الفصل الخامس

قانون نيوتن الثاني . الثقالة

علم التحريك :

إن علم التحريك هو العلم الذي يربط ما بين الحركة ومسبباتها . فنستطيع بدءاً من معرفة القوى المؤثرة في جسم ومعرفةخاصة من خواصه، وهي ما نسميها بالكتلة ، أن نحدد موضع الجسم وسرعته في أية لحظة أخرى تلي لحظة معينة نعرف عندها سرعة الجسم وموضعه . نسمي القيم التي نعرفها في اللحظة المعينة الشروط الابتدائية . فالتحريك إذن يربط ما بين مفهومين الأول مفهوم القوة (المسبِّب) والثاني هو مفهوم التسارع .

قانون نيوتن الثاني :

لاتبدأ الاجسام بالحركة (أي بالتسارع) من تلقاء نفسها ولا بد من وجود قوة لتسريع جسم أو إبطائه . كذلك نلاحظ أننا نحتاج إلى قوة حتى نحرف جسماً عن مساره المستقيم . وهكذا نجد أننا في الحالات الثلاث (تسريع أو ابطاء أو تغيير منحى) نحتاج إلى قوة وأننا نستطيع أن نمثل جميع هذه التغيرات بتحديد التسارع . فالتسارع هو نتيجة تطبيق قوة معينة . تدل التجربة على أن اتجاه التسارع هذا هو اتجاه القوة ، وان نسبة

مقدار القوة إلى مقدار التسارع يساوي إلى مقدار ثابت من أجل الجسم نفسه . فيمكن أن نعتبر أن هذه النسبة الثابتة خاصة من خواص الجسم نسميها الكتلة وهي مقدار سلّمي فيكون لدينا :

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad (5-1)$$

يدعى هذا القانون أحياناً قانون التحريك الأساسي ، ويدعى تعريف الكتلة بهذا الشكل التعريف التحريكي . إن المعادلة (5-1) معادلة شعاعية يمكن أن نطبق على كل طرف من طرفيها قواعد تركيب الاشعة وتحليلها . فاذا أثرت في جسم ما على سبيل المثال عدة قوى وكانت حركة الجسم في مستوٍ ، نستطيع أن نكتب :

$$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a} \quad \text{أو :} \quad \Sigma F_x = m\,a_x \;،\; \Sigma F_y = m\,a_y \qquad (5-2)$$

قانون نيوتن الأول :

نلاحظ من العلاقة (5-2) أنه إذا كانت القوة الحاصلة الفاعلة في جسم ($\Sigma\vec{F}$) مساوية للصفر كان تسارع الجسم صفراً ، أي أن سرعته تبقى ثابتة (في المنحى والمقدار) . فاذا كان الجسم ساكناً فان الثابت يساوي الصفر ويبقى مساوياً للصفر . أما إذا كان متحركاً بسرعة ثابتة ، فسيبقى متحركاً على خط مستقيم وبسرعة عددية ثابتة إلى ما لانهاية .

الكتلة والوزن :

إن وزن جسم ما هو القوة التي تجذب الأرض بها هذا الجسم نحوها

ونسميها قوة الثقالة . في حالة السقوط وعند إهمال مقاومة الهواء تكون محصلة القوى الفاعلة بالجسم هي وزنه $\vec{w}$ فقط ، ويكون تسارع الجسم هو تسارع الثقالة $\vec{g}$. أما كتلته فتساوي إلى :

$$m = \frac{\Sigma \vec{F}}{\vec{a}} = \frac{w}{g} \tag{5-3}$$

نلاحظ أن كتلة الجسم مقدار ثابت لا يتغير بتغير موضعه أما وزنه فيتغير بسبب تغير g من مكان لآخر على سطح الأرض .

قانون نيوتن في الثقالة العالمية :

إن خاصة جذب الأرض للاجسام القريبة منها لاتقتصر على الأرض وحدها وإنما هي خاصة تتمتع بها الأجسام كلها لأن لكل منها كتلة . وهذا ما اكتشفه السير اسحق نيوتن حين قال : إن كل جزيئة من المادة في الكون تجذب كل جزيئة أخرى بقوة متناسبة مع جداء كتلتي الجزيئتين ومتناسبة عكساً مع مربع المسافة بينهما أي أن :

$$F = G \frac{mm'}{r^2} \tag{5-4}$$

حيث G ثابتة تسمى ثابتة الثقالة وهي تساوي الى :

$$G = 6.670 \times 10^{-8} \text{ dyne cm}^2/\text{g}^2$$

أو : $$G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ newton} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

الجملة الإحداثية وجملة المقارنة والجمل العطالية :

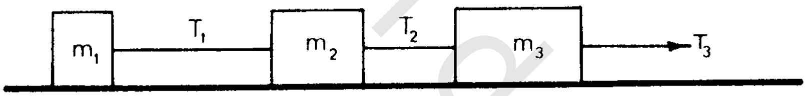
إن المعادلة (5-1) معادلة شعاعية تحتاج إلى جملة احداثية حتى نعين كلاً

من شعاعي التسارع والقوة . وبما أن الحركة نسبية فيمكن لمراقبين متحركين بالنسبة لبعضهما أن يقيسا سرعاً وتسارعات مختلفة . علينا اذن تحديد الجملة الاحداثية منذ البداية ووصف كل الحوادث بالنسبة لها . ندعو الجملة الاحداثية المتماسكة مع المراقب ، الذي يقيس المقادير كلها ، جملة مقارنة المراقب . في الواقع إن قوانين نيوتن المذكورة لاتصح إلا إذا كان المراقب ساكناً أو متحركاً بسرعة منتظمة (ثابتة في المقدار والاتجاه). نسمي الجمل المتحركة بالنسبة لبعضها بعضاً بسرع ثابتة الجمل العطالية .

* * *

مسألة رقم (٥ ــ ١) :

توصل ثلاثة قوالب على النحو المبين في الشكل (٥ ــ ١) ، والقوالب موجودة على طاولة أفقية عديمة الاحتكاك . وتجر هذه القوالب نحو اليمين



الشكل (٥ ــ ١)

بقوة $T_3 = 60$ newton . أوجد التوترين T_1 و T_2 إذا كانت $m_1 = 10$ kg و $m_2 = 20$ kg، و $m_3 = 30$ kg .

الحل :

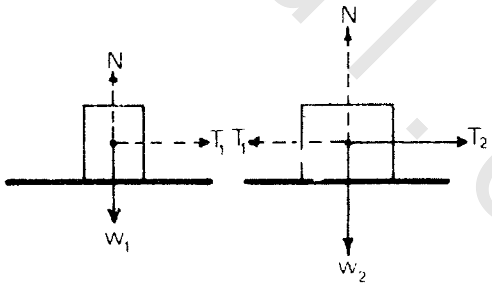
إذا اعتبرنا الجسم أو الجملة مكونة من القوالب الثلاثة ، تكون القوى

الخارجية المؤثرة على هذه الجملة هي : قوة الشد $\vec{T_3}$ ، واثقال القوالب الثلاثة المتّجهة نحو الأسفل والعمودية على الطاولة ، ورد فعـــل الطاولة الشاقولي والمتّجه نحو الأعلى (لأن الطاولة عديمة الاحتكاك) . ويكون لقوة الشد T_3 فقط مركبة باتجاه الحركة الأفقي ، لذلك فإن تسارع الجسم في الاتجاه الأفقي يعطى من العلاقة :

$$M\,a = T_3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad (1)$$

حيث ترمز M إلى الكتلة الكلية ،وهي تساوي مجموع كتل القوالب الثلاثة إذا أهملنا كتلة الحبال . إن التسارع a المستنتج هو تسارع القوالب الثلاثة (لأننا افترضنا ضمناً أن الحبال ثابتة الطول فيكون عملها بالتالي نقل نقطة تطبيق القوة فقط) .

لنرسم بعدئذ مخطط الجسم الحر لكــــل من m_1 و m_2 كما في الشكل (٥ ــ ٢) ، ثم نكتب معادلة الحركة في الاتجاه الأفقي لكل من القالبين



الشكل (٥ ــ ٢)

فنحصل على : $m_1 \ a = T_1$. وبتعويض قيمة a من العلاقة (1) نجد :

$$T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 = \frac{10}{60} 60 = 10 \text{ newton}$$

ويكون : $m_2 a = T_2 - T_1$ أو :

$$T_2 = m_2 a + T_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 = \frac{10 + 20}{60} \times 60 = 30 \text{ newton}$$

★ ★ ★

مسألة رقم (٥ ــ ٢)

لدينا قالبان متماسان مستقران على طاولة أفقية عديمة الاحتكاك . تطبق قوة أفقية على أحد القالبين ، كما هو مبين في الشكل (٥ ــ ٣) والمطلوب : (أ) أوجد قوة التماس مابين القالبين إذا كان : $m_1 = 2.0$ kg و $m_2 = 1.0$ kg و $F = 3.0$ nt . (ب) بيّن أنه إذا طبقت القوة نفسها على m_2 بدل m_1 فان قوة التماس مابين القالبين ستكون 2.0 nt؟ . (حـ) كم تكون قوة التماس إذا لم تكن الطاولة عديمة الاحتكاك ، وكان عامل الاحتكاك بين القطعتين والطاولة 0.052 في الحالة الأولى ، أي حالة الشكل (٥ــ٣)؟

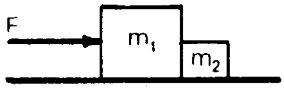
الحـــل :

(أ) نبدأ كما في المسألة السابقة بحساب التسارع المشترك للقالبين في الاتجاه الافقي فنجد :

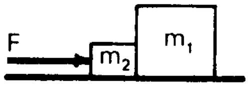
$$F = (m_1 + m_2) a$$

أو:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{3.0}{2.0+1.0} = 1.0\ m/s^2$$



الشكل (٥ – ٣)



الشكل (٥ – ٤)

ثم نعتبر أن الجسم المدروس هو القالب m_2 فقط ، فتكون القوى المؤثرة فيه ثقله وردفعل الطاولةوفعل القالب m_1 عليه .وهذهالقوة الأخيرة في الاتجاه الأفقي (عمودية على سطح التماس) وهي التي تعطي القـــالب ذا الكتلة m_2 التسارع السابق . لذلك فان :

$$F_t = m_2 a = (\ 1.0\ kg\ )\ (\ 1.0\ m/s^2\ ) = 1.0 newton$$

(ب) عندما تطبق F على m_2 كما في الشكل (٥ – ٤) يبقى التسارع الافقي المشترك نفسه، إلا أن قوة التماس في هذه الحالة هي التي تسبب التسارع الافقي للقالب m_1 فهي تساوي إلى :

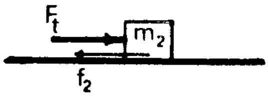
$$F'_t = m_1\ a = (\ 2.0\ kg\ )\ (\ 1.0\ m/s^2\ ) = 2.0\ newton$$

(حـ) تكون مركبة القوى الخارجية في الاتجاه الأفقي في هـذه الحالة القوة المطبقة F وقوة الاحتكاك f التي تساوي الى $f = \mu N$ ، حيث N القوة الضاغطة ، وتساوي في هذه الحالة وزن القـــالبين ، انظر الشكل (٥ – ٥) وهذه القوة تعاكس الحركة لذلك يكون

$$F - f = (\ m_1 + m_2\ )\ a$$

أو : $$a = \frac{3.0 - 0.052 \times 3.0 \times 9.8}{3.0} = 0.5\ m/s^2$$

الشكل (٥ – ٥)



الشكل (٥–٦)

وتكون قوة التماس F_t التي تدفع الكتلة m_2 ، انظر الشكل (٥–٦) :

$$F_t = m_2 a + f_2 = (1.0)(0.5) + 0.052 \times 1.0 \times 9.8$$

$$F_t = 2.0\ \text{newton}$$

فهي قوة التماس نفسها كما كانت في حالة عدم وجود احتكاك .

* * *

مسالة رقم (٥ – ٣) :

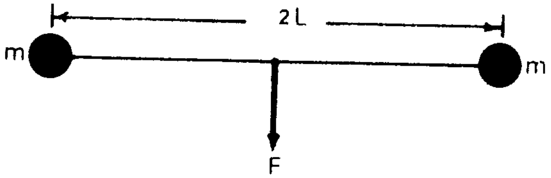
يربط جسمان ، كتلة كل منهما m ، بسلك خفيف طوله $2L$ على النحو المبين في الشكل (٥–٧) . تطبق بصورة مستمرة قوة $\vec{F}$ عند منتصف السلك $(x = 0)$ بحيث تبقى عمودية على وضع السلك الإبتدائي . بيّن أن تسارع m في الاتجاه الذي يصنع زاوية قائمة مع $\vec{F}$ ، أي الاتجاه ox ، يعطى بالعلاقة :

$$a_x = \frac{F}{2m} \cdot \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}}$$

حيث ترمز x الى البعد العمودي لأحد الجسيمين عن خط فعل القوة F

الحـل :

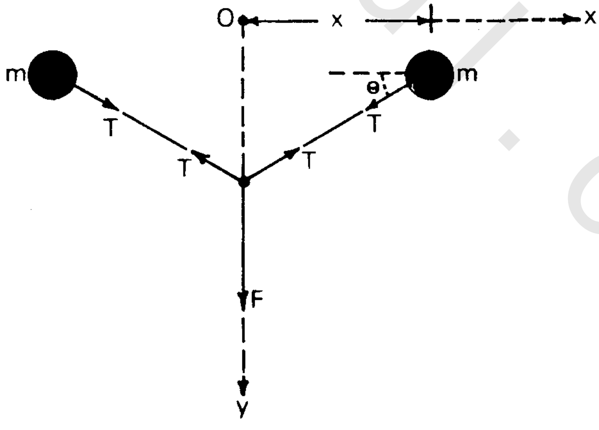
لنأخذ منتصف السلك في الوضع الابتدائي مبدأ للجملةالتي نقيس التسارعات بالنسبة لها . واتجاه ox هو اتجـاه السلك الابتدائي والاتجاه oy منطبق على خط عمل



الشكل (٥ــ ٧)

القوة F . بعد لحظة من تطبيق القوة يأخذ السلك الوضع المبــين في الشكل (٥ ــ ٨) وتكون القوة المطبقة على كل من الجسيمين هي قوة شد السلك T بسبب تناظر المسألة . فلو اسقطنا قانون التحريك الاساسي أي المعادلة (1 - 5) على ox لحصلنا على :

$$m\,a_x = T\cos\Theta = T\,\frac{x}{L}$$



الشكل (٥ ــ ٨)

كما أنه لدينا دوماً بسبب التناظر :

$$F = 2\,T \sin \Theta = 2\,T \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{L}$$

أو : $T = \frac{F}{2} \frac{L}{\sqrt{L^2 - x^2}}$ وذلك بفرض

أن السلك لايقبل الاستطالة .

وبالتعويض في المعادلة الاولى نحصل على :

$$m\,a_x = \frac{F}{2} \frac{L}{\sqrt{L^2 - x^2}} \frac{x}{L}$$

أو : $a_x = \frac{F}{2\,m} \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}}$

* * *

مسالة رقم (٥ ــ ٤) :

تتعلق مقاومة الهواء لحركة الأجسام عندما تسقط سقوطاً حراً بعدة عوامل مثل : حجم الجسم وشكله ، وكثافة الهواء ودرجة حرارته ،وكذلك سرعة الجسم في الهواء . ومن الافتراضات التقريبية المفيدة هي أن قوة المقاومة $\vec{f_R}$ تتناسب مع السرعة وتتجه بصورة معاكسة لها ، أي أن : $\vec{f_R} = -k\,\vec{v}$ حيث R ثابت تتحدد قيمته بعوامل أخرى غير السرعة وفق الحالة المدروسة . نفترض جسماً يسقط سقوطاًحراً بدءاً من السكون ، والمطلوب : (أ) بيّن أن قانون نيوتن الثاني يعطي :

$$mg - k\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (1)$$

او :

$$mg - kv = ma$$

(ب) بيّن أن تسارع الجسم ينعدم عندما يصل الى السرعة $v_T = mg/k$ والتي تدعى بالسرعة الحدّية .

(ﺣ) برهن أن السرعة تتغير مع الزمن بحسب العلاقة :

$$v = v_T\,(1 - e^{-kt/m})$$

الحــل :

(أ) نختار أولاً جملة احداثية وليكن مبدأ الجملة نقطة ترك الجسم ، والمحور ox أفقي والمحور oy شاقولي متجه نحو الاسفل . ثم نطبق قانون نيوتن الثاني . إن القوى المؤثرة على الجسم هي وزنه وقوة مقاومة الهواء فنكتب :

$$m\vec{g} + \vec{f}_R = m\vec{a}$$

او :

$$m\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{a}$$

وبالاسقاط على المحور oy نجد :

$$mg - k\,v_y = m\,a_y \qquad (2)$$

ولما كان الجسم يسقط سقوطاً حراً بدون سرعة ابتدائية بالاتجاه y فـان $v_{ox} = o$. ويقضي قانون نيوتن الأول بأن تبقى v_x معدومة وذلك لانعدام القوى المؤثرة في الجسم بالاتجاه x ، وعليه فان $v = v_y$ ، وباستطاعتنا اذن كتابة المعادلة (2) بالشكل :

$$m\,g - k\,v = m\,a_y \qquad (3)$$

(ب) نجد من المعادلة (3) أن $a_y = 0$ عندما : $v = \frac{m\,g}{k}$. ولا يمكن أن تزداد السرعة بعد هذا لان التسارع كما نرى هو المجموع الجبري لحدين الاول ثابت ، والثاني يزداد بازدياد السرعة ، أي كلما ازداد التسارع ، واشارته سالبة لذلك لابد وأن تصل السرعة الى قيمة ينعدم من أجلها التسارع ويبقى بعدها معدوماً فيتابع الجسم سقوطه بسرعة منتظمة .

(حـ) يمكن أن نكتب المعادلة (3) على الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \qquad (4)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ v ذات طرف ثان . نحلها أولاً بدون طرف ثان أي نحل المعادلة :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = 0$$

التي نكتبها بالشكل :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\, dt$$

وبمكاملة الطرفين نجد :

$$\ln \frac{v}{\mu} = -\frac{k}{m}\, t$$

وذلك بفرض μ ثابت التكامل . وباستطاعتنا أيضاً كتابة العلاقة السابقة بالشكل :

أو :
$$\frac{v}{\mu} = e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = \mu e^{-\frac{k}{m}t} \qquad (5)$$

نحدد الآن قيمة μ بحيث تحقق العلاقة (4) . فنشتق العلاقة (5) باعتبار أن μ قد يكون تابعاً لـ t ونعوض في العلاقة (4) فنجد :

$$\frac{dv}{dt} = \mu' e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m}\mu e^{-\frac{k}{m}t}$$

اذن :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = \mu' e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m}\mu e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m}\mu e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = \mu' e^{-\frac{k}{m}t}$$

واخيراً نجد بالتعويض في العلاقه (4) أن :

$$\mu' e^{-\frac{k}{m}t} = g$$

$$\mu' = g e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\therefore \ \mu = g \int e^{\frac{k}{m}t} dt = g \frac{m}{k} \int e^{\frac{k}{m}t} d\left(\frac{k}{m}t\right)$$

$$\mu = \frac{gm}{k} e^{\frac{k}{m}t} + c$$

حيث c ثابت تكامل نحدده من شروط البدء . نعوض في العلاقة (5) فنجد :

$$v = \frac{gm}{k} + c\, e^{-\frac{k}{m} t}$$

وتقضي شروط البدء أن تكون $v = o$ عندما $t = o$ إذن :

$$o = \frac{gm}{k} + c$$

ومنه : $c = -\frac{gm}{k}$ وأخيراً يكون :

$$v = \frac{gm}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right] = v_T\left[1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right]$$

* * *

مسالة رقم (٥ ــ ٥) :

(أ) أوجد السرعة التي يجب أن يطلق بها جسم شاقولياً نحو الاعلى كي يصعد الى اللانهاية فوق سطح الارض وذلك باهمال الاحتكاك . أوجد هذه السرعة بدلالة تسارع الثقالة عند سطح الارض g_o ونصف قطر الارض R ، تسمى هذه السرعة بسرعة الفرار . (ب) أوجد بدلالة نفس المقادير السرعة التي يصدم بها جسم الارض إذا هوى من نقطة تبعد بعداً لانهائياً . (حـ) أحسب كلتي السرعتين بالاميال في الساعة . (د) فسر عدم كون السرعتين لانهائيتين .

الحـل :

(أ) يخضع الجسم في هذه الحالة الى قوة الثقالة التي تتغير مع تغير البعد بين الجسم ومركز الارض ، وتعطى هذه القوة بقانون نيوتن في التجاذب. إن القوة والتسارع شاقوليان في هذه الحالة ، أو بالاحرى قطريان ، لذلك يكون :

$$m\,a = -G\,\frac{m\,m_E}{r^2}$$

أو :

$$a = -G\,\frac{m_E}{r^2}$$

وبما أن .

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt} = v\,\frac{dv}{dr}$$

فان :

$$v\,\frac{dv}{dr} = -\,\frac{Gm_E}{r^2}$$

أو :

(1)

$$v\,dv = -\,\frac{Gm_E}{r^2}\,dr$$

وبالمكاملة نجد :

$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = G\,m_E\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

أو :

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\,G\,m_E\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

وتكون سرعة الفرار هي السرعة الابتدائية اللازمة حتى يصل الجسم الى اللانهاية أي ($r_2 = \infty$) وبدون سرعة ، أي ($v_2 = 0$) ، وهي أصغر سرعة

يجب أن يطلق بها الجسم من سطح الارض حيث $r_1 = R$. اذن :

$$v_1^2 = 2\,G\,m_E/R$$

وبما أن التسارع عند سطح الارض يساوي الى : $g_o = G\,m_E/R^2$

فان : $v_1^2 = 2\,g_o\,R$. وتكون أخيراً سرعة الفرار معطاة بالعلاقة :

$$v_1 = \sqrt{2\ g_o\ R}$$

(ب) يتسارع الجسم في حالة السقوط ، ويعطي قانون نيوتن الثاني في هذه الحالة علاقة مماثلة للعلاقة (1) ، إلا أن الاختلاف يكمن في حدود التكامل الذي نجريه . وتصبح هذه الحدود في حالة سقوط جسم من اللانهاية بسرعة معدومة كالآتي :

عندما $r = \infty$ تكون v مساوية للصفر ، ونفرض v هي سرعـــة الجسم لما $r = R$ فيكون :

$$\int_0^v v\,dv = \int_\infty^R -G\,\frac{m_E}{r^2}\,dr$$

$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v = -G\,m_E\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^R$$

$$\frac{v^2}{2} = +\frac{G m_E}{R}$$

ومنه : $$v^2 = 2\,\frac{G\,m_E}{R} = 2\,g_o R$$

وهي نفس السرعة السابقة .

(ج) نحسب v بالتعويض بالقيم العددية . لدينا :

$R = 6.38 \times 10^6$ m و $g_o = 9.8$ m/s^2 اذن :

$$v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.38 \times 10^{+6}} = \sqrt{1.25 \times 10^8} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

وتعطي جداول التحويل أن في كل ميل في الساعة يوجد 0.44704 متراً في الثانية اذن :

$$v = \frac{1.12 \times 10^4}{0.44704} = 2.5 \times 10^4 \text{ mi/hr}$$

(د) إن التناسب العكسي بين قوة التجاذب و r^2 يجعل قوة التجاذب تضمحل مع ازدياد البعد بين الجسمين المتجاذبين ، أضف إلى ذلك صغر قيمة ثابت التجاذب العالمي G . ويقضي قانون نيوتن الأول أنه اذا انعدمت القوة الفاعلة في جسم فان تسارعه ينعدم أي أن سرعته تثبت فاذا تمكن الجسم المقذوف ، بفضل سرعة قذفه البدائية ، من الابتعاد لمسافة تجعل تأثير الجاذبية مهملاً فان هذا الجسم يسير بسرعته التي بلغها حتى اللانهاية . هذا في حالة القذف للأعلى أما في حالة السقوط فنقول بأن بعدالجسم ، وهو كبير في البدء ، يجعل تأثير قوة الجذب صغيراً ولا تزداد سرعة الجسم الا قليلاً لان التسارع يكون قليلا ، ثم تعمل قوة الثقالة على زيادة سرعة الجسم لدى اقترابه من سطح الارض ، والمسافة التي يكون تأثير قوة الثقالة فيها ملموساً هي مسافة محدودة ، ولذا فان سرعة وصول الجسم الى سطح الارض محدودة ، أضف الى ذلك أن أصغر قيمة لـ r ليست صفراً بل هي نصف قطر الارض R .

* * *