الفصل الرابع

الحركة المستقيمة

الحركة المستقيمة :

إن باستطاعتنا دراسة حركة جسم في الفراغ إذا علمنا حركة مساقطه على ثلاثة محاور متعامدة وهي ثلاث حركات على خطوط مستقيمة .

السرعة الوسطى في الحركة المستقيمة :

نعرّف السرعة الوسطى لجسم يتحرك على خط مستقيم بحيث يكون في الموضع الذي فاصلته x_1 في اللحظة t_1 ثم يصبح في الموضع الذي فاصلته x_2 في اللحظة t_2 بأنها :

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (4-1)$$

السرعة الآنية :

نسمي سرعة الجسم في لحظة ما من الزمن ، أو في نقطة محددة من مساره بالسرعة الآنية ،وتعرّف رياضياً بأنها نهاية النسبة $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ لما تنتهي Δt إلى الصفر أي أنها مشتق الفاصلة بالنسبة للزمن أو :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (4-2)$$

التسارع الوسطي والتسارع الآني :

إذا تغيرت سرعة جسم قيل بأن له تسارعاً . فاذا كانت سرعته v_1 في لحظة t_1 وأضحت هذه السرعة في اللحظة t_2 مساوية v_2 فان التسارع الوسطي للجسم ورمزه $\bar{a}$ يعرف بالعلاقة :

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (4-3)$$

ونعرّف التسارع الآني بالطريقة التي عرفنا بها السرعة الآنية فنكتب :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (4-4)$$

واذا كانت سرعة الجسم تزداد مع الزمن كان a موجباً ونقول بأن الجسم يتسارع أما إذا كانت السرعة تتناقص مع مرور الزمن فان a يكون سالباً ونقول بأن الجسم يتباطأ .

الحركة الخطية بتسارع ثابت :

إذا كان الجسم يتحرك حركة خطية بتسارع ثابت a فاننا نستطيع أن نحدد موضع الجسم وسرعته في كل لحظة ويكون لدينا :

$$v = v_0 + a\,t \qquad (4-5)$$

بفرض v_0 سرعة المتحرك البدائية . وإذا كان الجسم المتحرك في المبدأ في اللحظة $t = 0$ ، كان :

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\, a\, t^2 \qquad (4-6)$$

وإذا حذفنا t من المعادلتين (4-5) و (4-6) وجدنا العلاقة :

$$v^2 = v_o^2 + 2\,a\,x \tag{4-7}$$

الاجسام الساقطة سقوطاً حراً :

تسقط الاجسام بتسارع ثابت نرمز له بـ g ولا يختلف الا اختلافاً ضئيلاً من مكان لآخر والقيمة العددية لـ g هي :

$$g = 32\ \text{ft}/\text{s}^2 = 9.8\ \text{m}/\text{s}^2$$

وتصلح في هذه الحالة المعادلات (4-5) و (4-6) و (4-7) لبيان موضع وسرعة الجسم الساقط بعد وضع g بدلاً من a في هذه العلاقات فيكون لدينا اذن :

$$v = v_o + gt \tag{4-8}$$

$$x = v_o\,t + \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{4-9}$$

$$v^2 = v_o^2 + 2\,g\,x \tag{4-10}$$

الأجسام المقذوفة للأعلى :

تصلح القوانين (4-8) و (4-9) و (4-10) لمعالجة مسائل قذف الاجسام نحو الأعلى اذا راعينا الأمور التالية :

(أ) ابدال g بـ -g بحيث تصبح هذه القوانين بالشكل :

$$v = v_o - gt \tag{4-11}$$

$$x = v_o\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{4-12}$$

$$v^2 = v_o^2 - 2\,gx \tag{4-13}$$

(ب) تؤخذ نقطة القذف مبدأ لقياس المسافات وتعتبر المسافات أعلى نقطة القذف موجبة وأسفلها سالبة .

(حـ) تعتبر السرع في اثناء صعود الجسم موجبة واثناء هبوطه سالبة .

السرعة العددية والسرعة المتجهة :

السرعة العددية مقدار سلّمي يحدد معدل قطع الجسم للمسافة دون أن يبين اتجاه حركة الجسم . أما السرعة المتجهة فهي مقدار شعاعي . وللسرعة المتجهة نفس مقدار السرعة العددية إلا أن لها اتجاهاً محدداً . وتتغير السرعة المتجهة لجسم اذا تغير مقدارها أو تغير اتجاهها أو تغير كل من مقدارها واتجاهها .

السرعة المتجهة النسبية :

إذا تحرك جسم B بالنسبة لجسم A بسرعة متجهة $\overrightarrow{V_{BA}}$ وتحرك الجسم A بالنسبة لجسم ثالث E بسرعة $\overrightarrow{V_{AE}}$ ، فان سرعة الجسم الأول B بالنسبة للجسم الثالث E ونرمز لها بالرمز $\overrightarrow{V_{BE}}$ تعطى بالعلاقة الشعاعية :

$$\overrightarrow{V_{BE}} = \overrightarrow{V_{BA}} + \overrightarrow{V_{AE}} \qquad (4-14)$$

ويكون أيضاً: $\overrightarrow{V_{BE}} = -\overrightarrow{V_{EB}}$

* * *

مسألة رقم (٤ ـ ١) :

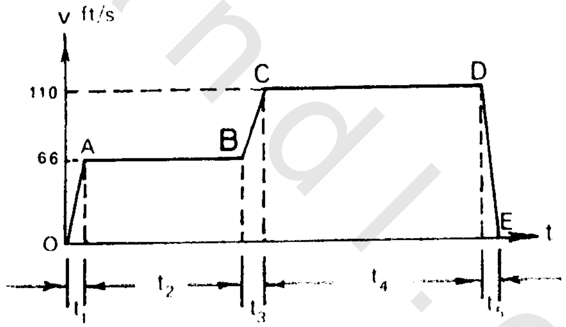
تتسارع سيارة بانتظام بادئة حركتها من السكون على طريق مستقيم فتصل

سرعتها إلى 45 ميلاً في الساعة في 11 ثانية . وتبقى على هذه السرعة مسافة ميل ونصف بسبب وجود جرار أمامها حيث يتاح لها بعد ذلك تجاوز الجرار فتتسارع السيارة بانتظام فتصل سرعتها إلى 75 ميلاً في الساعة وتحتاج لبلوغ هذه السرعة إلى 11 ثانية أيضاً . تسير السيارة بعد ذلك بهذه السرعة لمدة ثلاث دقائق ثم تتباطأ بانتظام بمعدل $11\ ft/s^2$ حتى تقف ، والمطلوب :

وضح الحركة برسم مناسب واحسب (أ) المسافة الكلية التي قطعتها السيارة (ب) الزمن الكلي للحركة (حـ) السرعة الوسطى (د) التسارع الوسطي خلال الـ 142 ثانية الأولى من الحركة .

الحـل :

لعل أفضل تمثيل للحركة هو المخطط الذي يبين تغير السرعة بدلالة الزمن



الشكل (٤ — ١)

وهو مبين في الشكل (٤ — ١) حيث استخدمنا عامل التحويل $88\ ft/s = 60\ mi/hr$ لتحويل السرع إلى أقدام في الثانية . وحيث

بحسب النص : $t_1 = 3\ \text{min}$ ، $t_2 = 11\ \text{s}$ ، $t_1 = 11\ \text{s}$

(أ) لنحسب المسافة الكلية التي قطعتها السيارة :

إن المسافة s_1 التي قطعتها السيارة في الفترة t_1 هي :

$$s_1 = v_o t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

وذلك بحسب قوانين الحركة المتسارعة بانتظام . إلا أن $v_o = 0$ لبدء السيارة حركتها من السكون ثم إن :

$$a_1 = \frac{v_1 - v_o}{t_1} = \frac{66 - 0}{11} = 6\ \text{ft/s}^2$$

$$\therefore s_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times (11)^2 = 3 \times 121 = 363\ \text{ft}$$

ويلاحظ أن هذا يساوي عددياً مساحة المثلث الواقع تحت الخط OA وبالفعل فإن مساحة هذا المثلث في الاحداثيات v,t هي :

$$\frac{1}{2} \times 11\ \text{s} \times 66\ \text{ft/s} = 363\ \text{ft}$$

أما المسافة التي قطعتها السيارة في المرحلة الثانية فهي تساوي بحسب النص ميلاً ونصف ولما كان الميل يعادل 5280 قدماً فان :

$$s_2 = 1.5 \times 5280 = 7920\ \text{ft}$$

وفي المرحلة الثالثة تتسارع السيارة من السرعة 66 ft/s إلى السرعة 110 ft/s خلال 11 ثانية وعليه فان المسافة s_3 التي تقطعها في هذه المرحلة هي بحسب قوانين الحركة المتسارعة بانتظام :

$$s_3 = v_o t_3 + \frac{1}{2} a_3 t_3^2$$

ولدينـا :

$$a_3 = \frac{110 - 66}{11} = \frac{44}{11} = 4 \text{ ft/s}^2 \quad \text{و} \quad t_3 = 11 \text{ s} \quad \text{و} \quad v_o = 66 \text{ ft/s}$$

إذن يكون :

$$s_3 = 66 \times 11 + \frac{1}{2} \times 4 \times (11)^2$$

$$s_3 = 726 + 242 = 968 \text{ ft}$$

وهي تساوي عددياً المساحة الواقعة تحت الخط BC . وبالفعل فـان هـذه المساحة تساوي مساحة مستطيل مضافاً اليها مساحة مثلث وهي تساوي :

$$66 \ \frac{\text{ft}}{\text{s}} \times 11 \text{ s} + \frac{1}{2} \times 11 \text{ s} \times (110 - 66)$$

$$66 \times 11 \text{ ft} + 22 \times 11 \text{ ft} = 88 \times 11 \text{ ft} = 968 \text{ ft}$$

وفي المرحلة الرابعة تسير السيارة بسرعة منتظمة مقدارها 110 ft/s لمـــدة ثلاث دقائق أي 180 s فهي تقطع خلال هذه الفترة مسافة s_4 تساوي :

$$s_4 = 110 \times 180 = 19800 \text{ ft}$$

وفي المرحلة الخامسة تسير السيارة بحركة متباطئة منتقلة من السرعـة 110 ft/s إلى الصفر ، بمعدل 11 ft/s^2 ، ولايجاد المسافة التي تقطعها في هـــذه المرحلة نطبق القانون :

$$v^2 - v_o^2 = 2 as$$

باعتبار $v = 0$ ، $v_o = 110$ ft/s ، $a = -11 \text{ ft/s}^2$ ، $s = s_5$ فنجد :

$$s_5 = \frac{-(110)^2}{-11 \times 2} = 550 \text{ ft}$$

وتكون المسافة الكلية s التي قطعتها السيارة مساوية إلى :

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 363 + 7920 + 968 + 19800 + 550 \text{ ft}$$

$$S = 29601 \text{ ft}$$

(ب) إن الزمن الكلي للحركة وليكن T يساوي :

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$$

ولدينا من النص $t_1 = 11$ s ، $t_3 = 11$ s ، $t_4 = 180$ s ونحسب t_2 و t_5 . لقد سارت السيارة في المرحلة الثانية بسرعة منتظمة مسافة ميل ونصف أي مايعادل 7920 ft وكانت السرعة في هذه المرحلة 66 ft/s إذن يكون :

$$t_2 = \frac{7920}{66} = 120 \text{ s}$$

وفي المرحلة الخامسة لدينا القانون : $v = v_0 + at$

ومنه : $t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 110}{-11} = 10$ s

إذن : $t_5 = 10$ s ويكون :

$$T = 11 + 120 + 11 + 180 + 10 = 322 \text{ s}$$

(حـ) إن السرعة الوسطى $\bar{v}$ هي بالتعريف :

$$\bar{v} = \frac{S}{T}$$

إذن يكون : $\bar{v} = \frac{29601}{322} = 89.16$ ft/s $= 60.8$ mi/hr

(د) إن التسارع الوسطي في الفترة التي طولها 142 ثانية يساوي السرعة النهائية التي تسير بها السيارة في نهاية هذه الفترة على الزمن . وبمـــا أن السيـــارة في نهاية هذه الفترة تكون قد اجتازت المرحلة الاولى والثانية والثالثة وبدأت بالمرحلة الرابعة فان سرعتها في تلك اللحظة هي 110 ft/s وعليه فان تسارع السيارة الوسطي في هذه الفترة هو :

$$a = \frac{110}{142} = 0.78 \text{ ft/s}^2$$

✶ ✶ ✶

مسألة رقم (٤ ـ ٢) :

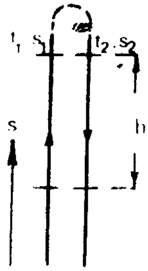
تقاس قيمة التسارع الأرضي g بدقة بالطريقة التاليـة : تطاق كرة بصورة شاقولية نحو الأعلى في أنبوب مفرّغ من الهواء وتقاس لحظات مرور الكرة بطريقة الكترونية أثناء صعودها وكذلك أثناء هبوطها وذلك لدى قطعها لحزمتين ضوئيتين تبعدان مسافة معلومة h عن بعضها مقيسة بدقة . فاذا كانت لحظات مرور الكرة من الحزمتين الضوئيتين أثناء الصعود والهبوط هي t_3 ، t_2 ، t_1 ، t_0 فبرهن أن :

$$g = \frac{2h}{(t_1-t_0)(t_2-t_0)} = \frac{2h}{(t_3-t_1)(t_1-t_0)}$$

الحـــل :

يبين الشكل (٤ ـ ٢) مسار الكرة وقد فصلنا بين طريق الصعود وطريق الهبوط للتوضيح . نفرض v_0 السرعة البدائية التي انطلقت بها الكرة نحو

الأعلى في اللحظة صفر فيكون لدينا في الموضع الذي يبعد مسافة S_o عن نقطة الانطلاق :



الشكل (٤ — ٢)

$$S_o = v_o\, t_o - \frac{1}{2} g\, t_o^2$$

وفي الوضع S_1 يكون : $S_1 = v_0\, t_1 - \frac{1}{2} g\, t_1^2$

وفي الوضع S_2 يكون : $S_2 = v_o\, t_2 - \frac{1}{2} g\, t_2^2$

وفي الوضع S_3 يكون : $S_3 = v_o\, t_3 - \frac{1}{2} g\, t_3^2$

نحسب $S_1 - S_o = h$ فنجد :

$$S_1 - S_o = h = v_o\,(t_1 - t_o) - \frac{1}{2} g\,(t_1^2 - t_o^2)$$

ومنه :

$$v_o = \frac{h}{t_1 - t_o} + \frac{1}{2} g\,(t_1 + t_o) \qquad (1)$$

نحسب الآن $S_2 - S_o = h$ أيضاً فنجد :

$$S_2 - S_o = h = v_o\,(t_2 - t_o) - \frac{1}{2} g\,(t_2^2 - t_o^2)$$

ومنها نجد :

$$v_o = \frac{h}{t_2 - t_o} + \frac{1}{2} g(t_2 + t_o) \qquad (2)$$

نضع (1) =(2) فيكون :

$$\frac{h}{t_1 - t_o} + \frac{1}{2} g (t_1 + t_o) = \frac{h}{t_2 - t_o} + \frac{1}{2} g (t_2 + t_o)$$

$$h \left[\frac{1}{t_1 - t_o} - \frac{1}{t_2 - t_o} \right] = \frac{1}{2} g \left[t_2 + t_o - t_1 - t_o \right]$$

أو :

$$\frac{2h}{t_2 - t_1} \left[\frac{t_2 - t_o - t_1 + t_o}{(t_1 - t_o)(t_2 - t_o)} \right] = g$$

إذن :

$$g = \frac{2h}{(t_1 - t_o)(t_2 - t_o)}$$

وبطريقة مماثلة نجد :

$$g = \frac{2h}{(t_3 - t_1)(t_1 - t_o)}$$

وعليه فليس هناك ضرورة لمعرفة السرعة الابتدائية للقذيفة .

* * *

مسألة رقم (٤ ـ ٣) :

يعاني قارب بعد ايقاف محركه تسارعاً معاكساً لاتجاه حركته ومتناسباً مع مربع سرعته أي :

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

حيث k ثابت . فاذا فرضنا أن ايقاف المحرك قد تم عندما كانت السرعة $v_o = 20\,ft/s$ ، وأن السرعة تناقصت إلى $10\,ft/s$ خلال 15 ثانية فالمطلوب:

(أ) برهن أن السرعة v في اللحظة t بعد توقف المحرك تعطى بالعلاقة :

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$$

(ب) أوجد قيمة k . (جـ) أوجد قيمة التسارع لحظة ايقاف المحرك .

(د) برهن أن المسافة x المقطوعة في زمن t تساوي :

$$x = \frac{1}{k} \ln (v_0 kt + 1)$$

(هـ) برهن أن السرعة بعد قطع القارب مسافة x تعطى بالعلاقة :

$$v = v_0 e^{-kx}$$

الحـل :

(أ) لدينا العلاقة :

(1) $\frac{dv}{dt} = -kv^2$ وهي علاقة نستطيع كتابتها بالشكل :

$$\frac{dv}{v^2} = -k\,dt$$

وباجراء عملية تكامل على الطرفين نجد :

$$-\frac{1}{v} = -kt + c_1 \qquad (2)$$

حيث c_1 ثابت تكامل نحدده من شروط البدء . فلدينا $v = v_0$ في اللحظة $t = o$ إذن :

$$-\frac{1}{v_0} = o + c_1$$

نعوض في العلاقة (2) فنجد :

$$\frac{1}{v} = + kt + \frac{1}{v_o} \qquad (3)$$

(ب) لايجاد قيمة k نضع المعطيــات العددية للمسألة في المعادلة (3)

فلدينا: $v_o = 20$ ft/s ، $v = 10$ ft/s ، في اللحظة $t = 15$ ثانية إذن يكون :

$$\frac{1}{10} = 15\,k + \frac{1}{20}$$

ومنه :

$$k = \frac{1}{300}$$

(ح) ونجد قيمة التسارع لحظة ايقاف المحرك من العلاقة (١) فهي تساوي $-k\,v_o^2$ أي :

$$-\frac{1}{300} \times (20)^2 = -\frac{4}{3} \quad \text{ft/s}^2$$

(د) نريد الآن علاقة بين x و t ولدينا :

$$\frac{dx}{dt} = v$$

ومن العلاقة (3) نجد :

$$v = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_o}}$$

إذن :

$$dx = \frac{dt}{kt + \frac{1}{v_o}}$$

نكامل الطرفين فنجد :

$$x = \frac{1}{k} \ln\left(kt + \frac{1}{v_0} \right) + c_2 \qquad (4)$$

ونحسب ثابت التكامل c_2 من شروط البدء وهي تقضي أن يكون $x = 0$ في اللحظة $t = 0$ اذن :

$$0 = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{v_0} \right) + c_2$$

ومنه :

$$c_2 = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{v_0}$$

نعوض في العلاقة (4) فنجد :

$$x = \frac{1}{k} \left[\ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right) - \ln \frac{1}{v_0} \right]$$

$$x = \frac{1}{k} \ln \frac{kt + \frac{1}{v_0}}{\frac{1}{v_0}}$$

$$x = \frac{1}{k} \ln(v_0 kt + 1)$$

(ه) نريد الآن علاقة بين v و x . من أجل ذلك نكتب استناداً إلى العلاقه (1) :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -kv^2$$

إلا أن $v = \frac{dx}{dt}$ إذن :

$$\frac{dv}{dx} = -k\,v$$

نعزل الآن المتحولات فنجد :

$$\frac{dv}{v} = -k\,dx$$

نكامل الطرفين فيكون :

$$\ln v = -kx + c_3 \qquad (5)$$

حيث c_3 ثابت تكامل نحدده من شروط البدء . فلدينا $v = v_0$ من أجل $x = 0$ ويعطي تعويض هذه القيم في المعادلة (5) ما يلي :

$$\ln v_0 = c_3$$

إذن :

$$\ln v = -kx + \ln v_0$$

أو :

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kx$$

أو :

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kx}$$

ومنه :

$$v = v_0\,e^{-kx} \qquad (6)$$

اي أن السرعة تتناقص بصورة أسية بازدياد المسافة .

✶ ✶ ✶

مسألة رقم (٤ ــ ٤) :

تعطي المعادلة التالية حركة جسم يسقط سقوطاً حراً بدءاً من السكون في وسط مقاوم :

$$\frac{dv}{dt} = A - B\,v$$

حيث A و B ثابتان . أوجد بدلالة A و B مايلي :

(أ) التسارع البدائي . (ب) السرعة التي تجعل التسارع معدوماً أي السرعة الحدية . (ح) برهن أن السرعة في أي زمن t تعطى بالعلاقة :

$$v = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)$$

الحـل :

(أ) لما كان التسارع معطى بالعلاقة $A - B\,v$ فان التسارع البدائي هو $A - B\,v_o$ بفرض v_o هي قيمة السرعة البدائية . إلا أن $v_o = 0$ بحسب النص حيث أن الجسم بدأ حركته من السكون وعليه فالتسارع البدائي هو A .

(ب) إن السرعة التي تجعل التسارع معدوما هي السرعة التي تجعل المقدار $A - B\,v$ معدوماً . فاذا كانت v_c هي هذه السرعة فان قيمتها هي :

$$v_c = \frac{A}{B}$$

(ج) لايجاد علاقة v بـ t نكتب المعادلة التي تعطي التسارع بالشكل :

$$\frac{dv}{A - Bv} = dt$$

وبضرب الطرف الأيسر بـ B − والتقسيم على B − ثم بإدخال B − تحت رمز التفاضل نجد :

$$-\frac{1}{B}\ \frac{d(-Bv)}{A-Bv}=dt$$

ولما كان تفاضل مقدار لايتغير باضافة مقدار ثابت مثل A على المقدار الموجود وتحت رمز التفاضل فان باستطاعنا أن نكتب العلاقة السابقة أيضاً بالشكل :

$$-\frac{1}{B}\cdot\frac{d(A-Bv)}{A-Bv}=dt$$

أو :

$$-\frac{1}{B}\ln(A-Bv)=t+c \qquad (1)$$

حيث c ثابت تكامل نحدده من شروط البدء . وتقضي هذه الشروط أن يكون $v=0$ في اللحظة $t=0$ وذلك لأن الجسم يبدأ حركته من السكون اذن :

$$-\frac{1}{B}\ln(A)=0+c$$

نعوض c بقيمتها في العلاقة (1) فنجد :

$$-\frac{1}{B}\ln(A-Bv)=t-\frac{1}{B}\ln A$$

نضرب الطرفين بـ B − وننقل حدود اللغريتم إلى نفس الطرف فيكون:

$$\ln(A-Bv)-\ln A=-Bt$$

$$\ln\frac{A-Bv}{A}=\ln\left(1-\frac{B}{A}v\right)=-Bt$$

ومنه :

$$1-\frac{B}{A}v=e^{-Bt}$$

وبالاصلاح نجد :

$$v=\frac{A}{B}\left(1-e^{-Bt}\right)$$

★ ★ ★

مسالة رقم (٤ ـ ٥) :

يريد رجل اجتياز نهر يجري ماؤه بسرعة $1200\ m/hr$ وعرضه $L = 500\ m$. فاذا كانت سرعة تجذيف الرجل للقارب الذي يركب فيه هي $3000\ m/hr$ بالنسبة للماء ، وإذا كانت سرعته ماشياً هي $u = 5000\ m/hr$ فأوجد (أ) الطريقة التي ينبغي أن يجزّىء بها الرجل رحلته بين المشي والتجذيف كي يصل إلى نقطة مقابلة لنقطة انطلاقه تماماً في أقصر زمن ممكن . (ب) ما هو الزمن الذي يحتاجه لانجاز رحلته ؟ (ج) كيف يجب أن يوجه الرجل قاربه إذا أراد بلوغ النقطة المقابلة لنقطة انطلاقه بطريقة التجذيف فقط ؟

الحل :

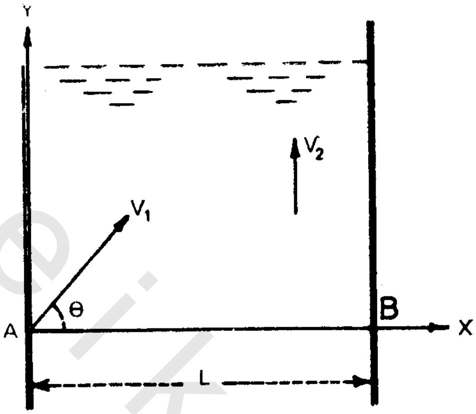
نفرض $\vec{v}_1$ سرعة القارب بالنسبة للماء و $\vec{v}_2$ سرعة الماء بالنسبة للشاطىء وأن $\vec{v}$ سرعة القارب بالنسبة للشاطىء فنكتب بحسب مبدأ تركيب السرع :

سرعة الماء بالنسبة للشاطىء + سرعة القارب بالنسبة للماء = سرعة القارب بالنسبة للشاطىء

وباستخدام الرموز يكون :

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad (1)$$

وإذا اتخذنا اعتباراً من نقطة الانطـــلاق A في الشكل (٤ – ٣) محورين متعامدين أحدهما باتجاه عرض النهر وهو المحور x والثاني عمودي عليه وهو المحور y ، واذا فرضنا أن θ هي الزاوية التي اتجه بها الرجل بقاربه أمكننا أن نكتب العلاقة (1)



الشكل (٤ – ٣)

بعد اسقاطها على المحورين x و y بالشكل :

$$v_x = v_1 \cos\theta + 0 = v_1 \cos\theta \qquad (2)$$

$$v_y = v_1 \sin\theta + v_2 \qquad (3)$$

إن بامكاننا أن نحسب الزمن الذي يحتاجه الرجل كي يقطع عرض النهر بالسرعة v_x ، فاذا فرضنا t_1 هذا الزمن فاننا نجد :

$$t_1 = L / v_x = \frac{L}{v_1 \cos\theta} \qquad (4)$$

ويقطع الرجل خلال هذه الفترة مسافة y تساوي $v_y\, t_1$ بعيداً عن النقطة B المقابلة لنقطة الانطلاق A أي أن :

$$y = v_y\, t_1 = \frac{L}{v_1 \cos\theta} \left[v_1 \sin\theta + v_2 \right] \qquad (5)$$

وحتى يصل إلى B عليه أن يمشي هذه المسافة وهو يحتاج لانجاز ذلك إلى زمن t_2 يساوي y/u إذن :

$$t_2 = \frac{L}{u\, v_1 \cos\Theta}\left[\, v_1 \sin\Theta + v_2 \,\right] \qquad (6)$$

ويكون الزمن الكلي t الذي يستغرقه الرجل في رحلته مساوياً $t_1 + t_2$ أي أن :

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v_1 \cos\Theta} + \frac{L}{u v_1 \cos\Theta}\left[\, v_1 \sin\Theta + v_2 \,\right]$$

$$t = \frac{L}{u\, v_1 \cos\Theta}\left[u + v_1 \sin\Theta + v_2\right] \qquad (7)$$

نبحث الآن عن الزاوية Θ التي تجعل t اصغرياً فنجد مشتق t بالنسبة لـ Θ :

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{Lv_1 \cos\Theta\,(u\, v_1 \cos\theta\,) + u\, v_1 L \sin\Theta\,(\,u + v_1 \sin\Theta + v_2\,)}{u^2\, v_1^2 \cos^2\Theta}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{L\;\; u\, v_1^2 + (\,u + v_2\,)\, u\, v_1\, L \sin\theta}{u^2\, v_1^2 \cos^2\,\theta}$$

وينعدم المشتق من أجل :

$$v_1 + (\,u + v_2\,) \sin\theta = 0$$

أي عندما :

$$\sin\,\theta = -\frac{v_1}{u + v_2} = -\frac{3000}{1200+5000} = -\frac{3}{6.2} = -0.484$$

وهي تعطي :

$$\theta = -29^{\circ}$$

وتشير الاشارة السالبة إلى أن على الرجل أن يجذف باتجاه معاكس لاتجاه جريان النهر . والنتيجة هي أن على الرجل أن يوجه قاربه باتجاه معاكس

لاتجاه جريان الماء وبزاوية قدرها 29° حتى يبلغ الضفة المقابلة ثم يمشي حتى يبلغ B . (ب) أما الوقت الذي يستغرقه الرجل في رحلته فنحسبه من العلاقة (7) بعد التعويض بالقيم العددية التالية :

$$L = 500\ \text{m}\ ,\ v_1 = 3000\ \text{m/hr} = 50\ \text{m/min}$$

$$v_2 = 1200\ \text{m/hr} = 20\ \text{m/min}$$

$$u = 5000\ \text{m/hr} = 83.3\ \text{m/min}$$

$$\sin\theta = -\ 0.484 \quad , \quad \cos\theta = 0.874$$

واذا ما استخدمنا السرع المقدرة بالامتار في الدقيقة فاننا نجد هذا الزمن مقدراً بالدقائق ويكون :

$$t = \frac{500}{83.3 \times 50 \times 0.874}\left[\, 83.3 - 50 \times 0.484 + 20 \,\right]$$

$$t = 0.137 \times 79.1 = 10.9\ \text{min} \simeq 11\ \text{min}$$

(حـ) اما اذا أردنا أن يصل الرجل الى B مباشرة دون أن يمشي فيكفي ان نختار θ بحيث تنعدم y . ونجد من العلاقة (5) أن y تنعدم لما يكون :

$$\sin\theta = -\frac{v_2}{v_1} = -\frac{20}{50} = -\ 0.4$$

ومنه :

$$\theta = -\ 23.6^\circ$$

* * *