الفصل الثالث عشر

الاجسام المهتزة . الصوت

الأمواج العرضية المستقرة في وتر :

نفترض وتراً مثبتاً من أحد طرفيه ينتشر فيه قطار أمواج نحو اليمين. فبامكاننا أن نعبر عن الانتقال الذي يعانيه كل جزء من أجزاء الوتر يبعد مسافة x عن نقطة توليد الأمواج بحسب العلاقة :

$$y_1 = A \sin 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right) \qquad (13-1)$$

حيث A السعة العظمى للاهتزاز ، f تواتر الاهتزاز ، λ طول موجة الأمواج ، t الزمن . وينعكس قطار الامواج هذا لدى بلوغه نهاية الوتر المثبتة ويكون الانتقال الذي يعانيه الوتر ، بفعل الموجة المنعكسة، في الجزء الذي فاصلته x معطى بالعلاقة :

$$y_2 = A \sin 2\pi \left(ft + \frac{x}{\lambda} \right) \qquad (13-2)$$

ويكون الانتقال المحصل بحسب مبدأ التراكب هو $y_1 + y_2$ وهو ينشأ من تلاقي القطارين . وتشير الدراسة الرياضية الى أنه يحصل من تلاقي

القطارين أن تبقى نقاطٌ من الوتر في حالة السكون مهما تغير الزمن ، وتسمى هذه النقاط بالعقد وإلى أن المسافة بين عقدتين متتاليتين هي $\frac{\lambda}{2}$. ويفصل بين كل عقدتين بطن وتكون المسافة بين بطنين متتالين مساوية $\frac{\lambda}{2}$ أيضاً .

اهتزاز وتر مثبت من نهايتيه :

إذا ثبت وتر من نهايتيه ونُقر عليه ، صدر عن الوتر صوت أو مجموعة أصوات . نسمي الصوت ذا التواتر الأدنى بالتواتر الاساسي أو المدروج الأول وهو يصدر عندما يهتز الوتر بحيث يكون له بطن واحد . ويعطى هذا التواتر بالعلاقة :

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (13 \quad 3)$$

حيث ترمز L الى طول الوتر و F الى قوة شد الوتر و μ إلى كتلة وحدة الطول من الوتر . أما إذا اهتز الوتر بحيث يتشكل له بطنان بين نهايتيه فانه يصدر عنه صوت تواتره ضعف التواتر الاساسي وهو صوت نسميه المدروج الثاني أو النغمة الفوقية الأولى وهكذا ...

حادثة الطنين :

تحصل حادثة الطنين عندما يؤثر في جسم قادر على الاهتزاز سلسلة دورية من الدفعات يساوي تواترها أحد التواترات الطبيعية للجسم . فتزداد عندها سعة اهتزاز الجسم ازدياداً كبيراً قد يبلغ حداً خطراً .

الامواج الطولية المستقرة :

تحصل الأمواج الطولية المستقرة من التقاء قطاري أمواج طوليين متعاكسين في اتجاه الانتشار نولّد احدهما والآخر هو المنعكس. ونجد مثالاً على ذلك في أنبوب كونت وفي الاعمدة الهوائية . وفي الحالة الاولى تتجمع ذرات من الرمل في مواضع العقد وتكون المسافة الفاصلة بين عقدتين متتاليتين مساوية نصف طول الموجة . أما في حالة الاعمدة الهوائية فنميز عادة بين حالتين :

(أ) حالة العمود الهوائي المفتوح : ويصدر عن هذا العمود لدى اهتزازه تواتر أساسي f يعطى بالعلاقة :

$$f = u\,\lambda = u\,(2L) \qquad (13\text{–}4)$$

بفرض L طول العمود و u سرعة الامواج في الهواء . وذلك لضرورة تشكل بطنين عند نهايتي العمود . أما تواترات النغمات الفوقية فهي 2f ، 3f ، 4f ...

(ب) حالة العمود الهوائي المغلق : ويصدر عن هذا العمود لدى اهتزازه تواتر اساسي f يعطى بالعلاقة :

$$f = u\,\lambda = u\,(4L) \qquad (13\text{–}5)$$

وذلك لضرورة تشكل عقدة عند نهاية العمود . أما تواترات النغمات الفوقية التي يمكن أن تصدر عن العمود فهي 3f ، 5f ، 7f ، ....

قانون شدة الصوت :

تعرف شدة الصوت بانها كمية الطاقة التي تمر من وحدة المساحة في الثانية

الواحدة عندما تكون هذه المساحة عمودية على اتجاه انتقال الموجات .
وتبلغ هذه الشدة عند عتبة الصوت 10^{-10} ميكروواط / سم٢ · وتتناقص شدة الصوت مع البعد فتعطى على بعد مقداره d من منبع شدته I_o بالعلاقة :

$$I = I_o/d^2 \qquad (13-6)$$

وغالباً ماتقارن شدات الاصوات ببعضها ، فيحسب منسوب الصوت ذي الشدة I بدلالة شدة الصوت عند العتبة بالعلاقة :

$$\text{منسوب الصوت ذي الشدة I} = L = \log_{10} \frac{I}{I_o} \qquad (13-7)$$

وتقدر عندها السوية بالبِل وهو يساوي 10 db أي عشرة ديسيبل .

حادثة الخفقان :

تنتج حادثة الخفقان من التقاء موجتين لهما نفس السعة الا أنهما مختلفتان قليلاً في التواتر . ويبرهن على أن عدد الخفقات التي يعطيها منبعان تواتراهما f_1 و f_2 في الثانية الواحدة هو :

$$f = |f_1 - f_2| \qquad (13-8)$$

وبالطبع فان الزمن بين خفقتين متتاليتين يساوي :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \qquad (13-9)$$

حادثة دوبلر :

وهي حادثة يحصل بموجبها اختلاف في ارتفاع الصوت أي في تواتره ،

بسبب حركة منبع الصوت أو حركة الراصد أو حركة الاثنين معاً .
فاذا كان f_s تواتر المنبع و v_s سرعتـــه وكان f التواتر الذي يسمعه الراصد و v_L سرعته وكانت u سرعة الصوت في الهواء الساكن كان لدينا :

$$\frac{f}{u+v_L}=\frac{f_s}{u+v_s} \qquad (13-10)$$

ونعتبر في هذه العلاقة u موجبة دوماً . أما v_s و v_L فنعتبرهما موجبتان إذا كانتا بالاتجاه من الراصد الى المنبع وإلا فسالبتان . ونفترض ضمناً أن الراصد والمنبع يتحركان على استقامة واحدة .

وفي الحالة التي تهب فيها ريح بسرعة v_m بحيث تعاكس وصول الصوت إلى الراصد فان القانون يصبح :

$$\frac{f}{(u-v_m)+v_L}=\frac{f_s}{(u-v_m)+v_s} \qquad (13-11)$$

أما إذا كانت الريح تساعد وصول الصوت الى الراصد فان القانون الصحيح هو:

$$\frac{f}{(u+v_m)+v_L}=\frac{f_s}{(u+v_m)+v_s} \qquad (13-12)$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٣ ـ ١) :

يعطي وتر مشدود بثقل 4 kg ثماني خفقات في الثانية مع رنانة معينة ، وعند شد هذا الوتر بقوة تساوي ثقل 16 kg تصبح اهتزازاته على وفاق مع

اهتزازات الرنانة والمطلوب : (أ) ايجاد تواتر هذه الرنانة (ب) إيجـاد سرعة الصوت في الوتر إذا علمت أن طوله $L = 9.8\ m$ (حـ) ماهي كتلة الوتر المذكـور ؟

الحـل :

(أ) لدينا في حالتي الشد التواترين :

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_1}{\mu}} \qquad \text{و} \qquad f_2 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_2}{\mu}}$$

وبتقسيمهما نجد :

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \qquad (1)$$

ونعلم من نص المسألة أن فرق التواترين (أي عدد الخفقات) هو :

$$f_2 - f_1 = 8 \qquad (2)$$

وبأخذ قيمة f_1 من المعادلة (2) ووضعها في المعادلة (1) نجد :

$$\frac{f_2 - 8}{f_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

وهي تكتب بالشكل :

$$f_2\left(1 - \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) = 8$$

$$f_2 = \frac{8}{1 - \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}} = \frac{8}{1 - \sqrt{\frac{4}{16}}} = 16\ c/s$$

نعوض في العلاقة (2) فنجد : $f_1 = 16 - 8 = 8 \ c/s$

(ب) لحساب سرعة الصوت نستفيد من العلاقة : $u = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

حيث λ طول الموجة ، f التواتر . وبما أن الوتر مثبت من طرفيه فـــان طول الموجة $\lambda = 2 L$ إذن يكون :

$$u_2 = \lambda f_2 = 2 L f_2 = 2 \times 9.8 \times 16 = 313.6 \ m/s$$

عندما يكون الوتر مشدوداً بثقل 16 kg . أما عندما يكون الوتر مشدوداً بثقل 4 kg فيكون لدينا :

$$u_1 = \lambda f = 2 L \ f_1 = 19.6 \times 8 = 156.8 \ m/s$$

(ج) لدينا : $f_1 = \frac{1}{2 L} \sqrt{\frac{F_1}{\mu}}$

أو : $\mu = \frac{F_1}{4 f_1^2 L^2}$ ومنـــه :

$$m = \mu L = \frac{F_1}{4 f_1^2 L} = \frac{4 \times 980 \times 10^3}{4 \times 8^2 \times 980} = \frac{1000}{64} = 15.6 \ g$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٣ ـ ٢) :

احسب ثابت مرونة كل من النوابض الأربعة التي تستند اليها عربة قطار وزنها 50 طناً . إذا علمت أن العربة تشرع بالاهتزاز الشديد عندما تبلغ سرعة القطار $v = 12 \ m/s$. نفترض أن المسافة بين كل فاصلي تمدد في

سكة الحديد التي يسير عليها القطار تساوي $L = 12.8\ m$ وأن النوابض التي تحمل العربة متماثلة .

الحـل :

لندرس أولاً جملة العربة والنوابض فنحسب دور اهتزازها الطبيعي . فنحن نعلم أن دور اهتزاز كتلة m تستند إلى نابض ثابت مرونته k أو معلقة بهذا النابض هو :

$$T = 2\pi \sqrt{m/k} \qquad (1)$$

ولما كانت العربة تستند الى أربعة نوابض متماثلة فان نصيب كل نابض من الوزن w هو $w/4$ وبالتالي فنصيب كل نابض من الكتلة m هو $w/4g$ ويكون دور الاهتزاز الطبيعي لجملة العربة والنوابض اذن هو :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{w}{4gk}} \qquad (2)$$

فاذا اثرت الآن بالعربة قوة شاقوليـــة بصورة دورية ، وإذا كان دور تطبيق هذه القوة مساوياً دور اهتزاز العربة الطبيعي حدثت حادثة الطنين واهتزت العربة بسعة عظمى ويكون اهتزازها شديداً . فمن أين تأتي هذه القوة الدورية ؟

إن مرور العربة فوق فواصل التمدد يجعلها تهتز في المستوي الشاقولي مرة فوق كل فاصل ويكون الزمن الفاصل بين اهتزازتين قسريتين هو الزمن نفسه الذي يحتاجه القطار كي يقطع المسافة L بين فاصلي تمدد أي أن دور

القوة القسرية المطبقة على العربة هو :

$$T' = \frac{L}{v} \qquad (3)$$

نضع $T=T'$ وهو شرط الطنين فيكون :

$$2\pi \sqrt{\frac{w}{4gk}} = \frac{L}{v}$$

ومنها نجد بالتربيع والاصلاح :

$$k = \left(\frac{\pi v}{L} \right)^2 \frac{w}{g} \qquad (4)$$

نعوض بالقيم العددية وهي :

$$g = 981\ cm/s^2 \text{ ، } w = 50\ ton \text{ ، } L = 1280\ cm \text{ ، } v = 1200\ cm/s$$

فنجد :

$$k = \left(\frac{\pi \times 1200}{1280} \right)^2 \times \frac{50}{981} = 0.44\ ton/cm$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٣ ـ ٣) :

يلاحظ وجود ستة بطون عنـــد تشكل الأمواج المستقرة في انبوب كونت ، والمطلوب ما هو طول عمود الهواء الذي تشكلت فيه الأمواج المستقرة إذا كان القضيب الفولاذي مثبتاً (أ) من منتصفه ؟ (ب) من طرفه ؟ (ج) من نقطتين تقسمانه إلى ثلاثة أقسام متكافئة ؟ نفترض أن طول القضيب يساوي

متراً واحداً . وتعطى سرعة الصوت (الأمواج الطولانيـة) في الفولاذ هي $5250\ m/s$ وسرعته في الهواء هي $343\ m/s$.

الحـل :

عند إثارة الاهتزازات في القضيب الفولاذي تتشكل فيـه موجة مستقرة عُقدها في النقاط الثابتة وبطونها في الأطراف السائبة . كما تتشكل الأمواج المستقرة في عمود الهواء . ويتحدد طول الموجة هنا من ضعفي المسافة بين بطنين متجاورين أو بين عقدتين . فاذا ذيلنا المقادير العائدة للقضيب الفولاذي بالدليل 1 والمقادير العائدة للهواء بالدليل 2 أمكننا أن نكتب :

$u_2 = f\lambda_2$ و $u_1 = f\lambda_1$ ومنه :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_1}{u_2} \qquad (1)$$

ويرتبط طول عمود الهواء L_2 المطلوب حسابه بطول الموجة λ_2 بالعلاقة:

$$n\,\frac{\lambda_2}{2} = L_2 \qquad (2)$$

حيث n عدد البطون المتشكلة . ومن العلاقتين (1) و (2) نجد :

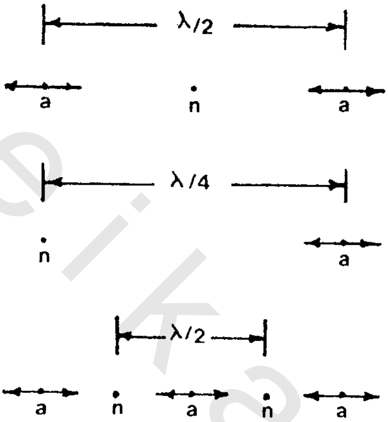
$$L_2 = \frac{n}{2}\,\lambda_1\,\frac{u_2}{u_1}$$

فالمتغير الوحيد في هذه العلاقة هو λ_1 ونحدده من أوضاع ربط القضيب في أنبوب كونت وقد بينا في الشكل (١٣ – ١) مواضع العقد والبطون في الحالات الثلاث ورمزنا بـ N للعقدة و بـ A للبطن .

$$\lambda_1 = 2\,L_1 \quad , \quad L_2 = \frac{n\,L_1\,u_2}{u_1} = 39.2\ \text{cm} \qquad \text{(أ)}$$

$$\lambda_1 = 4\,L_1 \quad , \quad L_2 = \frac{2\,n\,L_1\,u_2}{u_1} = 78.4\ \text{cm} \qquad \text{(ب)}$$

$$\lambda_1 = L_1 \quad , \quad L_2 = \frac{n\,L\,u_2}{2\,u_1} = 16.5\ \text{cm} \qquad \text{(ج)}$$



الشكل (١٣ — ١)

يلاحظ هنا أنه يفترض امكان التحكم بطول عمود الهواء كأن تكون قاعدة أنبوب كونت مكبساً متحركاً .

* * *

مسألة رقم (١٣ — ٤) :

يبلغ منسوب الصوت الصادر عن صفارة على بعد أربعة أمتار منها مقدار 90 db فما هو منسوب الصوت على بعد ألفي متر ؟

الحـل :

تعطي العلاقة (13—7) منسوب صوت شدته I بدلالة الصوت العياري ذي الشدة I_o وهذه العلاقة هي :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_o}\ (\text{db}) \qquad (1)$$

ومن جهة اخرى فان شدة الصوت تتغير بدلالة البعد ، وباستطاعتنا أن نكتب بحسب العلاقة (6 - 13) أن :

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \qquad (2)$$

وهي علاقة نستطيع كتابتها بالشكل :

$$\frac{I_2/I_o}{I_1/I_o} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

او :

$$\log \frac{I_2}{I_o} - \log \frac{I_1}{I_o} = 2 \log \left(\frac{d_1}{d_2}\right)$$

وبضرب طرفي هذه العلاقة بـ 10 والاستفادة من العلاقة (1) نجد :

$$L_2 - L_1 = 20 \log \left(\frac{d_1}{d_2}\right)$$

ومنه :

$$L_2 = L_1 + 20 \log \left(\frac{d_1}{d_2}\right) = L_1 - 20 \log \frac{d_2}{d_1}$$

وبالتعويض بالقيم العددية وهي :

$L_1 = 90$ db ، $d_1 = 4$ m ، $d_2 = 2000$ m ، $\frac{d_2}{d_1} = 500$ نجد :

$$L_2 = 90 - 20 \log 500$$

$$L_2 = 90 - 20 \times 2.7$$

$$L_2 = 90 - 54 = 36 \text{ db}$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٣ ــ ٥) :

يسير قطـــار بسرعة 100 ft/s في الهواء الساكن . فاذا كان تواتر الصوت الذي تعطيه صفارة القاطرة يساوي 500 c/s فما هو طول الموجة الصوتية (أ) أمام القاطرة و (ب) خلف القاطرة ؟ ومـــا هو التواتر الذي يسمعه راصد ساكن (حـ) أمام القاطرة (د) خلف القاطرة؟

ما هو التواتر الذي يسمعه مسافر في قطـــار آخر يسير بسرعة 50 ft/s (هـ) ويتجه نحو الأول (و) يتجه بعيداً عن الأول ؟ (ز) كيف تتغير الاجوبة السابقة إذا هبت ريح بسرعة 30 ft/s بالاتجاه الذي تسير بـــه القاطرة الأولى ؟ تعطى سرعـة الصوت في الهواء وهي تساوي 1140 ft/s .

الحـل :

(أ) تزدحم الأمواج الصوتية الصادرة عن صفارة القاطرة أمامها بحيث تشغل بعد زمن t المسافـة $ut - v_s t$ حيث u سرعة انتشار الصوت في الهواء و v_s سرعـة القاطرة ولما كان عدد الإهتزازات التي تصدرها الصفارة خلال الفترة t هو $f_s t$ فإن طول الموجة أمام القاطرة :

$$\lambda\,(\text{أمام القاطرة}) = \frac{u - v_s}{f_s} \qquad (1)$$

$$\lambda = \frac{1140 - 100}{500} = \frac{1040}{500} = 2.08 \text{ ft}$$

(ب) وبما أن عدد الأمواج ذاته يتجمع خلف القاطرة في المجال $ut + v_s t$ فإن :

$$\lambda\,(\text{خلف القاطرة}) = \frac{u + v_s}{f_s} \qquad (2)$$

$$\lambda = \frac{1140 + 100}{500} = \frac{1240}{500} = 2.48 \text{ ft}$$

(حـ) نحسب التواتر الذي يسمعه راصد في هواء ساكن من العلاقة :

$$f = f_s \frac{u + v_L}{u + v_s} \qquad (3)$$

وبما أن الراصد ساكن أمام القاطرة أي $v_L = 0$ والسرعة v_s موجهة عكس اتجاه الخط الواصل بين الراصد والمنبع فان :

$$f\,(\text{أمام القاطرة}) = f_s \frac{u}{u - v_s}$$

$$f = 500 \frac{1140}{1140 - 100} = 500 \frac{1140}{1040} = 548 \text{ c/s}$$

ويمكن أن نجد هذا التواتر مباشرة من الطلب (أ) وبالفعل فلدينا :

$$f\,(\text{أمام القاطرة}) = \frac{u}{\lambda\,(\text{امام القاطرة})} = \frac{1140}{2.08} = 548 \text{ c/s}$$

(د) بما أن الراصد ساكن خلف القاطرة يكون $v_L = 0$ ويكون $v_s > 0$ وتصبح العلاقة (3) بالشكل :

أي :

$$f = f_s \frac{u}{u + v_s}$$

$$f\,(\text{خلف القاطرة}) = 500 \frac{1140}{1140 + 100} = 500 \frac{1140}{1240} = 459 \text{ c/s}$$

ونحصل على النتيجة نفسها مباشرة بالاستفادة من الطلب (ب) حيث نجد :

$$f(\text{خلف القاطرة}) = \frac{u}{\lambda(\text{خلف القاطرة})} = \frac{1140}{2.48} = 459 \text{ c/s}$$

(هـ) بما أن الراصد في هذه الحالة يتحرك مع القطار الثاني بسرعة 50 ft/s يكون $v_L = 50$ ft/s وهي موجبة وتكون $v_s < o$ ، وتصبح العلاقة (3) بالشكل :

$$f(\text{قبل تقابل القطارين}) = f_s \frac{u + v_L}{u - v_s}$$

$$f = 500 \frac{1140 + 50}{1140 - 100} = 500 \frac{1190}{1040} = 572 \text{ c/s}$$

(و) في هذه الحالة تصبح $v_L < o$ و $v_s > o$ وتصبح العلاقة (3) بالشكل:

$$(\text{بعد تقابل القطارين})\ f = f_s \frac{u - v_L}{u + v_s}$$

$$f = 500 \frac{1140 - 50}{1140 + 100} = 500 \frac{1090}{1240} = 439 \text{ c/s}$$

(ز) عند هبوب الرياح بسرعة v_m باتجاه سير القطار تتجمع الامواج ، بالنسبة لراصد ساكن $v_L = o$ ، في المجال $ut - v_s t + v_m t$ بدلاً من المجال $ut - v_s t$ ويصبح طول الموجة في الطلب (أ) خاضعاً للعلاقة :

$$\lambda(\text{أمام القاطرة مع الرياح}) = \frac{u - v_s + v_m}{f_s}$$

$$\lambda = \frac{1140 - 200 + 30}{500} = \frac{1070}{500} = 2.14 \text{ ft}$$

ويصبح بالمثل طول الموجة في الطلب (ب) :

$$\lambda\ (\text{خلف القاطوة مع الرياح}) = \frac{u + v_s - v_m}{f_s}$$

$$\lambda = \frac{1140 + 100 - 30}{500} = \frac{1210}{500} = 2.42\ \text{ft}$$

أما علاقة التواتر رقم (3) فتصبح عند هبوب الرياح بالشكل :

$$f = f_s \frac{u + v_L - v_m}{u + v_s - v_m} \qquad (4)$$

على أساس أن u موجبة دوماً وان السرع الاخرى تؤخــذ موجبة إذا كانت باتجاه الخط الواصل بين الراصد والمنبع . وتصبح العلاقة (4) في الحالات الاخرى كما يلي :

$$f = f_s \frac{u + v_m}{u - v_s + v_m} = 500 \frac{1140 + 30}{1140 - 100 + 30} = 500 \frac{1170}{1070} = 547 \qquad (\text{ح})$$

$$f = f_s \frac{u - v_m}{u + v_s - v_m} = 500 \frac{1140 - 30}{1140 + 100 - 30} = 500 \frac{1110}{1210} = 458 \qquad (\text{د})$$

$$f = f_s \frac{u + v_L + v_m}{u - v_s + v_m} = 500 \frac{1140 + 50 + 30}{1140 - 100 + 30} = 500 \frac{1220}{1070} = 570 \qquad (\text{ه})$$

$$f = f_s \frac{u - v_L - v_m}{u + v_s - v_m} = 500 \frac{1140 - 50 - 30}{1140 + 100 - 30} = 500 \frac{1060}{1210} = 438 \qquad (\text{و})$$

★ ★ ★