# الفصل الثاني

## توازن الجسم الصلب الخاضع لقوى مستوية متوازية

**عزم قوة :**

إن عزم قوة حول محور يعطي جدوى هذه القوة في توليد دوران حول ذلك المحور . وهو يقاس بجداء القوة بالمسافة العمودية الفاصلة بين خط فعل القوة والمحور . وإذا عبّرنا عن القوة بالباوند وعن المسافة بالقدم فان وحدة عزم القوة تكون : باوند . قدم أو ( lb . ft ) .

**تعريف التوازن :**

يقال عن جسم بأنه في حالة توازن انسحابي إذا كان ساكناً أو إذا كان متحركاً بسرعة ثابتة على خط مستقيم . ويقال عن جسم بأنه في حالة توازن دوراني إذا كان لايدور أو إذا كان يدور بسرعة زاوية منتظمة حول محور .

وإذا أثرت مجموعة قوى في جسم فإن الشرط اللازم والكافي لكي يتوازن الجسم تحت تأثير هذه القوى هو أن لا تولد هذه القوى تغيراً في حركة الجسم الانسحابية أو في حركته الدورانية .

**شرطا توازن جسم خاضع لجملة قوى مستوية متوازية :**

الشرط الأول : أن يكون المجموع الجبري لمساقط القوى على أي اتجاه كان مساوياً الصفر . ويكافىء هذا قولنا بأن يكون مجموع القوى المتجهة نحو الأعلى مساوياً مجموع القوى المتجهة نحو الأسفل ، وكذلك أن يكون مجموع القوى المتجهة نحو اليمين مساوياً مجموع القوى المتجهة نحو اليسار . الخ ...

واذا تحقق هذا الشرط فستكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم معدومة وبالتالي يكون التسارع الخطي معدوماً ، بمعنى أن هذه القوى سوف لا تولّد تغيراً في الحركة الخطية للجسم .

الشرط الثاني : أن يكون المجموع الجبري لعزوم جميع القوى حول أي محور عمودي على مستوي القوى معدوماً . وهذا مكافىء لقولنا بأن مجموع العزوم التي تسبب تدوير الجسم باتجاه عقارب الساعة حول محور ما من هذه المحاور مساوٍ لمجموع العزوم التي تسبب تدوير الجسم باتجاه معاكس لعقارب الساعة حول نفس المحور .

وإذا تحقق هذا الشرط انعدمت حاصلة العزوم المؤثرة في الجسم وانعدم بالتالي التسارع الزاوي للجسم . وعليه فان جملة العزوم لا تغير في الحركة الزاوية للجسم. وإذا كان الجسم ساكناً فسيبقى كذلك ، وإذا كان الجسم دائراً بسرعة زاوية ثابتة فسيبقى كذلك أيضاً .

**المزدوجة :**

تتألف المزدوجة من قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه وغير واقعتين على خط فعل واحد . وفي استطاعة المزدوجة أن تولّد دوراناً وحسب .

ويساوي عزم المزدوجة جداء احدى القوتين بالمسافة العمودية الفاصلة بين القوتين. ولكي نوازن مزدوجة ينبغي تطبيق مزدوجة لها نفس العزم ولكن في الاتجاه المعاكس .

**مركز ثقل الجسم :**

نعرف مركز ثقل جسم بأنه النقطة التي يمكن أن نعتبر وزن الجسم مركزاً فيها ، أي أن خط فعل الثقل يمر من مركز ثقل الجسم . وإذا أثرت في جسم قوة وحيدة شاقولية مساوية إلى وزن الجسم ومطبقة عند مركز ثقـله فإن الجسم يبقى في حالة توازن . ويحسب احداثيا مركز ثقل الأجسام المستوية من العلاقتين :

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i} \qquad (2-1)$$

**قانون نيوتن الأول :**

إن الجسم الساكن يبقى في حالة السكون ، وإن الجسم الذي يتحرك حركة منتظمة على خط مستقيم يبقى على حركته ما لم تُجبره على التغيير قوة خارجية .

**قانون نيوتن الثالث :**

لكل فعل يوجد دوماً رد فعل معاكس ومساوٍ له ، أو أن الأفعال المتبادلة بين جسمين تتم بحيث تكون هذه الأفعال متساوية ومعاكسة لبعضها .

**الاحتكاك :**

كلما انزلق جسم على آخر أثرت على كل من الجسمين قوة احتكاك موازية لسطحي الجسمين . والقوة التي تؤثر على كل منهما تعاكس اتجاه حركته بالنسبة للجسم الآخر . وإذا كانت N القوة الناظمية التي تضغط السطحين المنزلقين على بعضهما ، وإذا رمزنا بـ $f_s$ لقوة الاحتكاك المعيقة للحركة فان :

$$f_s \leq \mu_s N \qquad (2-2)$$

حيث $\mu_s$ عامل الاحتكاك السكوني . ولا تصلح المساواة إلا عند بدء الحركة . أما قوة الاحتكاك أثناء الحركة فهي تعطى بعلاقة مماثلة هي :

$$f_k = \mu_k N \qquad (2-3)$$

حيث ترمز $\mu_k$ إلى عامل الاحتكاك الحركي وهو أقل بقليل من عامل الاحتكاك السكوني . وتوجد قوة احتكاك إذا تدحرج جسم على آخر ، ونسمي القوة في هذه الحالة قوة احتكاك التدحرج ، ونسمي عامل الاحتكاك عندها عامل احتكاك التدحرج .

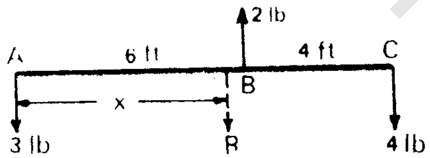
★ ★ ★

**مسالة رقم ( ٢ ـ ١ ) :**

يؤثر في قضيب AC وزنه مهمل وطوله 10 ft موضوع بصورة أفقية ، ثلاث قوى شاقولية على النحو المبين في الشكل ( ٢ – ١ ) والمطلوب : ( أ ) أوجد المجموع الجبري ( $\sum F$ ) للقوى المؤثرة على القضيب . ( ب ) أوجد المجموع الجبري ( $\sum L$ ) لعزوم القوى حول النقاط C , B , A ( حـ ) عين محصلة القوى الثلاث ولتكن R ثم أوجد القوة التي تجعل القضيب في حالة توازن .

**الحـل :**

( أ ) نفرض أن القوى المتجهة نحو الأعلى موجبة فتكون القوى المتجهة نحو الأسفل سالبة ويكون :




الشكل ( ٢ – ١ )

$$\sum F = +2 - 4 - 3 = -5 \text{ lb}$$

( ب ) نعتبر العزوم التي تسبب تدوير القضيب باتجاه معاكس لعقارب الساعة عزوماً موجبة ، فتكون العزوم التي تسبب تدوير القضيب باتجاه عقارب الساعة عزوماً سالبة ويكون :

$$\sum \Gamma_A = 3\ \text{lb} \times 0\ \text{ft} + 2\ \text{lb} \times 6\ \text{ft} - 4\ \text{lb} \times 10\ \text{ft}$$

$$\sum \Gamma_A = 0 + 12\ \text{lb}\ .\ \text{ft} - 40\ \text{lb}\ .\ \text{ft} = -\ 28\ \text{lb}\ .\ \text{ft}$$

أي أن العزم باتجاه عقارب الساعة .

$$\sum \Gamma_B = 3\ \text{lb} \times 6\ \text{ft} + 2\ \text{lb} \times 0\ \text{ft} - 4\ \text{lb} \times 4\ \text{ft}$$

$$\sum \Gamma_B = 18\ \text{lb}\ .\ \text{ft} + 0 - 16\ \text{lb}\ .\ \text{ft} = +\ 2\ \text{lb}\ .\ \text{ft}$$

أي أن العزم باتجاه معاكس لعقارب الساعة .

$$\sum \Gamma_C = 3\ \text{lb} \times 10\ \text{ft} - 2\ \text{lb} \times 4\ \text{ft} + 4\ \text{lb} \times 0\ \text{ft}$$

$$\sum \Gamma_C = 30\ \text{lb}\ .\ \text{ft} - 8\ \text{lb}\ .\ \text{ft} = +\ 22\ \text{lb}\ .\ \text{ft}$$

أي أن العزم باتجاه معاكس لعقارب الساعة .

( حـ ) إن مقدار المحصلة R هو 5 lb وهي تتجه نحو الأسفل . وإذا فرضنا x هو بعد المحصلة عن A فيجب أن يكون عزم المحصلة حول A مساوياً محصلة عزوم القوى حول A أي $\sum \Gamma_A$ وعليه يكون :

$$\sum \Gamma_A = -\ 28\ \text{lb}\ .\ \text{ft} = -\ 5\ \text{lb} \times \text{x}\ \text{ft}$$

ومنه :

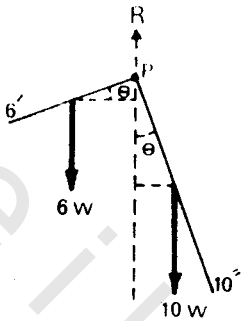
$$\text{x} = \frac{28}{5} = 5{\cdot}6\ \text{ft}$$

وواضح أن القوة التي تجعل القضيب في حالة توازن هي قوة مساوية لـ R ومعاكسة لها مباشرة إذ أن مثل هذه القوة تجعل القضيب في حالة توازن انسحابي وتوازن دوراني أيضاً .

★ ★ ★

**مسالة رقم ( ٢ ــ ٢ ) :**

يُجعل قضيب منتظم المقطع وثقيل طوله 16 إنشاً على هيئة زاوية قائمة ، طول ضلعيها 6 إنش و 10 إنش ، ويستند القضيب من رأس الزاوية إلى وتد . ما هي الزاوية التي يصنعها الضلع ذو الطول 10 إنش مع الشاقول عندما يكون القضيب متوازناً ؟



الشكل ( ٢ ــ ٢ )

**الحـل :**

يبين الشكل ( ٢ ــ ٢ ) القضيب في وضع التوازن ، وتفعل فيه ثلاث قوى هي : 6 W وتفعل في منتصف الجزء القصير من القضيب أي على بعد 3 إنش من نقطة الاستناد P ، حيث نرمز بـ W إلى كتلة الإنش الواحد من القضيب . و W 10 وهي تفعل في منتصف الجزء الطويل من القضيب أي على بعد 5 إنش من نقطة الاستناد P. و R وهي قوة رد الفعل التي يولدها الوتد في القضيب ومقدارها W 16 وهي تعاكس القوتين 6 W و 10W .

نكتب شرط التوازن الدوراني بأخذ العزوم حول P فنجد باعتبار العزوم التي تسبب تدوير الجسم باتجاه معاكس لعقارب الساعة موجبة وإلا فسالبة :

$$-10\,\text{w(lb)} \times 5 \sin\Theta\,(\text{in}) + 6\,\text{w (lb)} \times 3\cos\Theta\,(\text{in}) + R \times 0 = 0$$

اذن :

$$-50\,\text{w} \sin\Theta + 18\,\text{w}\cos\Theta = 0$$

ومنه :

$$\tan\Theta = \frac{18}{50} = 0.36$$

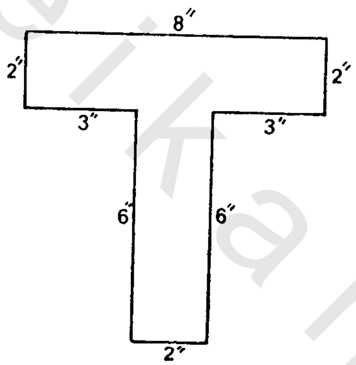
$$\Theta \approx 20^{\circ}$$

**مسالة رقم ( ٢ ـ ٣ ) :**

آوجد موضع مركز ثقل الصفيحة المبينة في الشكل ( ٢ ٣ ) والتي تأخذ شكل حرف T .

**الحـل :**

نرد المسألة إلى مسألة ايجاد محصلة قوتين متوازيتين وذلك بادارة الشكـــل بزاوية تساوي $90°$ على النحو المبين في الشكل( ٢ — ٤ )واعتبار القوة الأولى مركزة في مركز ثقل القسم الأيمن واعتبار القوة الثانية مركزة في مركز ثقل القسم الأيسر . واذا فرضنـا $\omega$ وزن وحدة السطح من الصفيحة




الشكل ( ٢ — ٣ )

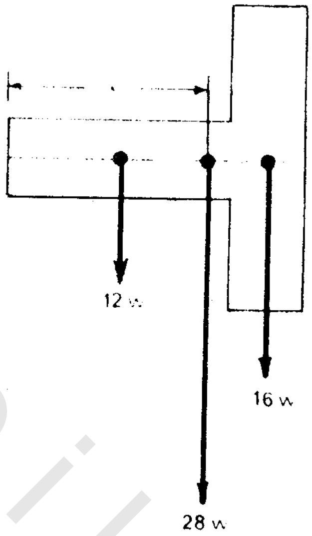
فان مقدار القوة الأولى $16\,\omega = 8\times 2\,\omega$ ، ويكون مقدار القوة الثانيــة $12\,\omega = 6\times 2\,\omega$ وإذا فرضنا x بعـد محصلة القوتين التي مقـــدارها $28\,\omega = 16\,\omega + 12\,\omega$ عن حرف الصفيحة الأيسر فان شرط تساوي عزم المحصلة مع عزمي القوتين حول هذا الحرف يعطي :

$$-28\omega(\mathrm{lb})\times x\,(\mathrm{in}) = -12\,\omega\,(\mathrm{lb})\times 3(\,\mathrm{in}\,) - 16\,\omega\,(\mathrm{lb})\times 7(\,\mathrm{in}\,)$$

$$-28\,(\omega)\,X = -36\,(\omega) - 112\,(\omega)$$

$$-28\,(\omega)\,X = -148\,(\omega)$$

$$\therefore X = \frac{148}{28} = 5.29 \text{ in}$$




الشكل ( ٢ — ٤ )

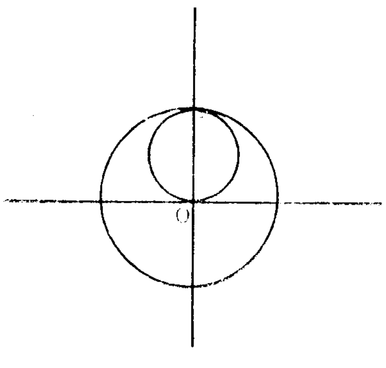
* * *

**مسالة رقم ( ٢ ــ ٤ ) :**

قرص معدني قطره d ، اقتطعت منه قطعة بشكل دائرة قطرها يساوي $\frac{d}{2}$ كما هو مبين في الشكل (٢—٥) . أوجد بعد مركز ثقل القرص الناتج عن مركز الدائرة الكبرى .

**الحــل :**

نرد المسألة أيضاً إلى مسألة تركيب قوتين متوازيتين وذلك بإدارة القرص بزاوية مقدارها 90 واعتبار القطعة المقتطعة مكافئة لقوة معاكسة للثقل فنجد بفرض $\omega$ وزن وحدة السطح من القرص أن :



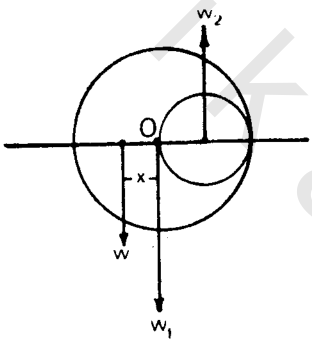

الشكل ( ٢ ــ ٥ )

$$w_1 = \pi \frac{d^2}{4} \omega$$

$$w_2 = \pi \frac{d^2}{16} \omega$$

$$w = w_1 - w_2 = \pi d^2 \omega \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = \frac{3 \pi d^2}{16} \omega$$

وبإمكاننا أن نجد بعد المحصلة w عن O بأخذ العزوم حول O فيكون ، انظر الشكل ( ٢ – ٦ – ) :




الشكل ( ٢ – ٦ )

$$w \times x = w_1 \times 0 + w_2 \times \frac{d}{4}$$

$$w \times x = w_2 \frac{d}{4}$$

$$x = \frac{w_2}{w} \frac{d}{4}$$

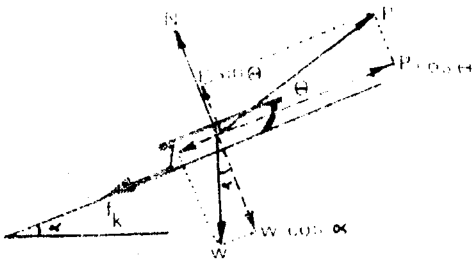
$$x = \frac{\pi d^2 \omega}{16} \times \frac{16}{3 \pi d^2 \omega} \times \frac{d}{4}$$

$$x = \frac{d}{12}$$

**مسألة رقم ( ٢ ـ ٥ ) :**

تبلغ قيمة عامل الاحتكاك الحركي بين الجليد ومزلجة 0.10 ، ويراد سحب المزلجة على منحدر يميل بزاوية $\alpha$ على الأفق بسرعة منتظمة . أوجد الزاوية التي يجب أن يصنعها الحبل المتصل بالمزلجة مع المستوي كي تكون قوة الشد في أصغر قيمها .

نكتب شرط تحرك المزلجة بسرعة منتظمة ، وهو يقضي بحسب قانون نيوتن الأول أن تكون محصلة القوى المؤثرة بالمزلجة معدومة ، وهذه القوى هي :




الشكل ( ٢ - ٧ )

( أ ) وزن المزلجة $\vec{w}$ وله مركبتان إحداهما موازية للمستوي المائل ومقدارها $w \sin \alpha$ وهي متجهة نحو أسفل المستوي ، والمركبة الثانية عمودية على المستوي ومقدارها $w \cos \alpha$ .

(ب) قوة الشد $\vec{P}$ ولها مركبتان هما $P \cos \Theta$ وهي بالاتجاه الصاعد و $P \sin \Theta$ وهي عمودية على المستوي .

(حـ) قوة الاحتكاك $\vec{f_k}$ وهي تعاكس الحركة ولذا فهي تتجه إلى أسفل المستوي ومقدارها $\mu_k$ مضروباً بالقوة الناظمية التي تضغط السطحين على بعضهما وهي كما واضح من الشكل $w \cos \alpha - P \sin \Theta$

(د) قوة رد الفعل $\vec{N}$ وهي عمودية على المستوي المائل .

نكتب شرط الحركة المنتظمة وهو : $\vec{P} + \vec{N} + \vec{w} + \vec{f_k} = 0$

أو الشرطين المكافئين التاليين :

$$N + P \sin \Theta = w \cos \alpha$$

$$P \cos \Theta - f_k - w \sin \alpha = 0$$

او :
$$P\cos\Theta - \mu_k(w\cos\alpha - P\sin\Theta) - w\sin\alpha = 0$$

$$P[\cos\Theta + \mu_k\sin\Theta] = w\sin\alpha + \mu_k w\cos\alpha$$

$$\therefore\ P = \frac{w\sin\alpha + \mu_k w\cos\alpha}{\cos\Theta + \mu_k\sin\Theta} = \frac{C}{\cos\Theta + \mu_k\sin\Theta}$$

بفرض $C = w\sin\alpha + \mu_k w\cos\alpha$ وهو مقدار ثابت .

وتكون P في أصغر قيمها عندما ينعدم مشتقها بالنسبة لـ $\Theta$ . نحسب $dP/d\Theta$ فنجد:

$$\frac{dP}{d\Theta} = -\frac{C}{(\cos\Theta + \mu_k\sin\Theta)^2}[-\sin\Theta + \mu_k\cos\Theta]$$

وينعدم $dP/d\Theta$ عندما يكون :

$$\sin\Theta = \mu_k\cos\Theta$$

$$\tan\Theta = \mu_k = 0.10$$

أي عندما :
$$\Theta = 5.7^\circ$$

★ ★ ★