة الجابذة ، فهي قوة حقيقية يجب تطبيقها حتى نغير منحى السرعة . وما نشعر به عندما نربط حجراً بخيط وندوّره هي قوة رد الفعل أو القوة النابذة .

دوران الأرض وتسارع الثقالة :

يسبب دوران الارض والاجسام المتماسكة معها نقصاناً في الوزن الحقيقي للأجسام،أي في قوة الجذب الثقالي، وذلك باستثناء منطقتي القطبين. فعند خط الاستواء مثلاً يختلف الوزن الذي نقيسه بواسطة نابض عن قوة جذب الارض له بالمقدار :

$$F - w = m\,a_R$$

ذلك لأن الجسم يقوم بحركة دائرية تقريباً ، فله تسارع، وعلينا أن نطبق عليه قوة . والقوة هنا هي قوة الجذب العالمي و يكون :

$$G\frac{m\,m_E}{R^2} - m\,g = m\,a_R$$ أو :

$$g = \frac{Gm_E}{R^2} - a_R \tag{6-7}$$ (عند خط الاستواء) .

أما عند القطبين فان v و a_R يساويان الصفر لذلك فان :

$$g_o = \frac{Gm_E}{R^2} \quad (\text{عند القطبين}) \qquad (6-8)$$

أما الاختلاف مابين تسارعي الثقالة في القطب وفي خط الاستواء، فيساوي a_R ونحسبه من العلاقة :

$$a_R = \frac{4\,\pi^2 R}{T^2}$$

ولدينا $R = 6.4 \times 10^8\ cm$ وهو نصف قطر الارض و $T = 8.64 \times 10^4\ s$ ، وهي مدة يوم كامل ، وعليه فان :

$$a_R = 3.37\ cm/s^2$$

حركة تابع :

إذا افترضنا أن تابعاً ما كتلته m يدور حول الارض في مدار دائري نصف قطره r ، فاننا نجد العلاقة ما بين سرعة التابع على مداره وبين نصف قطر هذا المدار اذا وضعنا قوة الجذب الثقالي مساوية القوة الجابذة أي :

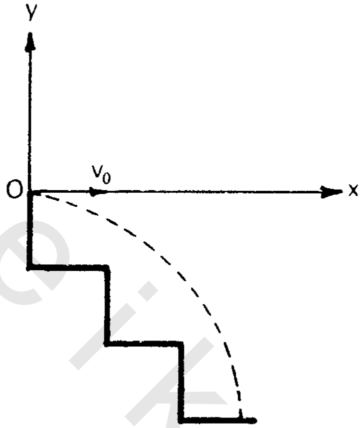
$$G\,\frac{mm_E}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{Gm_E}{r}$$

$$v^2 = \frac{g_o\,R^2}{r} \qquad (6-9)$$

★ ★ ★

مسالة رقم (٦ ـ ١) :

تتدحرج كرة فتسقط من أعلى درج بسرعة أفقية قدرها 5.0 ft / s . ويبلغ ارتفاع الدرجة 8.0 in وعرضها 8.0 in . والمطلوب بأي من الدرجات تصطدم الكرة أولاً ؟



الشكل (٦ — ١)

الحـل :

يبين الشكل (٦ — ١) الموضع الابتدائي للكرة (عند الحرف) والجملة الاحداثية التي اخترناها والتي تبسط حل المسألة ، فقد اخترنا مبدأ الجملة عند الحرف والمحور x أفقياً بحيث يكون للسرعة الابتدائية مركبة واحدة فقط . أي أن معادلات الحركة بالنسبة لهذه الجملة ستكون بعد وضع :

$$v_{oy} = 0 \quad ، \quad v_{ox} = v_o \quad ، \quad y_o = 0 \quad ، \quad x_o = 0$$

على الشكل :

$$x = v_o\, t \qquad y = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad (1)$$

وإذا فرضنا أن رقم الدرجة التي سيحصل عندها الاصطدام الاول هو n ، تكون المسافة الشاقولية التي قطعتها الكرة كي تبلغ هذه الدرجة مقدرة بالاقدام مساوية إلى : $n = \frac{2}{3}\, n \frac{8}{12}$. لنحسب الزمن اللازم للكرة كي تهوي هذه المسافة فنضع :

$$-\frac{1}{2} g t^2 = -16 t^2 = -\frac{8}{12} n$$

ومنه :

$$t = \sqrt{\frac{n}{24}}$$

وتكون المسافة الافقية التي قطعتها بحسب العلاقة (1) هي :

$$x = 5 \sqrt{\frac{n}{24}} \qquad (2)$$

إلا أن هذه المسافة يجب أن تكون أصغر من عرض n درجة أو تساويه كي يتم الاصطدام بالدرجة n . ولما كان عرض n درجة هو كارتفاع n درجة أي يساوي $\frac{2}{3}n$ قدماً ، فيجب أن تتحقق المتراجحة :

$$\frac{2}{3} n \geqslant 5 \sqrt{\frac{n}{24}}$$

وبتربيع الطرفين والاختصار على n نجد :

$$n \geqslant \frac{25}{24} \times \frac{9}{4} = \frac{255}{96} = 2.3$$

وعليه فالكرة تصطدم بالدرجة الثالثة لأنه لاوجود للدرجة ذات الرقم 2.3 . وتعطي العلاقة (2) بُعد موضع الاصطدام الافقي عن نقطة الانطلاق إذا عوضنا n بـ 3 فنجد :

$$x = 5 \sqrt{\frac{3}{24}} = \frac{5}{\sqrt{8}} = 1.77 \text{ ft} = 21.2 \text{ in}$$

* * *

مسالة رقم (٦ ـ ٢) :

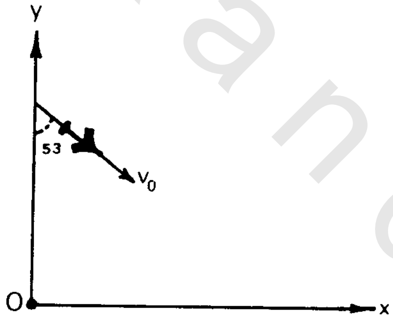
تحرر قاذفة قنابل منقضة بزاوية تصنع $53°$ مع الشاقول وعند الارتفاع 2400 ft ، قنبلة فتصطدم بالارض بعد انقضاء 5.0 s من تحريرها والمطلوب : (أ) ما هي سرعة القاذفة ؟ (ب) ما هي المسافة الافقية التي قطعتها القنبلة خلال طيرانها ؟ (حـ) احسب المركبتين الافقية والشاقولية لمتجهة سرعة القنبلة لحظة اصطدامها بالارض ؟

الحـل :

يبين الشكل (٦ ـ ٢) الجملة الإحداثية المختارة ، وقد اخترنا زمن بدء المراقبة لحظة إفلات القنبلة . فيكون موضع القنبلة الابتدائي :

$x_o = 0$ ، $y_o = 2400$ ft

أما السرعة الابتدائية فهي سرعة الطائرة نفسها فيكون لذلك :



الشكل (٦ ـ ٢)

$$v_{ox} = v_o \sin 53° = 0.80\ v_o$$

$$v_{oy} = -\ v_o \cos 53° = -\ 0.60\ v_o$$

وتكون المعادلتان الوسيطيتان لمسار القذيفة هما :

$$x = 0.80\ v_o\, t \quad ، \quad y = 2400 - 0.60\ v_o t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$$

(أ) إن الزمن المذكور هو الفترة الزمنية الفاصلة مابين لحظة تحرير القنبلة ولحظـــة اصطدام القنبلة بالارض أي حتى تبلغ الموضع($y = 0$) . فبكتابة $y = 0$ ، $t = 5.0\,s$ ، $g = 32.0\ ft/s^2$ في المعادلة الثانية نجد :

$$0 = 2400 - 0.60 \times 5\, v_o - \frac{1}{2} \times 32 \times 25$$

$$0 = -3\, v_o + (2400 - 400)$$

$$v_o = \frac{2000}{3} = 666\ ft/s$$

(ب) وتكون المسافة الافقية التي قطعتها القنبلة :

$$x = 0.80 \times 666 \times 5.0 = 2664\ ft$$

(حـ) إن المركبة الافقية للسرعة تبقى ثابتة ففي اللحظة $t = 5$ يكون :

$$v_x = 0.80 \times 666 = 532.8\ ft/s$$

أما المركبة الشاقولية فتعطى بالمعادلة :

$$v_y = v_{oy} - gt$$

$$v_y = -0.60 \times 666 - 32.0 \times 5 = -(399.6 + 160\ 0) = -559.6\ ft/s$$

* * *

مسألة رقم (٦ ـ ٣) :

يقذف مدفع من مدافع الخنادق قـــذيفة بزاوية تميل على الأفق بمقدار 53° وبسرعة فوهة تساوي $200\ ft/s$. وتتقدم دبابة مباشرة نحو المدفـــع على ارض مستوية وبسرعة تساوي $10\ ft/s$. كم ينبغي أن تكون المسافة بين المدفع والدبابة في لحظة القذف إذا أريد للقذيفة أن تصيب الدبابة ؟

الحــل :

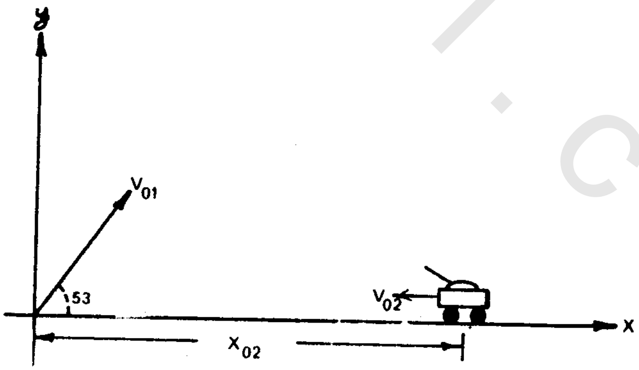
نختار مبدأ جملة المقارنة عند فوهة المدفـع والمحور ox أفقياً نحو اليمـين والمحور oy شاقولياً نحو الاعلى . فتكون سرعة القذيفة الإبتدائية وموضعها الابتدائي معطى بالمعادلات :

$v_{oy}=200\times0.80=160ft/s$ ، $v_{ox} = 200 \times 0.60 = 120\ ft/s$ ، $y_o = 0$ ، $x_o = 0$

أما المعادلات التي تعين موضع القذيفة بعد انقضاء زمن t على لحظة الاطلاق فهي :

$$x = 120\ t \quad , \quad y = 160\ t - 16.0\ t^2$$

وتكون المعادلات التي تحدد موضع الدبابة هي : $x=x_o - v_o t$ ، $y = 0$ وذلك واضح من الشكل (٦ ـ ٣) لان الدبابة تسير بسرعـة منتظمة. وحيث x_o موضع الدبابة عند بدء الزمن (أي لحظـة اطلاق القذيفـة) وهي المسافة المطلوب تحديدها . أما v_o فهي سرعة الدبابة وهي في الاتجاه السالب لـ ox . وبالتالي فان معادلات حركة الدبابة في الجملة الاحداثية نفسها هي :



الشكل (٦ ـ ٣)

$$x = x_o - 10\,t \qquad\qquad y = 0$$

وحتى تصيب القذيفة الدبابة يجب أن تكونا في موضع واحد في نفس اللحظة ، أي أن يكون لمركبتي شعاع الموضع لكل من المتحركين نفس القيمة (في نفس الجملة) ، فنحصل على معادلتين بمجهولين t و x_o وهما :

$$x_o - 10\,t = 120\,t \quad , \quad 0 = 160\,t - 16{\cdot}0\,t^2$$

ونجد من المعادلة الثانية أن : $t = 10\,s$ ، وبالتبديل في المعـــادلة الاولى نحصل على :

$$x_o = 120 \times 10 + 10 \times 10 = 1300\ ft$$

فالاصابة تكون محققة ، في ظروف التوجيه المعطـــاة ، إذا اطلقت القذيفة عندما تكون الدبابة على بعـد مقداره $1300\,ft$ من المدفع وتحصل الاصابة بعد عشر ثوان من لحظة اطلاق القذيفة .

* * *

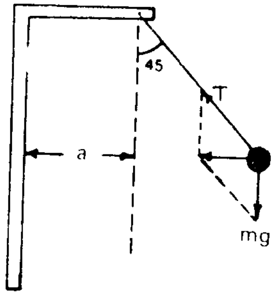
مسالة رقم (٦ ــ ٤) :

(أ) ماهو عدد الدورات التي ينبغي أن يدور بها الجهاز المبن في الشكل (٦ ــ ٤) ، حول محور شاقولي ، في الثانيـة الواحدة ، حتى يصنع الخيط زاوية مقدارها $45°$ مع الشاقول ؟ (ب) ماهو توتر الحبل عندئـــذ ؟ (نفرض أن $L = 20\,cm$ ، $a = 10\,cm$ ، $m = 200\,g$) .

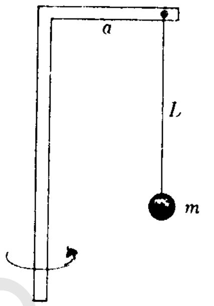
الحــل :

(أ) تخضع الكرة اثناء حركتها إلى قوتين هما الثقل $m\vec{g}$ وتوترالخيط

$\vec{T}$، انظر الشكل (٦ — ٥) . وتصنع القوة T مع الشاقول في هــذا



الشكل (٦ — ٥)



الشكل (٦ — ٤)

الشكل زاوية مقدارها $45°$. إن الكرة بحسب المسألة تقوم بحركة دائرية منتظمة يقع مركزها على محور الدوران ، فيكون انصف قطر المسار ($a + L \sin 45°$) . واذا كتبنا تساوي القوة الجابذة مع محصلة القوى المؤثرة في الاتجاه القطري فاننا نجد بفرض أن ω سرعة الدوران الزاوية :

$$m\,r\,\omega^2 = T \sin 45 \qquad (1)$$

وليس هناك تسارع في الاتجاه الشاقولي لذلك يكون :

$$T \cos 45 = m\,g \qquad (2)$$

وبحذف T من المعادلتين (1) و (2) نجد :

$$m(a + L\sqrt{2}/2)\,\omega^2 = mg$$

أو :

$$\omega^2 = g / (a + L\sqrt{2}/2)$$

نعوض بالقيم العددية وهي : $g = 980\ cm/s^2$ ، $a = 10\ cm$ ، $L = 20\ cm$

فنجد :

$$\omega^2 = 40.7$$

ومنه :

$$\omega = 6.4\ rad/s$$

ويكون :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6.40}{6.28} = 1.02$$ دورة كل ثانية

(ب) نعوض في العلاقة (2) لايجاد T فيكون :

$$T = mg/(\sqrt{2}/2) = 200 \times 980 \div 1.42/2 = 2.77 \times 10^5$$ دينة

* * *

مسالة رقم (٦ ــ ٥) :

نفرض أننا نريد إنشاء محطة فضائية أو وضع قمر صناعي بحيث يدور في مستوي خط الاستواء الأرضي ، وذلك على إرتفاع يجعله يدور مع الأرض وبحيث يبقى دوماً فوق النقطة نفسها ، أوجد ارتفاع المحطة الفضائية هذا .

الحـل :

إن القوة الرئيسية المؤثرة في القمر الصناعي هي قوة جذب الأرض له أي : $G\,mm_E / r^2$. أما بقاء المحطة (أو القمر) فوق النقطة نفسها من سطح الأرض فلا يتم إلا إذا تساوى دور الارض مع دور المحطة (أو القمر) وبكتابة القوة الجابذة مساوية إلى قوة التجاذب العالمي نجد :

$$G\,mm_E/(R+h)^2 = m(R+h)\,\omega^2 \qquad (1)$$

حيث h هو ارتفاع القمر فوق سطح الارض و R نصف قطر الأرض .

إلا أن : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ حيث T دور الأرض حول نفسها . نعوض في العلاقة (1) فنجد :

$$G\,mm_E = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,(R+h)^3$$

نختصر على m ونكتب العلاقة بالشكل :

$$(R+h)^3 = \frac{Gm_E}{4\pi^2} T^2$$

ومنه :

$$R+h = \left(\frac{Gm_E}{4\pi^2}\ T^2\right)^{1/3}$$

$$h = \left(\frac{Gm_E}{4\pi^2}\ T^2\right)^{1/3} - R$$

نعوض الآن بالقيم العددية وهي :

$G = 6.67 \times 10^{-8}$ dyne . cm^2/g^2

$R = 6.4 \times 10^8$ cm

$T = 24 \times 3600$ s

$m_E = 5.98 \times 10^{27}$ g

اذن يكون :

$$h = \left[\frac{(6.67\times10^{-8}) \times (5.98 \times 10^{27})}{4\pi^2} \times (24\times3600)^2\right]^{1/3} - 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$h = (75.8 \times 10^{27})^{1/3} - 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$h = 4.25 \times 10^9 - 6.4 \times 10^8 = (42.5 - 6.4) \times 10^8 \text{ cm}$$

$$h = 36.1 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$h = 36.1 \times 10^3 \text{ km}$$

* * *