الفصل السادس عشر

تحريك السوائل واللزوجة

الغزارة :

اذا انساب سائل في انبوب مساحة مقطعه A وكانت سرعة جريانه v فان كمية السائل التي تخرج منه في الثانية الواحدة نسميها غزارة ونرمز لها بـ Q ويكون :

$$Q = A\,v \tag{16-1}$$

ويعبر عن Q بالوحدات التالية : ft^3/s أو m^3/s أو cm^3/s .

معادلة الاستمرار :

تقضي معادلة الاستمرار بأن تكون غزارة السائل Q ثابتة في أي مقطع من مقاطع الأنبوب الذي يجري فيه سائل لايقبل الانضغاط أي أن :

$$Q = A_1\,v_1 = A_2\,v_2 \tag{16-2}$$

حيث A_i مساحة مقطع الأنبوب في الموضع i و v_i سرعة السائل في ذلك الموضع . وبالطبع فاننا نفترض أن السائل يملأ مقطع الأنبوب بكامله .

نظرية برنولي :

تصلح هذه النظرية في وصف نوع من الجريان يطلق عليه اسم الجريان

الانسيابي أو الجريان الصفيحي . وهي تقضي بأن يكون مجموع طاقة الضغط والطاقة الحركية والطاقة الكامنة في أية نقطة من خط جريان في سائل مساوياً بمجموع الطاقات عند أية نقطة أخرى من خط الجريان نفسه أي أن :

$$p_1 \frac{m}{\varrho} + \frac{1}{2} mv_1^2 + mgh_1 = p_2 \frac{m}{\varrho} + \frac{1}{2} mv_2^2 + mgh_2 \quad (16-3)$$

حيث ترمز m الى كتلة السائل المـــدروس و g الى تسارع الثقالة .

وحيث p_1 ، v_1 ، h_1 هي الضغط والسرعة والارتفاع عند النقطة الأولى من خط الجريان .

وحيث p_2 ، v_2 ، h_2 هي الضغط والسرعة والارتفاع عند النقطة الثانية من خط الجريان .

ونورد في الجدول التالي وحدات المقادير المختلفة الواردة في العلاقة (16–3) وذلك في جمل الوحدات الثلاث :

المقدار / الجملة	p	ϱ	ϱg	v	h	m	g
المكثية	newton/m²	kg/m³	newton/m³	m/s	m	kg	9،8
السغثية	dyne/cm²	g/cm³	dyne/cm³	cm/s	cm	g	980
الهندسية الانكليزية	lb/ft²	slug/ft³	lb/ft³	ft/s	ft	slug	32ft/s²

وإذا قسمنا طرفي المعادلة (3) على m/ϱ وجدنا :

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + \varrho g h_2 \qquad (16-4)$$

وهي شكل آخر من اشكال نظرية برنولي تكون فيه أبعاد كل حد من حدود المعادلة هي ابعاد ضغط .

وإذا قسمنا طرفي العلاقة (16—3) على mg وجدنا :

$$\frac{p_1}{\varrho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_2}{\varrho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 \qquad (16-5)$$

حيث تكون ابعاد كل حد من حدود المعادلة هي أبعاد طول وهي شكل ثالث من أشكال نظرية برنولي .

سرعة خروج السائل من فتحة :

لقد برهن توريشلي على أن سرعة خروج المائع من ثقب في جانب وعاء تتعلق بارتفاع المائع h فوق الثقب وهي تعطى بالعلاقة :

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (16-6)$$

حيث g تسارع الثقالة .

اللزوجـة :

تنشأ اللزوجة من احتكاك طبقات السائـــل بعضها ببعض ومن احتكاك السائل بجدار الوعاء الذي ينساب فيه . وبفعل هذه اللزوجة تتناقص سرعة انسياب السائل في انبوب ما عند الجدران وتزداد كلما انتقلنا باتجاه مركز الانبوب بحسب العلاقة :

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4 L \eta} (R^2 - r^2) \qquad (16-7)$$

حيث L طول الانبوب الذي ينساب فيه السائل . وη عامل لزوجة السائل ويقاس بوحدة البويز وهي تساوي (دينة × ثا/سم٢) .

p_1 الضغط عند مدخل الانبوب .

p_2 الضغط عند مخرج الانبوب .

R نصف القطر الداخلي للانبوب .

r البعد الذي ندرس عنده السرعة v .

وتعطى غزارة السائل اللزج المنساب في أنبوب نصف قطره R وطوله L بالعلاقـة :

$$Q = \frac{1}{\eta} \frac{\pi R^4}{8 L} (p_1 - p_2) \qquad (16-8)$$

حيث p_1 الضغط عند مدخـل الانبوب و p_2 الضغط عنـد مخرجه و η عامل لزوجة السائل .

قانون ستوكس في اللزوجة :

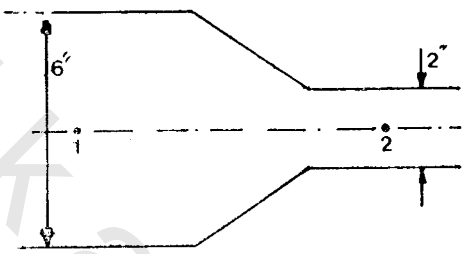
يخضع الجسم الكروي الذي نصف قطره r والذي يهوي في وسط عامل لزوجته η الى قوة F معاكسة لحركته متناسبة مع سرعته v . ونعبر عن ذلك بقانون ستوكس وهو :

$$F = 6 \pi \eta r v \qquad (16-9)$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٦ ـ ١) :

لدينا أنبوب أفقي قطر مقطعه في النقطة 1 يساوي 6 in ، فيه اختناق قطر مقطعه 2 in (في النقطة 2) . فاذا علمت أن سرعة جريان الماء في الأنبوب تساوي 2 ft/s وأن الضغط فيه $15\ lb/in^2$ فما هي السرعة v_2 والضغط P_2 عند الاختناق ؟ تعطى ϱg للماء وهي تساوي $62.4\ lb/ft^3$.



الشكل (١٦ ـ ١)

الحـل :

لدينا من معادلة الاستمرار : $A_1\ v_1 = A_2\ v_2$ مايلي :

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\ v_1 = \frac{\pi\ d_1^2/4}{\pi\ d_2^2/4}\ v_1 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد : $v_2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 \times 2 = 18\ ft/s$

ثم إنه لما كان الانبوب أفقياً فان $h_1 = h_2$ وتؤول معادلة برنولي أي المعادلة رقم (4 - 16) إلى :

$$P_1 + \frac{1}{2}\ \varrho v_1^2 = P_2 + \ \frac{1}{2}\ \varrho\ v_2^2$$ وهي تعطي :

$$P_2 = \frac{1}{2}\ \varrho\ (\ v_1^2 - v_2^2\ ) + P_1$$

نعوض بالقيم العددية وهي : $P_1 = 15\ lb/in^2 = 15 \times 144\ lb/ft^2$

$v_2 = 18\ ft/s$ ، $v_1 = 2\ ft/2$ ، $\varrho = \frac{62.4}{32}\ slug/ft^3$ فنجد :

$$P_2 = \frac{1}{2}\ \times\ \frac{62\ 4}{32}\ [\ (2)^2 - (18)^2\ ] + 15 \times 144\ \ lb/ft^2$$

$$P_2 = -\ 0.975 \times 320 + 2160 = -\ 310 + 2160 = 1850\ lb/ft^2$$

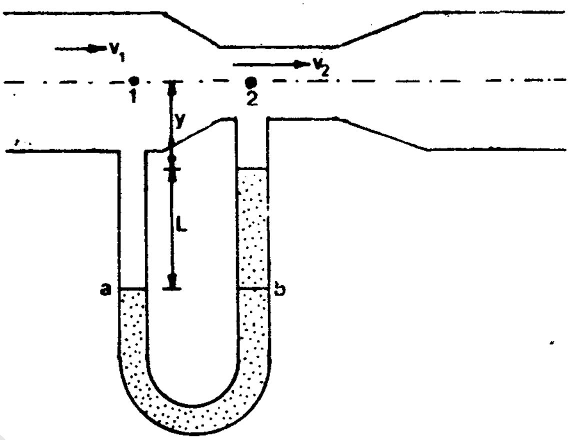
$$P_2 = \frac{1850}{144}\ = 12.8\ lb/in^2$$

ويلاحظ ان ازدياد السرعة يرافقه انخفاض في الضغط .

★ ★ ★

مسالة رقم (١٦ ــ ٢) :

يتألف مقياس فنتوري المبين في الشكـل (١٦ ــ ٢) من أنبوب يدخـل منه السـائل نصف قطره $r_1 = 6\ in$ ومن اختنـاق نصف قطره $r_2 = 3\ in$. ويصل بين الانبوب والاختناق انبوب ذي شعبتـين يحتوي على الزئبق الذي تبلغ كثافته النسبية 13 6 . فاذا علمت أن جريان الماء في الانبوب يجعل الفرق بين سويتي الزئبق في الانبوب ذي الشعبتين يساوي $L = 9\ in$ فأوجد غزارة الماء الذي يتدفق في الانبوب .



الشكل (١٦ - ٢)

الحــل :

تعطى غزارة السائل الذي ينساب في انبوب مساحة مقطعه A_1 وسرعة السائل فيه v_1 بالعلاقة (16-1) وهي :

$$Q = A_1\, v_1 = \pi\, r_1^2\, v_1 \qquad (1)$$

فلنحسب إذن v_1 .

ان تطبيق معادلة برنولي وهي المعـــادلة (16-4) على النقطتين (1) و (2) الظاهرتين في الشكل (١٦ - ٢) والواقعتين على خط جريان أفقي واحد على محور الأنبوب يعطي ما يلي باعتبار أن الانبوب أفقي ، بمعنى ان $h_1=h_2$ ، اذن يكون :

$$P_1 + \frac{1}{2}\, \varrho\, v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\, \varrho\, v_2^2 \qquad (2)$$

الا أن v_2 بحسب معـــادلة الاستمرار ، وهي المعادلة (2 - 16) ، تساوي $\frac{A_1}{A_2} v_1$ أو أن :

$$v_2 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1 \qquad (3)$$

نعوض v_2 في العلاقة (2) بمساويها فنجد :

$$P_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \varrho \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 v_1^2$$

ومنها نجد :

$$v_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \right] = \frac{2}{\varrho} (P_2 - P_1) \qquad (4)$$

ولحساب الفرق ($P_2 - P_1$) نقول أن النقطتين a و b واقعتان في الزئبق وعلى سوية واحدة فالضغط عندهما متساو . والضغط عند a يساوي P_1 مضافاً اليه $\varrho g(y + L)$ بفرض ϱ الكتلة النوعية للماء ، وذلك واضح من الشكل (١٦ – ٢) . كما أن الضغط عند b يساوي P_2 مضافاً إليه ϱgy و $\varrho' gL$ بفرض ϱ' الكتلة النوعية للزئبق إذن لدينا :

$$P_1 + \varrho g (y + L) = P_2 + \varrho gy + \varrho' gL$$

ومنه نجد :

$$P_2 - P_1 = \varrho gL - \varrho' gL = \varrho gL \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho} \right) \qquad (5)$$

نعوض في العلاقة (4) فيكون :

$$v_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right] = 2gL \left(1 - \frac{\varrho'}{\varrho} \right)$$

نستخدم الآن القيم العددية وهي :

$$r_1 = 6 \text{ in} \quad , \quad r_2 = 3 \text{ in} \qquad \frac{r_1}{r_2} = 2$$

$$g = 32 \text{ ft/s}^2$$

$$L = 9 \text{ in} = \frac{9}{12} \text{ ft} = 0.75 \text{ ft}$$

$$\varrho'/\varrho = 13.6$$

فنجد :

$$v_1^2 [-15] = 2 \times 32 \times 0.75 \times (1 - 13.6)$$

$$v_1^2 = \frac{2 \times 32 \times 0.75 \times 12.6}{15} = 40.3$$

ومنـــه : $v_1 = 6.35 \text{ ft/s}$

نعوض الآن في العلاقة (1) فنجد الغزازة Q ويكون :

$$Q = \pi \times \left(\frac{6}{12} \right)^2 \times 6.35$$

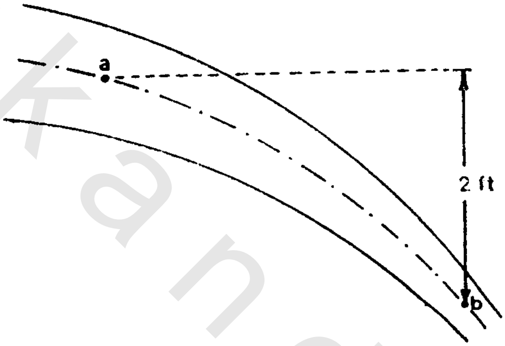
ومنه : $Q = 4.99 \text{ ft}^3/\text{s}$

* * *

مسألة رقم (١٦ ــ ٣) :

إذا كانت سرعة تدفق السائل في نقطة a من انبوب هي 4 ft/s وكان

الضغط القياسي في هذه النقطة $2\ lb/in^2$ فوق الضغط الجوي فاحسب الضغط القياسي في نقطة ثانية b من الانبوب أخفض من النقطة الأولى بـ $2\ ft$ علماً بأن مساحة مقطع الأنبوب في النقطة الثانية أصغر منه في الأولى بمرتين ، وأن السائل المتدفق هو ماء البحر الذي تساوي وزن وحدة الحجم منه $64\ lb/ft^3$ ، يهمل تأثـير اللزوجة ونفترض أن الضغط الجوي يساوي $14.7\ lb/in^2$.



الشكل (١٦ — ٣)

الحـل :

يمكن أن نتصور الشكل تخطيطياً كما هو مبـين في الشكل (١٦ — ٣) حيث نكتب معادلة برنولي من أجل النقطتين a و b الواقعتين على خط جريان واحد منطبق على محور الانبوب :

$$p_1 + \varrho g h_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \varrho g h_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 \qquad (1)$$

ونجد عبارة v_2 بسهولة من معادلة الاستمرار : $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ومنـه :

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\ v_1 = 2\ v_1$$

نستخدم القيم العددية ونختار الخط الافقي المار من b مبـدءاً لقيـاس الارتفاعات h فنجد :

$$p_1 = p'_1 + p_a = 2 + 14.7\ lb/in^2 = 16.7 \times 144\ lb/ft^2$$

$h_1 = 2\ ft$ $\qquad$ $h_2 = 0$

$v_1 = 4\ ft/s$ $\qquad$ $v_2 = 2\ v_1 = 8\ ft/s$

$\varrho g = 64\ lb/ft^3$ $\qquad$ $\varrho = \frac{64}{32} = 2\ slugs/ft^3$

نعوض في المعادلة (1) فيكون :

$$16.7 \times 144\ lb/ft^2 + 64 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 16 = p_2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 64$$

$$P_2 = 2406 + 64 + 16 = 2486\ lb/ft^2 \neq 17.26\ lb/in^2$$

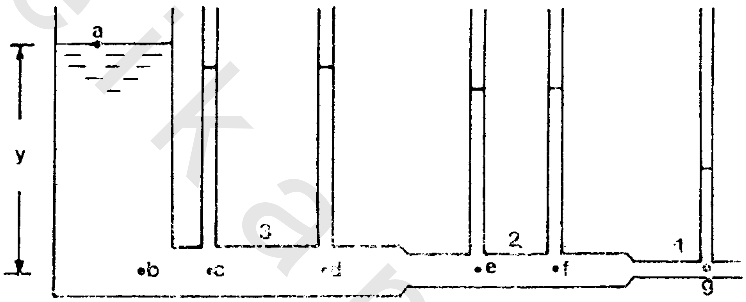
ويكون الضغط القياسي المطلوب : $p_2' = 17.26 - 14.7 = 2.56\ lb/in^2$

* * *

مسألة رقم (١٦ ــ ٤) :

إذا كان الوعاء على يسار الشكل (١٦ ــ ٤) مفتوحـاً للجو وله

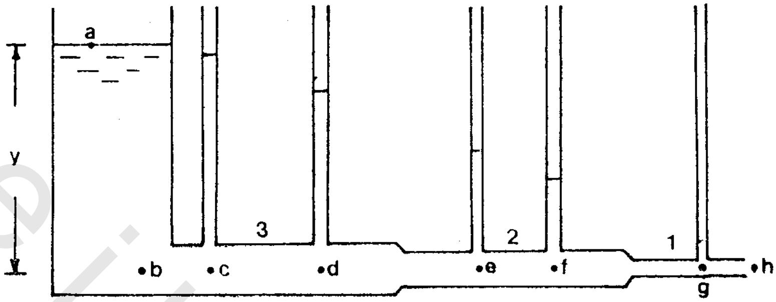
مقطع كبير جداً نسبياً ، وكان عمقه $y = 40\ cm$ ، وكانت مقاطع الانبوب الافقي الموصول بـه هي على الترتيب : $1.0\ cm^2$ ، $0.5\ cm^2$ ، $0.2\ cm^2$ ، وكان المائع مثالياً عديم اللزوجة كتلته النوعية $2\ g/cm^3$، فيطلب (أ) ايجاد معدل التدفق الحجمي الخارج من الوعاء أي الغزارة ؟ (ب) سرعة الانسياب في كل جزء من أجزاء الأنبوب ؟ (حـ) حساب ارتفاعات المائع في الأنابيب الجانبية الشاقولية ؟ وإذا افترض أن المائع



الشكل (١٦ — ٤)

في هذا الوعاء لزوجة تساوي 0.5 poise ، انظر الشكل (١٦ — ٥) ، وأن كتلته النوعية تساوي $0.8\ g/cm^3$ وأن عمق المائع في الوعاء الكبير هو بحيث يكون معدل التدفق الحجمي مساوياً لما في الطلب (أ) أعلاه. وأن المسافة بين الانبوبين الشاقوليين الجانبيين في c و d وكذلك في e و f تساوي $20\ cm$. وأن المقاطع العرضانية للانبوب الأفقي هي ذاتها كما في الشكل (١٦ — ٤) فالمطلوب : (د) أوجد فرق سويتي ارتفاع المائع في الانبوبين الشاقوليين في c و d ؟ (هـ) وكذلك الفرق بين القمتّين في

الانبوبين الجانبيين في e و f ؟ (و) اوجد سرعة التدفق على محور كل قسم من أقسام الأنبوب الأفقي ؟



الشكل (١٦ — ٥)

الحـل :

(أ) نعلم أن سرعة تدفق المائع من فتحة جـانبية واقعـة على عمق y في وعاء كبير ، هي كسرعة السقوط الحر من ارتفاع يساوي عمق الماء وذلك ما تقتضيه المعادلة (6 - 16) أي أن :

$$v_1 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \times 980 \times 40} = \sqrt{78400} = 280 \text{ cm/s}$$

أما معدل التدفق فيساوي مساحة المقطع A_1 في السرعة v_1 :

$$Q = A_1 v_1 = 0{\cdot}2 \times 280 = 56 \text{ cm}^3/\text{s}$$

(ب) لايجاد سرع التدفق في المقاطع المختلفة نستفيد من معادلة الاستمرار وهي : $A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3$ فنجد :

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\ v_1 = \frac{0.2}{0.5} \times 280 = 112 \text{ cm/s}$$

$$v_3 = \frac{A_1}{A_3}\ v_1 = \frac{0.2}{1} \times 280 = 56 \text{ cm/s}$$

(حـ) لحساب ارتفاعات المائع في الأنابيب الجانبية نلجأ إلى معادلة برنولي اي إلى المعادلة (4 — 16) فنكتب :

$$P + \varrho g h + \frac{1}{2} \varrho v^2 = \text{ثابت}$$

وإذا تذكرنا أن P يمثل الضغط المطلق ، أي الضغط القياسي x مضافاً إليه الضغط الجوي P_a أمكن أن نكتب هذه العلاقة بالشكل :

$$(P_a + x) + \varrho g h + \frac{1}{2} \varrho v^2 = \text{ثابت}$$

وهي تصبح من أجل المقاطع المختلفة ، إذا اخذنا محور الانبوب مبدءاً لقياس الارتفاعات $h = o$ ، على الشكل :

$$(P_a + x_1) + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = \text{ثابت} \qquad (1)$$

$$(P_a + x_2) + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 = \text{ثابت} \qquad (2)$$

$$(P_a + x_3) + \frac{1}{2} \varrho v_3^2 = \text{ثابت} \qquad (3)$$

ونجد قيمة الثابت بتطبيق المعادلة في نقطة a من الوعاء الكبير تقع على خط الجريان المار من النقاط b ، c فنجد :

$$(P_a + 0) + \varrho g y + o = P_a + 1 \times 980 \times 40$$

$$\text{الثابت} = P_a + 78400 \text{ dynes/cm}^2$$

وبوضع هذه القيمة في الجانب الثاني من المعادلات (1) ، (2) ، (3) نجد :

$$x_1 + v_1^2 = x_1 + (280)^2 = 78\,400 \text{ dynes/cm}^2$$ ومنـــه :

$x_1 = 0$ وبالتالي $h_1 = 0$ وهو متوقع .

ثم ان : $x_2 + v_2^2 = x_2 + (112)^2 = 78\,400$ ومنـــه :

$$x_2 = 65\,850 \text{ dynes/cm}^2$$

ويكون ارتفاع عمود السائل الذي يولد هذا الضغط هو :

$$h_2 = \frac{x_2}{\varrho g} = \frac{65\,850}{1960} = 33{\cdot}6 \text{ cm}$$

واخيراً : $x_3 + v_3^2 = x_3 + (56)^2 = 78\,400 \text{ dynes/cm}^2$

$$x_3 = 75\,265 \text{ dynes/cm}^2$$

ويكون ارتفاع عمود السائل الذي يولد هذا الضغط هو :

$$h_3 = \frac{x_3}{\varrho g} = \frac{75\,265}{1960} = 38{\cdot}7 \text{ cm}$$

(د) لايجاد فرق الضغط بين النقطتين c و d أي الفرق بـين ارتفـاعي قمتي المائع في الانبوبين نستفيد من معرفة معـدّل التدفق ومن العلاقة $A = \pi r^2$ فلدينا بحسب العلاقة (8 — 16) :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\,\eta}\;\frac{P_1 - P_2}{L} = \frac{A^2}{8\pi\eta}\;\frac{\Delta P}{L}$$

او : $$\Delta P = \frac{8\pi\eta L}{A^2}\, Q$$

ويكون فرق الارتفاع من المائع الذي يولد هذا الضغط هو :

$$\Delta h_1 = \frac{\Delta P}{\varrho g} = \frac{8\pi\eta L}{\varrho g\ A^2}\ Q$$

وبتطبيق هذه العلاقة على القسم الثالث من الانبوب الافقي بين النقطتين c و d نجد :

$$\Delta h_3 = \frac{8 \times 3.14 \times 0.5 \times 20}{0.8 \times 980 \times 1} \times 56 = 17.95 \neq 18\ \text{cm}$$

(هـ) وبتطبيقها مرة أخرى من أجل القسم الثاني نجد فرق سويتي الارتفاع بين e و f :

$$\Delta h_2 = \frac{8 \times 3.14 \times 10}{0.8 \times 980 \times 0.25}\ 56 = 71.8 \neq 72\ \text{cm}$$

(و) لايجاد سرعة التدفق نلجأ لعبارة السرعة العامة وهي العلاقة (7-16) فنجد :

$$v = \frac{\Delta P}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2$$

نظراً لأن $r = o$ من أجل المحور الأفقي . وبالاستفادة مرة أخرى من $A = \pi R^2$ تصبح عبارة السرعة :

$$v = \frac{\Delta P}{4\eta L}\ \frac{A}{\pi}$$

ومن أجل القسم الثالث نجد :

$$v_3 = \frac{\Delta P_3}{4\eta L}\ \frac{A_3}{\pi} = \frac{\Delta h_3\ \varrho\ g A_3}{4\ \eta\ L\ \pi}$$

$$v_3 = \frac{18 \times 0.8 \times 980 \times 1}{4 \times 0.5 \times 20 \times 3.14} = \frac{1765}{15.7} = 112 \text{ cm/s}$$

ونجد مرة أخرى من أجل القسم الثاني أن :

$$v_2 = \frac{\Delta h_2 \, \varrho g \, A_2}{4\pi L \, \eta} = \frac{72 \times 0.8 \times 980 \times 0.5}{4 \times 3.14 \times 20 \times 0.5} = 224 \text{ cm/s}$$

ونحصل على النتيجة نفسها باستخدام معادلة الاستمرار حيث نجد :

$$v_2 = \frac{A_3}{A_1} \, v_3 = \frac{1}{0.5} \, 112 = 224 \text{ cm/s}$$

ويمكن أن نجد أيضاً السرعة في القسم الأول بالطريقة نفسها فيكون :

$$v_1 = \frac{A_3}{A_1} \, v_3 = \frac{1}{0.5} \, 112 = 560 \text{ cm/s}$$

★ ★ ★

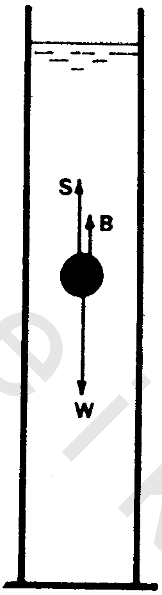
مسألة رقم (١٦ ـ ٥) :

لدينا كرة صلبة نصف قطرها $r = 3$ mm ، نترك هذه الكرة تسقط في سائل بدون سرعة ابتدائية . فاذا فرضنا أن الكرة تبلغ سرعة $v = 6$ cm/s في الوقت الذي يكون تسارعها قد اصبح نصف تسارع الثقالة أي $\frac{g}{2}$ فأوجد : (أ) العلاقة التي تعطي لزوجة السائل η بدلالة r و v وبدلالة الكتلة النوعية لمادة الكرة ϱ' التي تساوي 8.64 g/cm^3 وبدلالة الكتلة النوعية للسائل وهي $\varrho = 1.32 \text{ g/cm}^3$. ثم احسب قيمة عامل اللزوجة .

(ب) احسب السرعة الحدية التي تبلغها الكرة أثناء السقوط .

الحـل :

(أ) تخضع الكرة الساقطة إلى ثقلها w وإلى قوة دافعة ارخميدس B وإلى قوة احتكاك ناشئة عن لزوجة السائل وقد رمزنا لها بـ S على الشكل (١٦ – ٦) وهي القوة التي عبر عنها ستوكس بقانونه (16-9) فاذا فرضنا F محصلة هذه القوى أمكننا أن نكتب :



الشكل (١٦ – ٦)

ولدينا: $$F = w - S - B \qquad (1)$$

$$w = \varrho' g \times \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

$$S = 6\,\pi r \eta v$$

$$B = \varrho\, g \times \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

وذلك باعتبار أن حجم الكرة V هو $\frac{4}{3}\pi r^3$. نعوض في العلاقة (1) فنجد :

$$F = \frac{4}{3}\,\pi r^3 g\,(\varrho' - \varrho) - 6\,\pi r \eta v \qquad (2)$$

نكتب الآن بحسب قانون نيوتن الثاني أن $F = ma$ ونضع $a = g/2$ كما نصت المسألة فيكون :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g(\varrho' - \varrho) - 6\pi r \eta v = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho' \frac{g}{2}$$

التي تكتب بعد الاختصار والترتيب بالشكل :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g\left(\frac{\varrho'}{2} - \varrho\right) = 6\pi r \eta v$$

وتكون η بدلالة المقادير الأخرى معطاة بالعلاقة :

$$\eta = \frac{2 r^2 g}{9 v}\left(\frac{\varrho'}{2} - \varrho\right) \qquad (3)$$

نعوض الآن بالقيم العددية وهي :

$r = 3\ mm = 0.3\ cm$ ، $\varrho' = 8.64\ g/cm^3$ ، $g = 980\ cm/s^2$

$v = 6\ cm/s$ ، $\varrho = 1.32\ g/cm^3$

فنجد :

$$\eta = \frac{2 \times (0.3)^2 \times 980}{9 \times 6}(4.32 - 1.32) = 9.8\ poise$$

(ب) تبلغ الكرة سرعتها الحدية عندما تنعدم محصلة القوى الفاعلة فيها أي عندما يكون :

$$w - S - B = o$$

فاذا فرضنا v_e السرعة الحدية أمكننا عندئذ أن نكتب :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho' g - 6\pi r \eta v_e - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g = 0$$

ومنها نجد :

$$V_c = \frac{1}{6\pi r \eta} \times \frac{4}{3}\pi r^3 g\,(\varrho' - \varrho) = \frac{2\,r^2 g}{9\,\eta}\,(\varrho' - \varrho)$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$V_c = \frac{2}{9} - \frac{(0.3)^2 \times 980}{9.8}\,(8.64 - 1.32) = 2 \times 7.32 = 14.64 \text{ cm/s}$$

* * *