# الفصل التاسع

## الدوران

**السرعة الزاوية :**

إذا ثبتت نقطة في جسم صلد فاننا نقول عن الجسم أنه يتحرك حركة دورانية حول تلك النقطة ، وإذا ثبتت نقطتان من الجسم فاننا نقول عن الجسم أنه يتحرك حركة دورانية حول المستقيم الواصل مابين النقطتين والذي نسميه محور الدوران . أما الجسم الحر فيمكن أن يتحرك في الحالة العامة حركة انسحابية بحتة مضافاً اليها حركة دورانية صرفة حول نقطة قد يتغير موضعها مع الزمن بالنسبة للجسم الصلد . وعندما يقوم الجسم بحركة دورانية حول محور ثابت تتحرك كل نقطة من نقاطه على دائرة يقع مركزها على محور الدوران ، ويكون من الأسهل وصف وضع الجسم في أية لحظة بوصف الزاوية التي يصنعها خط من الجسم مع مستقيم ثابت لذلك نعرف السرعة الزاوية بالعلاقة :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (9-1)$$

**التسارع الزاوي :**

إذا لم تكن السرعة الزاوية ثابتة مع الزمن فاننا نستطيع تعريف مقدار

يشبه التسارع الخطي ، هو التسارع الزاوي ، على أنه :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (9-2)$$

**الدوران بتسارع زاوي ثابت :**

ان التقابل ما بين السرعة والتسارع الزاويـين والسرعة والتسارع الخطين يجعلنا ندرس حالات مماثلة للحركة المتسارعة بانتظام فنستنتج علاقـات مماثلة لتلك المستنتجة في حركة القذائف . وتنتج هذه العلاقات إذا كان :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{ثابت}$$ وهذه العلاقات هي :

$$\omega = \int \alpha \, dt = \alpha t + \omega_\circ \qquad (9-3)$$

$$\theta = \omega_\circ t + \frac{1}{2} \alpha t^2 + \theta_\circ \qquad (9-4)$$

حيث $\omega_\circ$ السرعة الزاوية الابتدائية ( عندما $t = 0$ ) و $\theta_\circ$ الزاويـــة الابتدائية .

**العلاقـة بين السرعة الزاوية والسرعة الخطية والعلاقـة ما بين التسارع الزاوي والتسارع الخطي :**

إن السرع الخطية للجسيمات المكونة للجسم الصلد تختلف باختلاف موضع النقطة وبعدها عن محور الدوران ، غير أن لجميع الجسيمات سرعة زاوية ثابتة . وترسم كل نقطة من الجسم دائرة يساوي نصف قطرها بعد النقطة عـن محور الدوران .

ويكون طول القوس s الذي ترسمه نقطة تبعد مسافة r عن محور الدوران عندما يدور الجسم حول المحور زاوية $\Theta$ معطى بالعلاقة :

$$s = r\Theta$$

وتكون قيمة السرعة الخطية للنقطة : $\frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}$ لأن r ثابت بالنسبة للنقطة أو أن :

$$v = r\,\omega \tag{9-5}$$

وباشتقاق هذه المعادلة ثانية نحصل على التسارع المماسي ونرمز له بـ $a_T$ و يكون :

$$\frac{dv}{dt} = a_T = r\,\frac{d\omega}{dt} = r\,\alpha \tag{9-6}$$

أما المركبة القطرية للتسارع أو التسارع القطري فيساوي :

$$a_R = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{9-7}$$

**الطاقة الحركية الدورانية وعزم العطالة :**

إن الطاقة الحركية لجسم ما تساوي مجموع الطاقات الحركيـة للجسيمات المكونة له :

$$E_k = \sum \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

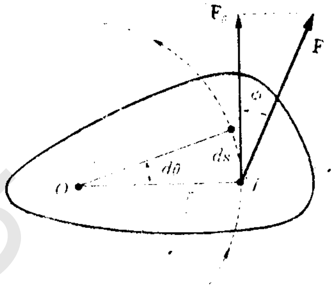
ولما كانت $\omega$ واحدة لجميع الجسيمات فاننا نستطيع أن نكتب :

$$E_k = \sum \frac{1}{2}\,m\,r^2\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2\,[\,\sum mr^2\,] \tag{9-8}$$

ونلاحظ أن المقدار داخل القوس ثابت بالنسبة الى جسم صلب يدور حول محور

دوران معين ، لذلك نسميه عزم عطالة الجسم حول محور الدوران هذا ونكتب :

$$I = \sum mr^2 = M\,k_o^2 \qquad (9-9)$$




الشكل ( ٩ – ١ )

وذلك بفرض M كتلة الجسم بكامله

و نسمي $k_o$ نصف قطر الدوران

ويكون:

$$E_k = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 \qquad (9-10)$$

**العمل والاستطاعة في الحركة الدورانية :**

لحساب العمل الذي تقوم به قوة تؤثر في نقطة مثل P واقعة في مستوي الشكل ( ٩ – ١ ) نبحث عن العمل العنصري فنجد أن :

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{ds} = F \cdot r\, d\Theta \cdot \cos\varphi$$

لكن $F\ r\cos\varphi$ يساوي عزم F حول المحور ونرمز له بـ $\Gamma$ لذلك فان :

$$dw = \Gamma\, d\Theta$$

وبهذا يحل العزم في الحركة الدورانية محل القوة ، ويحل التغير الزاوي محل التغير في الموضع ، ويكون العمل المنجز :

$$w = \int dw = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma\, d\Theta \qquad (9-10)$$

واذا كانت $\Gamma$ ثابتة كان لدينا :

$$w = \Gamma(\theta_2 - \theta_1) \qquad (9-11)$$

أما الاستطاعة فتساوي :

$$P = \frac{dw}{dt} = \Gamma \frac{d\Theta}{dt} = \Gamma\,\omega \qquad (9-12)$$

**المزدوجة والتسارع الزاوي :**

إذا فعلت في الجسم عدة مزدوجات يكون :

$$dw = \left(\sum \Gamma\right) \cdot d\theta$$

وإذا كتبنا قانون العمل والطاقة من أجل جسم صلد ، ولاحظنا أن القوى الداخلية وكذلك القوى التي تمر حواملها بمحور الدوران لاتقوم بأي عمل فاننا نجد :

$$\left(\sum \Gamma\right) d\Theta = d\left(\frac{1}{2} I\,\omega^2\right) = I\,\omega\,d\omega$$ أو أن :

$$\sum \Gamma = I\,\omega \frac{d\omega}{d\Theta}$$ أو :

$$\sum \Gamma = I\,\alpha \qquad (9-13)$$ لأن : $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\Theta} \times \frac{d\Theta}{dt}$

**الاندفاع الزاوي :**

نعرف الآن مايقابل الإندفاع في الحركة الخطية فنكتب العلاقة ( 13 9 ) على الشكل :

$$\sum \Gamma = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\dot{\omega}) = \frac{d}{dt} L \qquad (9-14)$$

وهي تكتب بالشكل : $(\Sigma \Gamma)\,dt = dL$

أي أن مجموع الدفع الزاوي للمزدوجات الفاعلة في الجسم $[(\Sigma \Gamma)dt]$ يساوي تغير

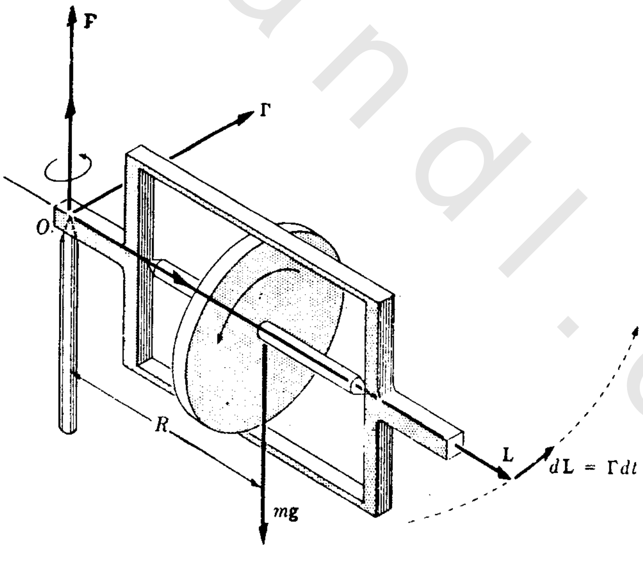
الإندفاع الزاوي للجسم أي dL

والشكل الأصح هو :

$$\Sigma \vec{\Gamma}\, dt = \vec{dL} \qquad (9-15)$$

**الدوران حول محور متحرك :**

إن أبسط الحركات الدورانية التي تلي دوران جسم حول محور ثابت من حيث الصعوبة هي دوران الجسم حول محوره ، ثم دوران هذا المحور بدوره حول مستقيم لايمر بمركز ثقل الجسم ، نسمي جسماً من هذا النوع البلبل . اما اذا كانت النقطة الثابتة التي يمر منها المحور هي مركز كتلة الجسم فنسمي الجسم جيروسكوباً . وفي الحالتين تكون السرعة الزاوية للجسم مساوية المجموع الشعاعي للسرعتين الزاويتين ( سرعة حول كل محور ). نسمي




الشكل ( ٩ — ٢ )

السرعة الزاوية لمحور الجسم حول المحور الثاني السرعة الزاوية المبـــادرة ونرمز لها بـ $\Omega$ . وهي كما يظهر من الشكل ( ٩ – ٢ ) تساوي :

$$\Omega = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{L}\,\frac{dL}{dt} = \frac{\Gamma}{L} \qquad (9-16)$$

وعندما يكون البلبل خاضعاً لوزنه فقط يكون : $\Gamma = m\,g\,R$

حيث R بعد مركز كتلته عن النقطة الثابتة .

★ ★ ★

**مسألة رقم ( ٩ ـ ١ ) :**

تتناقص السرعة الزاوية لدولاب معدّل بانتظام من 1000 دورة في الدقيقة الى 400 دورة في الدقيقة خلال 5 ثوان والمطلوب إيجاده :

( أ ) التسارع الزاوي وعدد الدورات التي يقوم بها الدولاب خلال الثواني الخمس . ( ب ) الزمن الإضافي اللازم انقضاؤه مقدراً بالثواني ، كي يقف الدولاب عن الدوران ؟

**الحـل :**

( أ ) إن الحركة دورانية بتسارع زاوي منتظم لذلك يكون :

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

ومنه :

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

نعوض بالقيم العددية وهي : $t = 5\ s$ ، $\omega = 400 \times \frac{2\pi}{60}$ ،

$$\omega^{\circ} = 1000 \times \frac{2\pi}{60}$$ فنجد :

$$\alpha = \frac{400 - 1000}{5} \times \frac{2\pi}{60} = -4\,\pi \text{ rad/s}^2$$

أي دورتان في الثانية تربيع .

ونستنتج عدد الدورات من معرفة الزاوية المقطوعة خلال الخمس ثواني وهي تعطى بالعلاقة :

$$\theta - \theta_{\circ} = \omega_{\circ}\, t - \frac{1}{2}\ \alpha\, t^2$$

حيث $\omega_{\circ} = \frac{1000}{60}$ دورة في الثانية . نعوض بالقيم العددية فنجد :

$$\frac{1000}{60} \times 5 - \frac{1}{2} \times 2 \times 25 = 58.3$$ دورة

(ب) يتوقف الدولاب عن الدوران عند ما تنعدم $\omega$ ، ونحسب الزمن الاضافي من العلاقة : $\omega = \omega_{\circ} - \alpha\, t$ وذلك بإبدال $\omega$ بصفر و $\omega_{\circ}$ بـ $400 \times \frac{2\pi}{60}$ فنجد :

$t = \frac{\omega_{\circ}}{\alpha}$ . وبالتعويض يكون :

$$t = \left( 400 \times \frac{2\pi}{60} \right) / 4\,\pi = 3.3 \text{ s}$$

★ ★ ★

### مسالة رقم ( ٩ ـ ٢ ) :

يبدأ دولاب معدّل ، نصف قطره 30 cm ، حركته من السكون ويتسارع بتسارع زاوي ثابت مقداره $0.50 \text{ rad/s}^2$ . احسب التسارع المماسي والتسارع

القطري والتسارع المحصل لنقطة واقعة على حافة الدولاب (أ) عند البـدء ، (ب) بعددورانه زاوية مقدارها $120°$ ، (جـ) بعد دورانه بزاوية مقدارها $240°$ .

**الحـل :**

لدينا من أجل هذه المسألة : $\omega = 0.5\ t$ ، $\theta = \frac{1}{4}\ t^2$

ويعطى كل من التسارع المماسي والقطري في أية لحظة بالعلاقتين : $a_T = r\ \alpha$ و $a_R = r\ \omega^2$ إذن يكون :

(أ) $a_T = 30 \times \frac{1}{2} = 15\ cm/s^2$ و $a_R = 0$ ويكون بالتالي : $a = 15\ cm/s^2$

(ب) نحسب أولاً $t$ فنجد أن $t = 2\sqrt{\theta} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$ ويكون :

$a_T = 15\ cm/s^2$ ، وأما $a_R$ فيساوي :

$$a_R = 30 \times \left( \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \right)^2 = 62.8\ cm/s^2$$

ويكون التسارع المحصل : $a = 63\ cm/s^2$

(جـ) إن $a_T$ تبقى كما سبق أما $a_R = r\ \omega^2$ فهي تعطى بالعلاقة :

$a_R = r \times (0.5\ t)^2$ حيث : $t = 2\sqrt{\theta} = 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$ إذن :

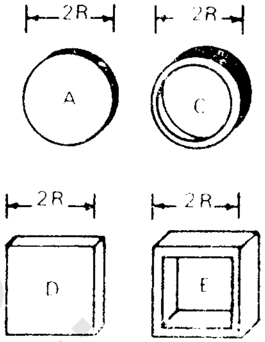
$$a_R = r \times \left( \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \right)^2$$

وهي تعطي : $a_R = 125.6\ cm/s^2$ ويكون بالتالي : $a = 126\ cm/s^2$

★ ★ ★

**مسألة رقم ( ٩ ـ ٣ ) :**

تساوي كتلة كل من الأجسام الأربعـــة المبينة في الشكل ( ٩ ـ ٣ ) المقـــدار m نفسه . والجسم A اسطوانة مصمتة نصف قطرها R . والجسم C قشرة اسطوانية جوفاء نصف قطرها R . والجسم D مربع مصمت طول ضلعه 2 R . والجسم E له أبعاد الجسم D إلا أنه أجوف ( اي أنه مؤلف من أربعـة جدران رقيقة ) . وللأجسام محور دوران عمودي على الصفحة ومار من مركز ثقل كل منها . والمطلوب : ( أ ) أي الأجسام له عزم العطالة الاصغر ؟ ( ب ) أي الاجسام له عزم العطـالة الاكبر ؟



الشكل ( ٩ ـ ٣ )

**الحــل :**

من الواضح أن عزم عطالة الاسطوانة المصمتة A أصغر من عزم عطالة القشرة الاسطوانية ، بسبب وجود عناصر كتلة في A تبعد عن محور الدوران بعداً أقل من نصف القطر R ، في حين أن عناصر كتلة القشرة كلهـا تبعـد بنفس المقدار . وكذلك فان عزم عطالة المربع المصمت D أصغر من عزم عطالة المربع الأجوف E ،لأن جميع الكتل في الحالة الثانية متباعدة عن المركز في حين أن هناك كتلاً قريبة واخرى بعيدة عن المركـز في الحالة الاولى . بقي أن نقارن عزم عطالة E مع عزم عطالة C وواضح

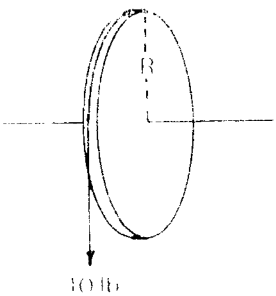
ان عزم عطالة E أكبر لأن هناك كتلا تبعد مسافة تساوي $R\sqrt{2}$ عن المركز وهي الكتل المتوضعة في زوايا الشكل . اذن فالجسم E له عزم العطالة الاكبر ، والجسم A له عزم العطالة الاصغر .

**مسألة رقم ( ٩ ــ ٤ ) :**

يستند دولاب معدّل قطره 3 ft على محور أفقي . ويُلف حبل حول حافة الدولاب وتؤثر في الحبل قوة جاذبة ثابتة شدتها 10 lb فيلاحظ أن 24 ft من الحبل تفك في أربع ثوان والمطلوب ( أ ) ماهو التسارع الزاوي للدولاب ؟ ( ب ) ما هي سرعته الزاوية النهائية ؟ ( حـ ) ما هي طاقته الحركية النهائية ؟ ( د ) ما هو عزم عطالته ؟

**الحـل :**

( أ ) نعين أولاً القوى المؤثرة على الدولاب ، فلدينا ثقله وقوى رد الفعل عند المساند إذا اعتبرنا المحور جزءاً منه ، وقوة جر الحبل إن حركة الدولاب حركة دورانية حول المحور الافقي فلنحسب عزوم هذه القوى بالنسبة للمحور : إن عزم قوة الثقالة معدوم لأننا يمكن أن نستعيض عن قوى الثقالة المؤثرة على أجزاء الدولاب المختلفة بقوة وحيدة مطبقة عند مركز ثقل الدولاب ، بما أن مركز الثقل هذا يقع على



الشكل ( ٩ ــ ٤ )

المحور فالقوة تقطـــع المحور ويكون عزمها صفراً . كذلك فان عزوم قوى الاستناد معدومــــة . ويبقى لدينا عزم القوة المؤثرة الذي يساوي القوة مضروبة بنصف القطر . ونرى أن هـذا العزم ثابت وبالتـالي فنحن بصدد حركة متسارعة تسارعاً زاوياً ثابتاً ، ونجد قيمة التسارع الزاوي $\alpha$ من العلاقة : $\sum \Gamma = I\alpha$

وفي هذه الحركة يكون : $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0$

أو : $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

إلا أن : $\Theta - \Theta_0 = S/R$ بفرض S طول الحبل المفكوك . وباعتبار أن $\omega_0 = 0$ بحسب النص فاننا نجد :

$$\frac{S}{R} = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{ومنه :} \quad \alpha = \frac{2S}{R t^2}$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$\alpha = \frac{2 \times 24}{1.5 \times (4)^2} = 2 \text{ rad/s}^2$$

(ب) $\omega = \omega_0 + \alpha t = 2 \times 4 = 8$ rad/s

(حـ) $E_k = W$ ( عمل القوى المؤثرة ) $= F.S = 10 \times 24 = 240$ ft.lb

(د) $I = \frac{\Gamma}{\alpha} = \frac{1.5 \times 10}{2} = 7.5$ slug.ft$^2$

★ ★ ★

## مسألة رقم ( ٩ ـ ٥ ) :

يزن جيروسكوب التوازن في باخرة 50 طناً ، ويساوي نصف قطر دورانه 5 ft ويدور حول محور شاقولي بسرعة زاوية مقدارها 900 دورة في الدقيقة والمطلوب ( أ ) ما هو الزمن اللازم كي ينتقل الدولاب من السكون الى السرعة الزاوية المذكورة وذلك إذا طبقت عليه استطاعة مقدارها 100 حصان ؟ ( ب ) أوجد العزم اللازم كي يقوم المحور بحركة مبادرة في مستو شاقولي مار من مقدمة الباخرة ومؤخرتها بمعدل درجة واحدة في الثانية .

**الحـل :**

( أ ) نكتب : العمل المنجز = ازدياد الطاقة الحركية

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = P t$$

ويكون :

$$t = \frac{I \omega^2}{2 P} = \frac{M k_o^2 \omega^2}{2 P}$$

وذلك باعتبار $I = M k_o^2$ حيث $k_o$ نصف قطر الدوران .

نعوض بالقيم العددية فلدينا :

$k_o = 5$ ft ، $M = 50 \times 2000/32$ slug $= 10^5/32$ slug

$$\omega = 900 \times \frac{2\pi}{60} = 30\,\pi \text{ rad/s}$$

$$P = 100 \times 550 \text{ ft . lb/s}$$

اذن يكون : $t = 6400 \text{ s} = 1.8 \text{ hr}$

( ب ) ان القانون الذي يعطي السرعة الزاوية لحركة المبادرة هو :

$$\Gamma = \Omega L \qquad \text{ومنه} \qquad \Omega \quad \frac{\Gamma}{L}$$

إلا أن $L = I\,\omega = M k_0^2\, \omega$ ومنه :

$$\Gamma = \Omega\, M\, k_0^2\, \omega$$

$$\Gamma = 1^{\circ} \times \frac{2\,\pi}{360} \times \frac{10^5}{32} \times (5)^2 \times 30\,\pi$$

$$\Gamma = 130\,000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

* * *