الفصل العاشر

المرونـــة

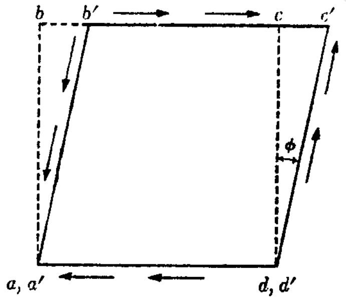
الإجهـاد :

عندما يطبق على جسم ما قوى شد أو ضغط أو ثني فاننا نقول عن الجسم أنه في حالة توتر . وبما أن هذه القوى قوى تطبق على سطح الجسم فانه لا يكفي لوصف تأثير هذه القوى على الجسم أن نعرف اتجاه هذه القوى وإنما علينا أن نعرّف اتجاه السطح بالنسبة الى هـذه القوى . نسمي القوة المطبقة على وحدة السطح بالاجهاد وهناك حالتان هامتان للاجهاد : الحالة الاولى عندما تكون القوة المطبقة عمودية على السطح فنقول عن الاجهاد في هذه الحالة انه إجهاد شدي أو ناظمي . والحالة الثانية عندما تكون القوة المطبقة موازية للسطح كالحالة التي نطبق فيها مزدوجة على إطـار مربـع محاولين تشويهه فنسمي الاجهاد إجهاداً مماسياً أو قصياً . وفي الحالة العامـة اذا كانت القوة المطبقة تميل بزاوية معينة على السطح فاننا نستطيع تحليل هذه القوة الى قوتين ونعبر عن تأثيرها بمعرفة التأثير الناتج عن الاجهادين . فاذا كانت مساحة السطح A' والقوة المطبقة F كان الاجهـاد النـــاظمي $S_n = \frac{F_n}{A'}$ والاجهاد المماسي $S_t = \frac{F_t}{A'}$ حيث F_n المركبة الناظميـــة للقوة

و F_t مركبتها المماسية . وإذا أردنا أن نحدد الاجهاد الذي يخضع له عنصر حجمي صغير داخل جسم ما فاننا نحتاج إلى معرفة تسعة مقادير يسهل التعرف عليها إذا أخذنا الحجم العنصري عبارة عن مكعب ، فلتحديد الاجهاد علينا أن نحدد الإجهاد على كل وجه فنحتاج إلى ثلاثة مركبات من أجل كل وجه فيكون المجموع 18 عدداً ، أما إذا افترضنا تجانس الاجهاد (أي تساويه في أية نقطة داخل الجسم من أجل اتجاه السطح نفسه) فاننا نحتـــاج إلى تسعة أعداد لتحديد الاجهاد تماماً وإذا افترضنا توازن المكعب داخل الجسم يَنقُص عدد المركبات اللازمة لتحديد الإجهاد إلى 6 مركبات ، وقد ينقص هذا العدد إذا وجد التناظر . لذلك يصنف الاجهاد في صنف المقادير الفيزيائية المسماة بالتنسورات .

التشوه أو الانفعال :

لأخذ فكرة عن القوة المؤثرة وشدتها قسمنا هذه القوة على السطح وعرفنا الاجهاد . وكذلك لمعرفة مقدار التغير الناتج عن تأثير الاجهـــاد وتقديره دون النظر الى أبعاد الجسم نعرف التشوه الذي هو عبارة عن التغير النسبي الذي يطرأ على الجسم . فاذا كان التغير ازدياد طول كان



الشكل (١٠ — ١)

التشوه شدياً ويعرف بالنسبة $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$. ويكون التشوه انضغاطياً إذا كان هناك نقصان في الطول . ونلاحظ أن التشوه نسبة طول إلى طول أي

أنه عدد صرف . وإذا كان التشوه قصياً أمكن قياسه بظل الزاوية Φ الظاهرة في الشكل (١٠ – ١) أو بالزاوية نفسها مقدرة بالراديان . وإذا كان الإجهاد ضغطاً متساوياً من جميع الجهات أي ضغطاً راكدياً عرفنا التشوه الحجمي $\frac{\Delta v}{v_o}$.

عـــامل المرونة :

إن التقريب الأول للعلاقة الكائنة ما بين الإجهاد والتشوه هو أن الإجهاد يتناسب مع التشوه ، وهذا مايعرف بقانون هوك . ولكتابة هذا القانون بدقة نحتاج إلى كتابة كل من الإجهاد والتشوه على شكل تنسور ثم أن نربط بينهما بتنسور آخر هو تنسور المرونة . لكننـا سنكتفي بتطبيق هذا القانون على حالات خاصة بسيطة أولهـــا أن نكتب نسبة الإجهـــاد الشدي إلى التشوه الشدي مساوية الى مقدار ثابت هو عـــامل يانغ في المرونة :

$$Y = \frac{F_n/A}{\Delta l/l_o} \qquad (10-1)$$

والعلاقة الثانية هي تناسب الإجهاد القصي الى التشوه القصي :

$$S = \frac{F_t/A}{\Phi} \qquad (10-2)$$

ويسمى S عامل القص .

أما العلاقة الثالثة التي تعطي عامل المرونة الحجمي فهي :

$$B = \frac{-P}{\Delta v / v_o} \qquad (10-3)$$

حيث ترمز P الى الضغط المطبق على المادة . وقد وضعت اشارة الناقص لأن ازدياد الضغط يسبب دائماً نقصاً في الحجم ، ولنحصل على قيم موجبة لـ B . وكثيراً ما يستخدم مقلوب العامل الحجمي الذي يسمى بالانضغاطية ويرمز له بـ K وعليه فان :

$$K = \frac{1}{B} = \frac{-\Delta v / v_o}{P} \qquad (10-4)$$

وواضح أنه ليس لهذه العلاقات معنى دقيقاً إلا في حالة تناسب الإجهاد مع التشوه ، أي في حالة كون العلاقة خطية بينهما . ويسمى المجال الذي تكون فيه العلاقة خطية بمجال المرونة وهو يتصف بخاصة أخرى هي أن الجسم يعود إلى حالته الابتدائية عندما يزول الإجهاد عنه . وتسمى آخر نقطة في هذا المجال حدّ المرونة .

ثابتة القوة :

تميّز عوامل المرونة المذكورة صفات المادة التي صنع منها الجسم سواء أكان قضيباً أو نابضاً أو غير ذلك . فهي لاتعطي مقدار التشوه لقضيب معين أو نابض معين إلا بعد معرفة أبعاد هذا القضيب أو النابض بالإضافة إلى القوة المطبقة واتجاهها . فنكتب في حالة نابض مثلاً أن : $F = kx$ حيث سمينا k ثابتة قوة النابض وبالمثل نستطيع أن نكتب المعادلة (10-1) بطريقة مشابهة فيكون :

$$F = \frac{YA}{l_0}\,\Delta l \qquad (10-5)$$

أو :

$$F = k\,\Delta l$$

ونسمي هذه الثابتة ثابتة القوة للسلك المعطى مثلاً . فهي تختلف باختلاف طول السلك وسطح مقطعه ومادته في حين أن Y كانت مستقلة عن الطول والمقطع ولا تتعلق إلا بنوع المادة .

* * *

مسألة رقم (١٠ ــ ١) :

يساوي الاجهاد عند حد المرونة لحبل فولاذي حامل لمصعد $40\,000\ \mathrm{lb/in^2}$. أوجد اكبر تسارع يمكن أن يحرك به مصعد وزنه طنان إذا كان المصعد محمولاً بحبل مساحة مقطعه $\frac{1}{2}\ \mathrm{in^2}$ على أن لايتجاوز الإجهاد 1/4 الاجهاد عند حد المرونة .

الحـل :

يتحدد أكبر تسارع بتحديد أكبر قوة شد يمكن أن يتحملها حبل المصعد من المعادلة :

$$T - w = m\,a \qquad (1)$$

حيث T توتر الحبل و w وزن المصعد و a تسارعه (في حالة حركته نحو الأعلى بتسارع a أو حركته نحو الأسفل بتباطؤ a) . ومن جهة اخرى فان جداء الاجهاد عنـــد حد المرونة بسطح مقطع السلك يعطي

قوة الشد العظمى التي يمكن تطبيقها على الحبل الفولاذي الحامل المصعد والتي إذا ازيلت عاد الحبل الى طوله الطبيعي ، إلا أننا نريد أن لايتجاوز الاجهاد الذي يخضع له الحبل ربع حد المرونة فقوة الشد العظمى المسموح بها هي :

$$T_{max} = \frac{1}{4} \times 40\,000 \times \frac{1}{2} = 5000 \text{ lb}$$

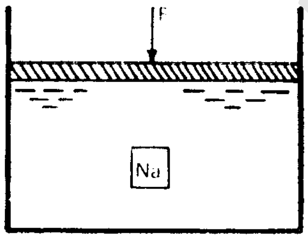
ونجد من العلاقة (1) أن :

$$a_{max} = (T_{max} - w)/m = \frac{5000 - 2 \times 2000}{2 \times 2000/32} = \frac{32\,000}{4000} = 8 \text{ ft/s}^2$$

* * *

مسالة رقم (١٠ ـ ٢) :

يراد قياس انضغاطية الصوديوم بملاحظة انتقال المكبس في الشكل (١٠ ـ ٢) عند تطبيق قوة عليه . فيغمر الصوديوم في زيت يملأ الاسطوانة تحت المكبس . فاذا فرضنا أن المكبس وجدران الاسطوانة صلدة تماماً وأنه لايوجد إحتكاك ولا تسرب في الزيت . فاحسب انضغاطية الصوديوم بدلالة القوة F ، وانتقال المكبس x ومساحته A ، وحجم الزيت الابتدائي V_0 وحجم الصوديوم الابتدائي V'_0 وانضغاطية الزيت k .



الشكل (١٠ ـ ٢)

الحـل :

إن انتقال المكبس مسافة x يقابل نقصاً في الحجم قدره Ax حيث A

مساحة مقطع الاسطوانة . وهذا يساوي الى نقصان حجم الزيت مضافاً اليه نقصان حجم الصوديوم أي :

$$A \cdot x = \Delta V + \Delta V'$$

وإذا فرضنا k' انضغاطية الصوديوم كان لدينا : $k' = \left| \frac{\Delta V'}{PV'_0} \right|$

ومنه : $\Delta V' = k'PV'_0$ وبالمثل نكتب : $\Delta V = kPV_0$

اذن يكون : $Ax = k'PV'_0 + kPV_0$ ومنه :

$$k' = \frac{1}{PV'_0}\left[Ax - kPV_0\right] = \frac{A}{FV'_0}\left[Ax - kV_0\frac{F}{A}\right]$$

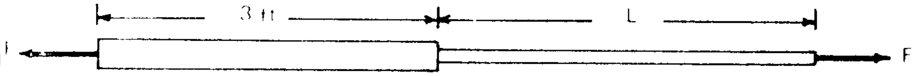
* * *

مسألة رقم (١٠ ـ ٣) :

يربط قضيب نحاسي طوله $L' = 3\ ft$ ومساحة مقطعه $A' = 0.5\ in^2$ ، بقضيب فولاذي طوله L ومساحة مقطعه $A = 0.2\ in^2$. تخضع جملة القضيبين إلى قوتي جذب متعاكستين شدة كل منهما $F = 6\ 000\ lb$ مطبقتين عند نهايتي الجملة والمطلوب (أ) أوجد طول قضيب الفولاذ L إذا كانت استطالة القضيبين واحدة . (ب) ما هو الاجهاد في كل من القضيبين ؟ (ﺣ) ما هو تشوه كل من القضيبين ؟ يعطى عامل يانغ للفولاذ $Y = 29 \times 10^6\ lb/in^2$ ويعطى عامل يانغ للنحاس وهو يساوي $Y' = 20 \times 10^6\ lb/in^2$.

الحـل :

(أ) نحسب أولاً استطالة القضيب الفولاذي نتيجة تأثير قوة مساوية لـ F



الشكل (١٠ – ٣)

لأن أي مقطع من القضيب عبارة عن جسم متوازن فهو يخضع إلى قوتين متعاكستين ومتساويتين بدءاً من النهاية الاولى وحتى النهاية الثانية، وعلى وجه الخصوص عند مقطع الربط بين القضيبين . ولدينـــا بالنسبة للفولاذ العلاقة :

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{F.L}{A.\Delta L}$$

ومنها نجد : $L = \dfrac{Y.A.\Delta L}{F}$ ، وبالمثل بالنسبة للنحاس يكون:

$$L' = \frac{Y'.A'.\Delta L'}{F}$$

وبأخذ النسبة بينهما نجد :

$$\frac{L}{L'} = \frac{Y.A.\Delta L}{F} \cdot \frac{F}{Y'.A'.\Delta L'}$$

وبالاختصار نجد : $\dfrac{L}{L'} = \dfrac{Y}{Y'} \cdot \dfrac{A.\Delta L}{A'.\Delta L'}$

فاذا كان $\Delta L = \Delta L'$ آلت العلاقة السابقة بعد الاختصار والترتيب إلى :

$$L = L' \frac{Y \cdot A}{Y' \cdot A'} = 1.8 \text{ ft}$$

(ب) الإجهاد في القضيب النحاسي : $\frac{F}{A'} = \frac{6000}{0.5} = 12\,000 \text{ lb/in}^2$

وبالنسبة للقضيب الفولاذي : $\frac{F}{A} = \frac{6000}{0.2} = 30\,000 \text{ lb/in}^2$

(حـ) تشوه القضيب النحاسي : $\frac{\Delta L'}{L'} = \frac{F/A'}{Y'} = \frac{12000}{20 \times 10^6} = 0.0006$

تشوه قضيب الفولاذ : $\frac{\Delta L}{L} = \frac{F/A}{Y} = \frac{30000}{29 \times 10^6} = 0.0001$

مسألة رقم (١٠ ــ ٤) :

يدوّر ثقل مقداره $w = 32$ lb مربوط بنهاية سلك فولاذي طوله الطبيعي $l = 2$ ft في دائرة شاقولية بسرعة زاوية ω تساوي دورتان في الثانية عند أسفل الدائرة . فاذا علمت أن مساحة مقطع السلك $A = 0\text{-}01 \text{ in}^2$ فاحسب مقدار استطالة السلك عندما يكون السلك في أسفل نقطة من مساره ؟ نفرض أن عامل يانغ للفولاذ يساوي $29 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$.

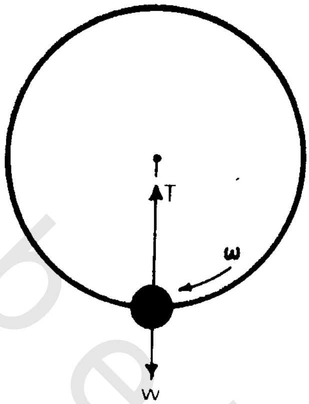
الحـل :

إذا كانت ω السرعة الزاوية للجسم في أسفل نقطة من الدائرة ، فان هذا الجسم لابد وأن يخضع إلى قوة مركزية شدتها $m l \omega^2$ باعتبار l نصف قطر الدائرة و m كتلة الجسم الدائر . وواضح من الشكل (١٠-٤)

أن هذه القوة المركزية هي T-W اذن لدينا :

$$T - w = ml\omega^2$$ ومنه :

$$T = w + ml\,\omega^2 \qquad (1)$$



الشكل (١٠ – ٤)

فالسلك اذن مشـــدود بقوة T تحددها العلاقة السابقة . ويستطيل السلك بحسب العلاقة :

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/l}$$

التي تعطي مقدار الاستطالة Δl كما يلي:

$$\Delta l = \frac{F.l}{YA}$$

نعوض F بمساويها من العلاقة (1) إذ أن $F = T$ فنجد :

$$\Delta l = \frac{l}{YA}\,(w+ml\omega^2)$$

ولدينا :

$$l = 2\ \text{ft}$$
$$Y = 29 \times 10^6\ \text{lb/in}^2$$
$$A = 0.01\ \text{in}^2$$
$$w = 32\ \text{lb}$$
$$m = 1\ \text{slug}$$
$$\omega = 2 \times 2\pi = 4\pi\ \text{rad/s}$$

اذن يكون :

$$\Delta l = \frac{2}{29\times10^6\times0.01}\left(32+ 1\times 2 \times 16\,\pi^2\right) = \frac{2 \times 352}{29 \times 10^4} = 0.00242\ \text{ft}$$

$$\Delta l = 0.0024 \times 12 = 0.029\ \text{in}$$

* * *

مسألة رقم (١٠ ــ ٥) :

يستخدم رجل سلكاً نحاسياً لرفع جسم وزنه $w = 5 \text{ lb}$ موضوع على منضدة . فاذا علمت أن السلك يستطيل بمقدار $\Delta l = 0.06 \text{ in}$ نتيجة رفع الجسم مسافة $h = 6 \text{ in}$ فالمطلوب : (أ) أوجد الطاقة التي بذلها الرجل حتى شرع الجسم بالارتفاع عن المنضدة . (ب) ماهي الطاقة الكلية التي بذلها الرجل حتى انجز عملية الرفع ؟ (حـ) ما هي نسبة الطاقتين وماذا حدث لكل منهما ؟

الحــل :

(أ) عندما يشرع الرجل برفع الجسم يخضع السلك من الطرف السفلي إلى ثقل الجسم ويخضع من طرفه العلوي إلى قوة شد مساوية ومعاكسة ويستطيل السلك بفعل القوتين بمقدار Δl متناسبة مع قوة الشد أو وزن الجسم المساوي لها . ونكتب بحسب قانون هوك ثابت مرونة السلك k كالتالي :

$$k = \frac{w}{\Delta l} \qquad (1)$$

ويختزن السلك فيه طاقة مرنة E_1 بفعل هذه الاستطالة ، وهي طاقة اكتسبها من الرجل . ونعلم أن هذه الطاقة تعطى بالعلاقة :

$$E_1 = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 \qquad (2)$$

نعوض k بمساويها من العلاقة (1) فنجد :

$$E_1 = \frac{1}{2} w \cdot \Delta l \qquad (3)$$

نعوض بالقيم العددية وهي :

$$\Delta l = 0.06 \text{ in} = 0.06/12 \text{ ft} = 0.005 \text{ ft} \quad , \quad w = 5 \text{ lb}$$

فنجد :

$$E_1 = \frac{5}{2} \times 0.005 = 0.0125 \text{ lb.ft}$$

(ب) ان الطاقة E_2 التي بذلها الرجل لرفع الجسم مسافة h هي كما نعلم :

$$E_2 = wh = 5 \times \frac{6}{12} = 2.5 \text{ lb.ft}$$

وبالتالي فان الطاقة الكلية E التي بذلها الرجل حتى أنجز عملية الرفع هي:

$$E = E_1 + E_2 = 0.0125 + 2.5 = 2.512 \text{ lb.ft}$$

(ج) إن النسبة بين الطاقتين هي :

$$E_1/E_2 = (\ 0.0125 / 2.5\ ) \times 100\% = 0.5\ \%$$

أما مصير الطاقة E_1 فقد اختزنت في السلك على صورة طاقة كامنة مرنة، في حين أن الطاقة E_2 قد اختزنت في الجسم على صورة طاقة كامنة ثقالية .

* * *