الفصل الثالث

توازن الجسم الصلب الخاضع لقوى مستوية غير متوازية

شروط التوازن :

إن بإمكاننا أن نرد شروط توازن جسم صلب خاضع إلى قوى غير متوازية واقعة في مستو واحد إلى مسألة لدينا فيها مجموعتان من القوى المتوازية ، وذلك بالنظر في مركبات هذه القوى على منحى أفقي وآخر عمودي ، ثم نطبق شروط التوازن التي ذكرناها في الفصل الثاني على المركبات الأفقية وعلى المركبات الشاقولية كلاً على انفراد . فشرطا التوازن إذن هما :

الشرط الأول (شرط القوى) : وهو أن ينعدم المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة في الجسم . ويكافيء ذلك انعدام المجموع الجبري للقوى أو مركباتها في أي اتجاه . ينتج من ذلك أن :

(أ) المجموع الجبري للمركبات الأفقية يساوي الصفر أي : $\sum F_x = 0$

(ب) المجموع الجبري للمركبات الشاقولية يساوي الصفر أي : $\sum F_y = 0$

وهكذا فنحن نحلل كل قوة مؤثرة في الجسم إلى مركبتين أفقية وشاقولية فنحصل بذلك على مجموعتين من القوى المتوازية متعامدتين مع بعضها ونشترط أن يكون : $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$.

الشرط الثاني (شرط العزوم) : وهو يقضي بأن يكون المجموع الجبري لعزوم جميع القوى حول أي محور عمودي على مستوي القوى مساوياً الصفر أي $\sum \Gamma = 0$. ويكافىء هذا الشرط تساوي مجموع العزوم ، التي تسبب تدوير الجسم باتجاه عقارب الساعة حول المحور ، مع مجموع العزوم التي تسبب تدويره باتجاه معاكس لعقارب الساعة .

شروط توازن جسم خاضع إلى ثلاث قوى غير متوازية :

(١) — يجب أن تقع القوى الثلاث في مستو واحد .

(٢) — يجب أن تتقاطع خطوط فعل هذه القوى في نقطة واحدة .

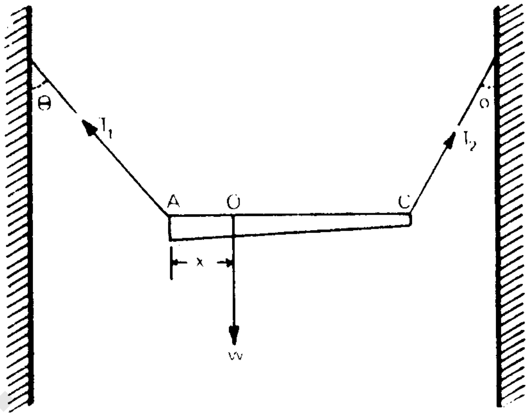
(٣) — يجب أن يكون بالامكان اغلاق مثلث الأشعة المأخوذة موازية للقوى المطبقة على الجسم بحيث تتناسب أطوالها مع مقادير هذه القوى .

★ ★ ★

مسألة رقم (٣ — ١) :

يُعلق قضيب غير منتظم المقطع وزنه w وطوله $L = 20$ ft بصورة أفقيـة وذلك بواسطة خيطين غير ثقيلين . فاذا كان الخيط الأول يصنع زاويـــة $\Theta = 36.9^\circ$ مع الشاقول وكان الخيط الثاني يصنع زاوية مقدارها $\Phi = 53.1^\circ$ مع الشاقول فاحسب المسافة x بين النهاية اليسرى للقضيب ومركز ثقله .

الحـل :



الشكل (٣ – ١)

نفرض T_1 قوة شـد الخيط المربوط بالطرف A من القضيب . ونفرض T_2 قوة شـد الخيط المربوط بالطرف C منـه ، انظر الشكل (٣ – ١) . فاذا كان x هو بعد مركز ثقـــل القضيب غير المتجانس عن الطرف A أمكننا أن نكتب شروط توازن القضيب وهي :

$$\Sigma F_x = 0 \text{ ، } \Sigma F_y = 0 \text{ ، } \Sigma \Gamma = 0$$

ونعبر عن الشرط $\Sigma F_x = 0$ بالعلاقة :

$$T_1 \sin \Theta + T_2 \sin \Phi = 0 \qquad (1)$$

وعن الشرط $\Sigma F_y = 0$ بالعلاقة :

$$+ T_1 \cos \Theta + T_2 \cos \Phi - w = 0 \qquad (2)$$

وعن الشرط $\Sigma \Gamma = 0$ ، بأخذ عزوم القوى حول A بالعلاقة :

$$- w \cdot x + T_2 \cos \Phi \times L = 0 \qquad (3)$$

وذلك لانعدام عزم T_1 بسبب مرورها من A وكذلك لانعدام عزم مركبة T_2 الافقية حول A لنفس السبب .

من (١) نجد :
$$T_1 = T_2 \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta}$$

نعوض في العلاقة (2) فنجد :

$$T_2 \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta} \cos \Theta + T_2 \cos \Phi = w$$

$$T_2 (\sin \Phi \cot \Theta + \cos \Phi) = w$$

ومنه :
$$T_2 = w / (\sin \Phi \cot \Theta + \cos \Phi)$$

نعوض في العلاقة (3) التي تعطي :

$$x = T_2 \frac{L \cos \Phi}{w} = L \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi \cot \Theta + \cos \Phi}$$

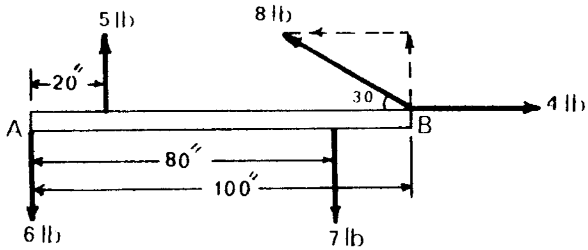
$$x = L \frac{1}{\tan \Phi \cot \Theta + 1}$$

وبتعويض $\tan \Phi$ ، $\cot \Theta$ ، L بقيمها نجد : $x = 7.2$ ft

مسألة رقم (٣ ـ ٢) :

يخضع قضيب AB طوله 100 انش ومهمل الوزن إلى خمس قوى مبينة في الشكل (٣ ـ ٢) . ما هو مقدار واتجاه ونقطة تطبيق القوة التي تجعل القضيب متوازناً ؟

الحـل :



الشكل (٣ — ٢)

نفرض $\vec{R}$ القوة التي تسبب توازن القضيب ولتكن h مركبة $\vec{R}$ بالاتجـاه الافقي و v مركبتها بالاتجاه الشاقولي . ثم لنفرض x هو بعد نقطة تطبيق هذه القوة عن الطرف A من القضيب . لنكتب شروط توازن القضيب الثلاثة وهي : $\Sigma \Gamma_A = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \; , \quad \Sigma F_x = 0$

الشرط الأول ($\Sigma F_x = 0$) :

$$+4 - 8\cos 30 + h = 0$$

ومنه نجد :

$$h = 8\cos 30 - 4 = 8\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 4 = 4(\sqrt{3} - 1) = +2.9 \text{ lb}$$

وعليه فان المركبة الأفقية للقوة المجهولة هي بالاتجاه الموجب ومقدارها 2.9 lb .

الشرط الثاني ($\Sigma F_y = 0$) :

$$-6 + 5 - 7 + 8\sin 30^\circ + v = 0$$

ومنه نجد :

$$v = 8 - 8\sin 30^\circ = 8 - 4 = +4 \text{ lb}$$

وبالتالي فالمركبة الشاقولية للقوة المجهولة تتجه نحو الأعلى ومقدارها 4 lb . أما مقدار القوة R نفسها فهو :

$$R = \sqrt{h^2 + v^2} = \sqrt{(2.9)^2 + (4)^2} = 4.9 \text{ lb}$$

وإذا فرضنا α زاوية ميل R على الأفق فان لدينا :

$$\tan \alpha = \frac{v}{h} = \frac{4}{2.9} = 1.38$$

ومنه

$$\alpha = 54^\circ$$

ويعطي الشرط الثالث ($\Sigma \Gamma_A = 0$) العلاقة :

$$6 \times 0 + 5 \text{ lb} \times 20 \text{ in} - 7 \text{ lb} \times 80 \text{ in} + 8 \sin 30^\circ \times 100 \text{ in} + v \text{ lb} \times x \text{ in} = 0$$

وذلك باعتبار أن عزوم القوى 6 lb و $8 \cos 30^\circ$ و h التي تمر خطوط فعلها من A مساوية الصفر إذن :

$$100 - 560 + 400 + 4x = 0$$

$$x = \frac{60}{4} = 15 \text{ in}$$

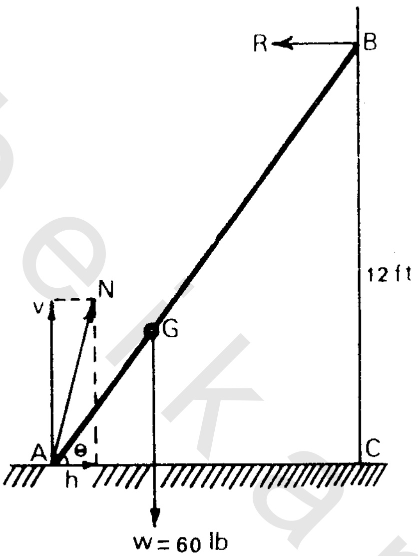
★ ★ ★

مسألة رقم (٣ ـ ٣) :

يزن سلم AB طوله 15 ft مقـــدار 60 lb ، ويبتعد مركز ثقله G عن نهايته السفلى بمقدار ثلث طوله ، وهو يستند من نهايته A على أرض خشنة وترتفع نهايته B عن الأرض مسافة 12 ft وهي تستند إلى جدار شاقولي أملس . أوجد رد فعل الجدار وليكن R ، ورد فعل الأرض وليكن N .

الحــل :

نفرض Θ هي زاوية السلم مع الأرض ، نجد من النص أن :



الشكل (٣ – ٣)

$$\sin\Theta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\cos\Theta = \sqrt{1 - \sin^2\Theta} =$$

$$= \sqrt{1 - (0.8)^2} = 0.6$$

نطبق شروط توازن جسم صلب وهي $\Sigma F_x=0, \Sigma\Gamma_A=0$ و $\Sigma F_y=0$ فنجد :

يعطي الشرط الأول

بفرض h هي المركبة الأفقية لرد الفعل N و v المركبة الشاقولية لرد الفعل N :

$$+h - R = 0 \qquad (1)$$

ويعطي الشرط الثاني وهو $\Sigma F_y=0$ مايلي :

$$+v - w = 0 \qquad (2)$$

أما الشرط الثالث وهو شرط انعدام عزوم القوى حول A فيعطي :

$$-w\frac{L}{3}\cos\Theta + R \times 12 = 0 \qquad (3)$$

فلدينا إذن ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل هي h وv وR . لنحل هذه المعادلات الثلاث .

من (2) نجد : $v = w = 60 \text{ lb}$ وهي متجهة نحو الأعلى

من (3) نجد :

$$R = \frac{1}{12} \times \frac{wL}{3} \cos \Theta = \frac{1}{12} \times \frac{60 \times 15}{3} \times 0.6 = 15 \text{ lb}$$

ومن (1) نجد أن $h = R$ ، اذن : $h = 15 \text{ lb}$

وعليه فمقدار القوة N هو :

$$N = \sqrt{h^2 + v^2} = \sqrt{(15)^2 + (60)^2} = 62 \text{ lb}$$

واذا فرضنا α زاوية ميل N على الأفق فانه يكون :

$$\tan \alpha = \frac{v}{h} = \frac{60}{15} = 4$$

ومنه : $\alpha = 76^\circ$

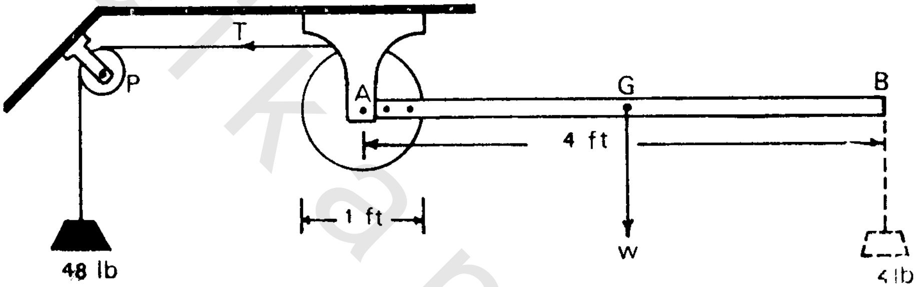
* * *

مسألة رقم (٣ ـ ٤) :

يلف حبل على حافة قرص دائري قطره 1 ft ، يستند إلى محور أفقي مار من مركزه . يمرّر الحبل على بكرة P عديمة الاحتكاك ويُربط في نهايته جسم وزنه 48 lb . نثبت قضيباً متجانساً طوله 4 ft بالقرص بحيث تنطبق

احدى نهايتيه على مركز القرص ، فيتوازن الجهاز ويأخذ القضيب وضعاً أفقياً كما هو مبين في الشكل (٣ – ٤) والمطلوب : (أ) ما هو وزن القضيب ؟ (ب) ما هو وضع التوازن الجديد الذي يتخذه القضيب إذا عُلق من نهايته الخارجية وزن مقداره 4 lb على النحو المبين بالخط المنقط في الشكل ؟

الحـلِ :



الشكل (٣ – ٤)

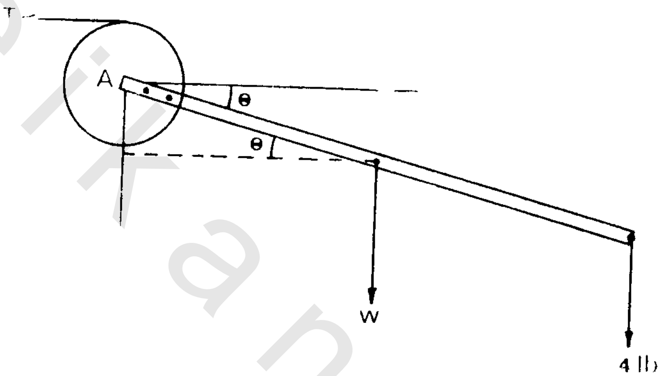
(أ) نفرض w وزن القضيب وهو قوة مطبقة في مركز نقله G . إن لهذه القوة عزم حول النهاية اليسرى A وهو عزم سالب باعتباره يؤدي إلى تدوير القضيب باتجاه عقارب الساعة . ويوازن هذا العزم عزم ناشيء عن شد الحبل T حول A وهو عزم يدور القضيب باتجاه معاكس لاتجاه عقارب الساعة ولذا فهو عزم موجب ويساوي مقداره جداء T ببعدها العمودي عن A وهو نصف قدم كما هو ظاهر في الشكل اذن لدينا من شرط انعدام العزوم حول A العلاقة :

$$w \text{ lb} \times 2 \text{ ft} = T \text{ lb} \times \frac{1}{2} \text{ ft}$$

أي :
$$2\,w = 24\ lb\cdot ft$$

وأخيراً يكون:
$$w = \frac{24}{2} = 12\ lb$$

(ب) نفرض Θ الزاوية التي يصنعها القضيب مع الأفق في وضع توازنه الجديد بعد تحميله بالثقل 4 lb فيأخذ القضيب عندها الوضع المبين في الشكل (٣ – ٥) ويصبح شرط انعدام العزوم حول A كما يلي :



الشكل (٣ – ٥)

$$T \times \frac{1}{2} - w \times \frac{4}{2} \times \cos\Theta - 4 \times 4 \cos\Theta = 0$$

$$24 - 24 \cos\Theta - 16 \cos\Theta = 0$$

$$24 = 40 \cos\Theta$$

$$\therefore\ \cos\Theta = \frac{24}{40} = 0.6$$

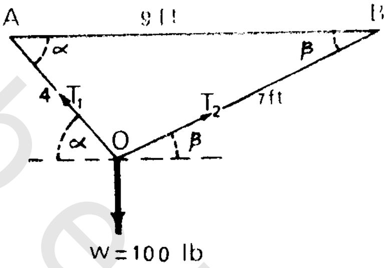
ومنه :

$$\Theta = 53^{\circ}$$

* * *

مسألة رقم (٣ ــ ٥) :

يُربط حبل طوله 11 ft بخطافين مثبتين في السقف من نقطتين A وB تبعدان عن بعضها مسافة 9 ft . يُربط بالحبل وزن مقداره 100 lb من نقطة تقسم الحبل إلى قسمين طول الأول 4 ft والثاني 7 ft . عين قوة شد الحبل في جزئيه ،انظر الشكل (٣ — ٦).



الشكل (٣ — ٦)

الحــل :

نفرض T_1 قوة الشد في الفرع AO ذي الطول 4 ft وأن T_2 قوة الشد في الفرع BO ذي الطول 7 ft ونكتب شرط توازن النقطة O الخاضعة بالاضافة إلى قوتي الشد T_1 وT_2 إلى الوزن w ان شرط التوازن هو :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{w} = 0$$

نسقط هذه العلاقة على محورين متعامدين فنجد :

$$-T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = 0 \qquad (1)$$

$$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta - w = 0 \qquad (2)$$

من (1) نجد :

$$T_2 = T_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (3)$$

نعوض في (2) فنجد :

$$T_1 \sin\alpha + T_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \sin\beta = w$$

ومنه :

$$T_1 = \frac{w}{\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta} \tag{4}$$

ونجد في المثلث AOB أن :

$$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{BO} \cos \beta$$

$$4^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \times 9 \times 7 \cos \beta$$

$$16 = 81 + 49 - 126 \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{114}{126} = 0.905$$

ومنه :

$$\beta = 25^\circ$$

كما نجد أيضاً :

$$\overline{BO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AO} \cdot \overline{AB} \cos \alpha$$

$$7^2 = 4^2 + 9^2 - 2 \times 4 \times 9 \cos \alpha$$

$$49 = 16 + 81 - 72 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{48}{72} = 0.667$$

ومنه :

$$\alpha = 48$$

نعوض في العلاقة (4) فنجد :

$$T_1 = \frac{100}{\sin 48 + \cos 48^\circ \times \tan 25^\circ} = 95 \text{ lb}$$

نعوض أخيراً في العلاقة (3) فنجد :

$$T_2 = 95 \times \frac{\cos 48^\circ}{\cos 25^\circ} = 70 \text{ lb}$$

* * *