

الباب الثالث

سطوح الدرجة الثانية Quadratic Surfaces

(١.٣) مقدمة :

تعريف: يعرف السطح عامة بأنه المحل الهندسي لنقطة $M \equiv (x^i)$ تتحرك في الفراغ E^3 بحيث أن إحداثيات هذه النقطة تحقق العلاقة

$$F(x^i) = 0, i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

أو

$$x^3 = f(x^\alpha), \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

فإذا كانت إحداثيات أي نقطة تحقق أحد المعادلتين فيقال أن هذه النقطة ترسم سطحاً في الفراغ فمثلاً معادلة الكرة التي مركزها (x_0^i) ونصف قطرها ρ هي :

$$\sum_{i=1}^3 (x^i - x_0^i)^2 = \rho^2 \quad (3)$$

وتنقسم السطوح إلى سطوح جبرية و سطوح مسترسلة حسبما كانت العلاقة الموجودة في الطرف الأيسر من (1) كثيرة حدود أو دالة مسترسلة على الترتيب.

تعرف درجة السطح الجبري بأنها درجة كثيرة الحدود في الطرف الأيسر من (1) وتتحدد بعدد نقط تقاطع السطح مع أي مستقيم اختياري في الفراغ مع الأخذ في الاعتبار النقط التماسية والمنطقة.

فمثلاً سطح الكرة هو أحد سطوح الدرجة الثانية لأن نقاط تقاطع المستقيم

$$x^i = x_1^i + t e_i \quad (4)$$

مع الكرة (3) نحصل عليها بحل المعادلات (4), (3) ونحصل على معادلة من الدرجة الثانية في البارامتر t على الصورة

$$\left(\sum_{i=1}^3 e_i^2 \right) t^2 + 2 \sum_{i=1}^3 e_i (x_1^i - x_0^i) t + \sum_{i=1}^3 (x_1^i - x_0^i)^2 - \rho^2 = 0$$

فيكون لها جذران t_α وبالتعويض عن t_α في (4) نحصل على تقاطع المستقيم مع الكرة. ومعادلة السطح يمكن أن توضع في الصورة الاتجاهية فمثلا المعادلة الاتجاهية $|\underline{R} - \underline{R}_0| = \rho$ تمثل سطح كرة حيث $\underline{R}_0$ متجه الموضع للمركز، $\underline{R}$ متجه الموضع لأي نقطة على الكرة وسوف نقوم بدراستها بالتفصيل في الأبواب القادمة.

مثال (١): السطوح $z = \sin xy$, $z = \log xy$, $xyz + e^{xyz} - 4 = 0$ هي سطوح

مسترسلة. السطوح التي معادلاتها $z = \frac{xy}{x+y}$, $z^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ هي سطوح جبرية.

الحل: بإيجاد درجة كثيرات الحدود ومن ذلك معرفة درجة السطوح الجبرية السابقة. (درجة السطوح هي الرابعة والثانية على الترتيب).

مثال (٢): المستوى سطح من الدرجة الأولى.

يعرف المستقيم المماس للسطح $F(x^i) = 0$ عند نقطة ما $P(x_0^i)$ عليه بأنه ذلك المستقيم الذي يمر أي متحنى يقع على السطح ومار بالنقطة P .

وبما أنه يوجد عدد لا نهائي من المنحنيات على السطح تمر بالنقطة P فإنه يوجد عدد لا نهائي من المستقيمات التي تمس السطح عند النقطة P .

إذا كانت جميع المشتقات التفاضلية الجزئية $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ تساوي صفر عند نقطة على

السطح فإن هذه النقطة تسمى نقطة مفردة Singular point أما إذا كانت هذه المشتقات لا تساوي صفرًا عند نقطة ما عليه فإن هذه النقطة تسمى نقطة عادية

.Regular point

نظرية: جميع المستقيمات التي تمس سطح ما عند أي نقطة (عامة) عليه تقع في مستوى واحد.

البرهان: نعتبر منحنى C على السطح $F(x^i)=0$ مار بالنقطة $M_0 \equiv (x_0^i)$ ممثلاً بالمعادلات البارامترية $x^i = \phi^i(t)$, $i=1, 2, 3$. المماس لهذا المنحنى عند النقطة M له المعادلات القانونية

$$\frac{x^i - \phi^i(t_0)}{\left(\frac{d\phi^i}{dt}\right)_{M_0}} = \lambda, \quad \forall \lambda, t \in \mathbb{R}$$

حيث t_0 بارامتر مناظر للنقطة M_0 على المنحنى والتي تقع على السطح. من معادلة السطح نحصل على

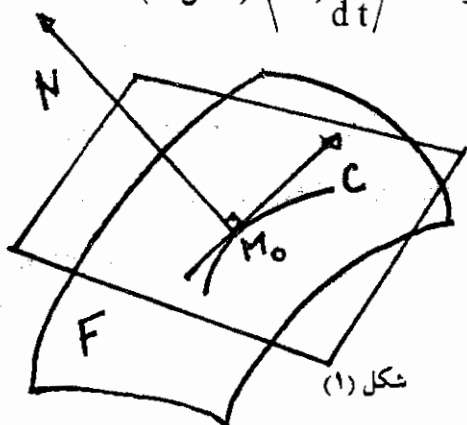
$$F(x^i) = F(x^1, x^2, x^3) = F(x^i(t)) = F(\phi^i(t)) = 0$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى t نجد أن

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = 0 \quad (*)$$

$$N = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x^i} e_i, \quad \frac{dr}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx^i}{dt} e_i \quad \text{نعتبر المتجهين}$$

$$\text{إذن } (*) \text{ يمكن كتابتها على الصورة } \left\langle N, \frac{dr}{dt} \right\rangle = 0 \quad (\text{شكل ١}).$$



المتجه $\frac{dr}{dt}$ يسمى بمتجه المماس للمنحنى الذي يقع على السطح $F(x^i)=0$ ويمر بالنقطة $M_0(x_0^i)$ والمتجه N هو العمودي على المماس لأي منحنى على السطح مار بالنقطة M_0 . أي أن جميع المماسات للمنحنيات التي تمر بالنقطة M_0 عمودية على المتجه N وهذا يتحقق فقط إذا كانت هذه المماسات تقع في مستوى واحد. وبهذا نصل إلى نهاية برهان النظرية.

المستوى السابق المعروف بتلك النظرية يسمى المستوى المماس للسطح (tangent plane) عند النقطة M_0 . المتجه N يسمى بالمتجه العمودي (normal vector) على السطح عند M_0 . وتصبح معادلة المستوى المماسي

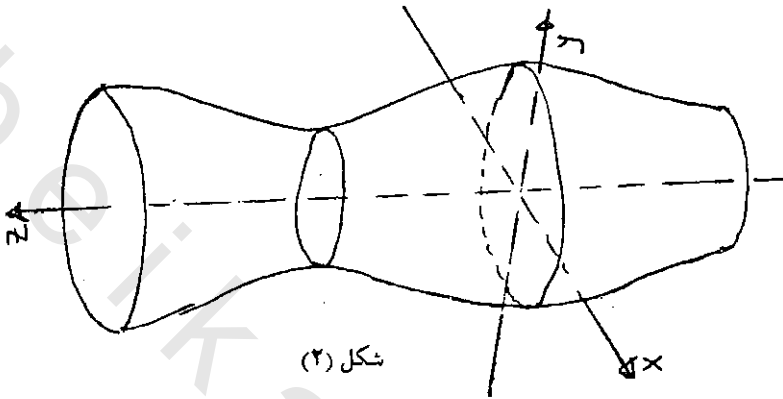
$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \right)_{M_0} (x^i - x_0^i) = 0 \text{ هي } M_0 \text{ عند السطح}$$

أو بالصورة الاتجاهية $\langle N, R - R_0 \rangle = 0$ حيث $R = (x^i)$ متجه الموضع لأي نقطة واقعة في المستوى، $R_0 = (x_0^i)$ متجه الموضع لنقطة التماس $M_0(x_0^i)$. ولنوضح بأمثلة مختلفة السطوح الجبرية ذات الدرجة الثانية ومنها السطوح الدورانية والسطوح المسطرة.

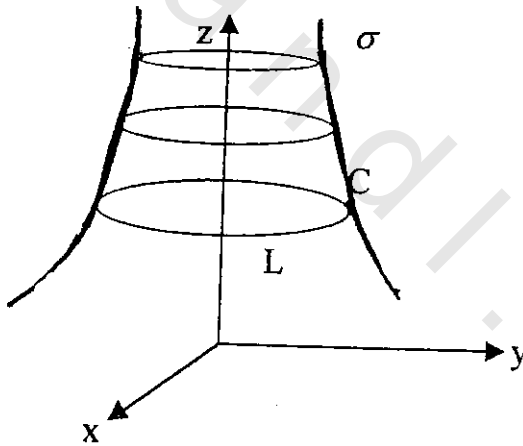
(٢.٣) السطوح الدورانية: Surfaces of revolution

دوران شكل ما σ بزاوية 2π حول مستقيم معلوم L ينتج عنه أن كل نقطة من الشكل σ ترسم دائرة مركزها يقع على المستقيم L والدائرة تقع في مستوى عمودي على المستقيم L ، المستقيم L يسمى محور الدوران والحركة تسمى الحركة الدورانية Revolution motion. يعرف السطح الدوراني على أنه السطح الناتج من دوران منحنى مستوي C حول محور L واقع في مستواه. أي مستوى يمر بنقطة ما على السطح الدوراني وعمودي على محور الدوران يقطع السطح الدوراني في دائرة

مركزها يقع على محور الدوران.



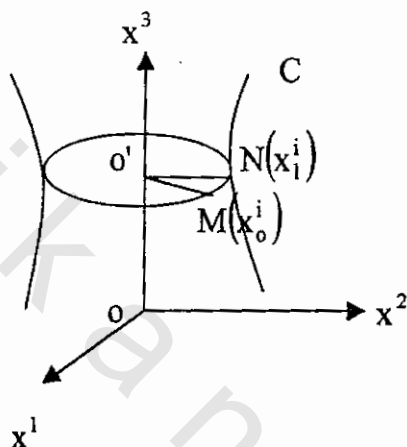
شكل (٢)



شكل (٣)

واضح أن C لا يقطع L (محور الدوران) وكذلك L واقع في المستوى الواقع فيه منحنى الدوران. المنحنى يسمى منحنى الشكل Profile curve وهو الذي يعطي السطح شكله الدوراني كما هو مبين في شكل (٣). مثال لذلك سطح الكرة ينتج عن دوران نصف دائرة حول قطرها.

لإيجاد معادلة السطح الدوراني الناتج عن دوران المنحنى C حول المحور x^3 نعتبر النقطة $M(x_0^i)$ على السطح الدوراني ونعتبر المستوى



شكل (٤)

الذي يمر بهذه النقطة M وعمودي على محور الدوران ox^3 . هذا المستوى يقطع السطح الدوراني في دائرة مركزها O' (يقع على محور الدوران) ويقطع المنحنى C في النقطة $N \equiv (x_1^i)$ ومن هندسة الشكل (٤) نجد أن

$$\overline{O'M}^2 = (x_0^1)^2 + (x_0^2)^2, \overline{O'N}^2 = (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2$$

وبما أن M, N يقعان على دائرة واحدة فإن

$$\overline{O'N} = \overline{O'M} \Rightarrow (x_0^1)^2 + (x_0^2)^2 = (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 \quad (1)$$

ولكن N تقع على المنحنى الذي له المعادلات

$$x^1 = \phi^1(x^3), \quad x^2 = \phi^2(x^3) \quad (2)$$

إذن النقطة N لها الإحداثيات

$$x_1^1 = \phi^1(x^3), \quad x_1^2 = \phi^2(x^3) \quad (3)$$

وبالتعويض عن هذه القيم في (1) نحصل على

$$(x_0^1)^2 + (x_0^2)^2 = (\phi^1(x^3))^2 + (\phi^2(x^3))^2 = f(x^3)$$

وعموما كل معادلة على الصورة

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = f(x^3) \quad (4)$$

تمثل سطح دوراني محور دورانه هو ox^3 وذلك لأن مقطع هذا السطح

بالمستوى $x^3 = \text{const.}$ هو عبارة عن دائرة مركزها يقع على محور الدوران.

وعموما يمكن كتابة معادلة السطوح الدورانية التي محور دورانها هو أحد محاور

الإحداثيات x^j في الصورة

$$\sum_{i \neq j}^3 (x^i)^2 = f(x^j), i, j = 1, 2, 3 \quad (5)$$

(٣.٣) - سطوح الدرجة الثانية الدورانية

Quadratic Surfaces of revolution:

وهي تلك السطوح الناتجة عن دوران أحد منحنيات الدرجة الثانية التي سبق

وأن درسناها سابقا مثل الدائرة والخط المستقيم أو الخطين المتقاطعين أو المتوازيين

وكذلك القطع المكافئ والناقص والزائد وفي كل هذه الحالات نأخذ الأوضاع القياسية

لمنحنيات الدرجة الثانية ونأخذ محور الدوران هو محور التماثل لتلك المنحنيات.

(١.٣.٣) مجسم القطع الناقص الدوراني Ellipsoid of revolution:

هذا الجسم ينتج عن دوران القطع الناقص $\text{ellipse } \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ في

المستوى oxy والذي معادلته $y = 0$ حول محور التماثل oz .

وللحصول على معادلات هذا الجسم نقوم بكتابة منحنى الدوران على الصورة

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ x^2 &= a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

أي أننا نعبر عن المتغيرات x, y بدلالة البارامتر z والذي يتحرك على محور الدوران oz . نربع المعادلة الأولى والجمع على الثانية في (6) نحصل على

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

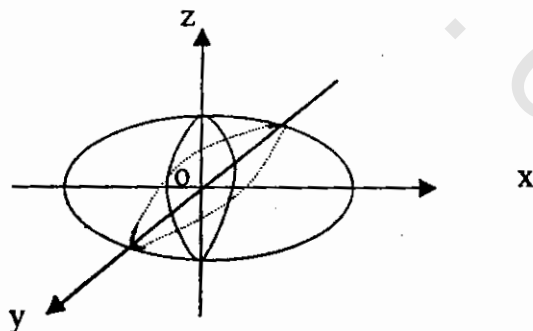
والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7)$$

بالمثل إذا دار المنحنى حول محور ox فإن معادلة الجسم هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (8)$$

وعلى الطالب أن يتأكد بنفسه من هذه المعادلة.



شكل (٥) الجسم الناقص الدوراني

نقطة الأصل 0 تسمى مركز الجسم. ومحاور الإحداثيات تسمى بمحاور التماثل. ومستويات الإحداثيات تسمى بمستويات التماثل (شكل ٥).

(٢.٣.٣) الجسم الزائدي الدوراني Hyperboloid of revolution:

هذا الجسم يتج عن دوران منحنى القطع الزائد hyperbola في المستوى oxz.

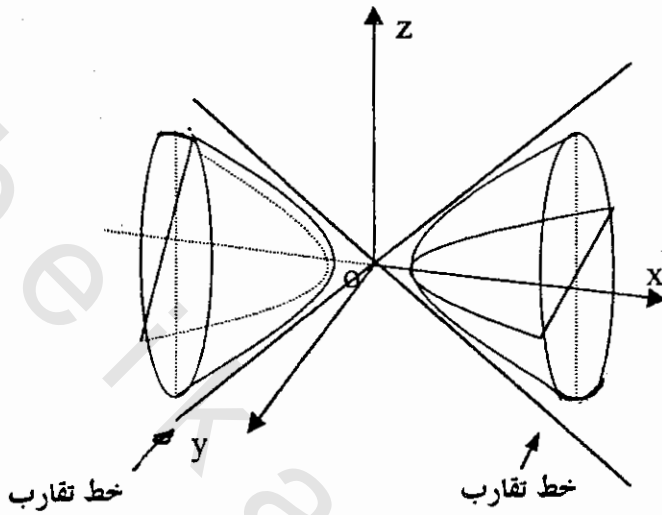
$$y = 0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

حول المحور الحقيقي Real axis (محور ox) أو حول المحور التخيلي Imaginary axis (محور oz) فإننا نحصل على الجسم الزائدي ذو الطيتين (الطيتين) Double sheet أو الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة one sheet على الترتيب والمعادلات هي :

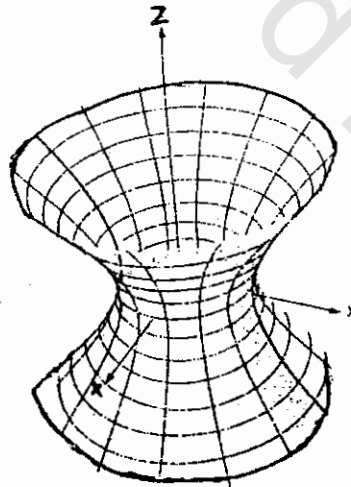
$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (9) \quad (\text{ذو الطيتين})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (10) \quad (\text{ذو الطية الواحدة})$$

على الترتيب كما هو مبين في شكل (٥)، (٦) على الترتيب.



شكل (٦) الجسم الزائدي الدوراني ذو الطيتين

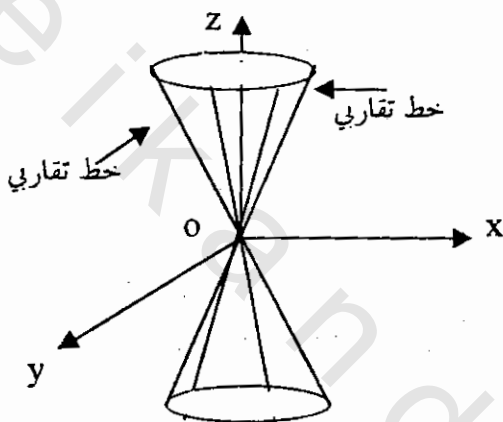


شكل (٧) الجسم الزائدي الدوراني ذو الطية الواحدة

وعند دوران الخط التقاربي asymptotic line للقطع الزائد والذي معادلته هي:

$$y=0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\text{شكل ٨})$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



شكل (٨) مخروط مزدوج

نتيجة : يمكن الحصول على الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة عن طريق دوران زوج من المستقيمات المتقاطعة والتي لا تقطع محور OZ ولا يوازياه والتي تعطى بالمعادلات

$$y=0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

مثال (١): تأكد من إثبات النتيجة السابقة.

في معادلة الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة نجد وجود عائلتين من المستقيمات تقع بأكملها على هذا السطح وكل منهما يعطي كقطاع لعائلتين من المستويات كالآتي:

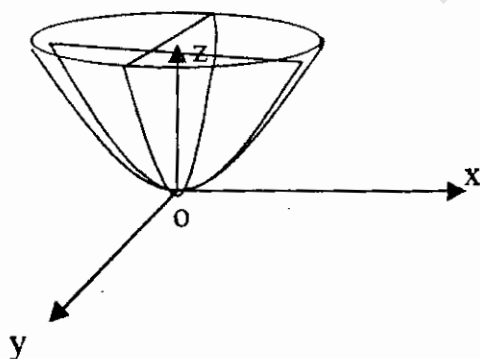
$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad y = a \quad \text{تقاطع مستويين} \quad (12)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad y = a \quad \text{تقاطع مستويين} \quad (13)$$

وبذلك نحصل على الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة بدوران أحد هذه المستقيمات حول محور وفي هذه الحالة تسمى السطوح الناتجة عن دوران مستقيم بالسطوح المسطرة والمستقيم نفسه يسمى براسم السطح والسطوح المسطرة سوف نقوم بدراستها في الباب السابع.

(٣.٣.٣) المجسم المكافئ الدوراني : Paraboloid of revolution

إذا دار منحنى القطع المكافئ في المستوى oxz والذي معادلته $x^2 = 2az, y=0$ حول محور oz فنحصل على سطح دوراني معادلته $x^2 + y^2 = 2az$ ويسمى بالجسم المكافئ الدوراني شكل (٨).



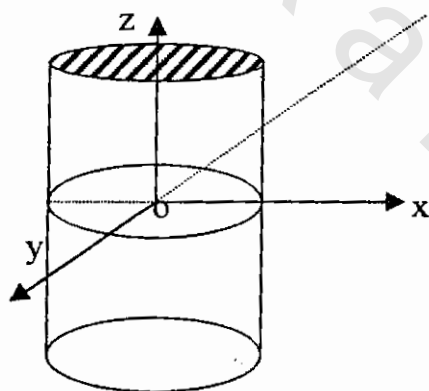
شكل (٩)

(٤.٣.٣) الأسطوانة الدائرية القائمة : Rect Linear Cylinder

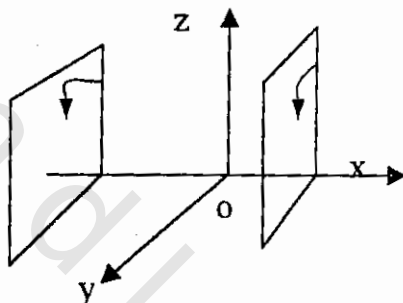
تنتج عن دوران المستقيمين المتوازيين $x^2 - a^2 = 0, y = 0$ ويكون لها المعادلة $x^2 + y^2 = a^2$ وتسمى الأسطوانة الدائرية القائمة ومحورها هو OZ .
وأن دار المستقيمين المتوازيين حول محور OX نحصل على مستويين متوازيين $Parallel\ Planes$ هما المعادلة

$$x^2 - a^2 = 0$$

كما هو مبين بالشكل (١٠).



الأسطوانة الدائرية القائمة



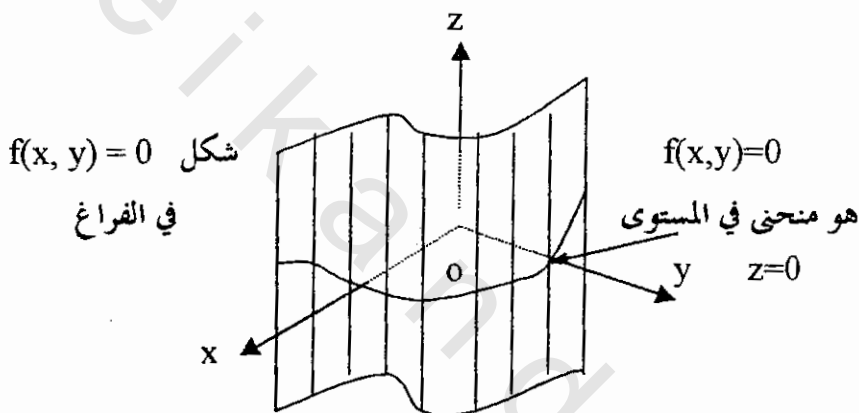
المستويين متوازيين

شكل (١٠)

وعليه فإن أي معادلة في الصورة $y = f(x)$ في الفراغ تمثل أسطوانة مقامة على منحنى هذه الدالة.

(٥.٣.٣) رسم السطح الممثل بمعادلة في متغيرين في الفراغ:

الشكل المقابل لمعادلة تحتوي على متغير أو متغيرين من الإحداثيات x, y, z من السهل رسمه وعلى سبيل المثال المعادلة التي تحتوي على x, y . النقطة (x, y, z) تقع على الشكل الفراغي إذا كان وكان فقط النقطة $(x, y, 0)$ عليه ولا يوجد قيد على z .



شكل (١١)

بهذا العرض يمكن اقتراح الطريقة الآتية :-

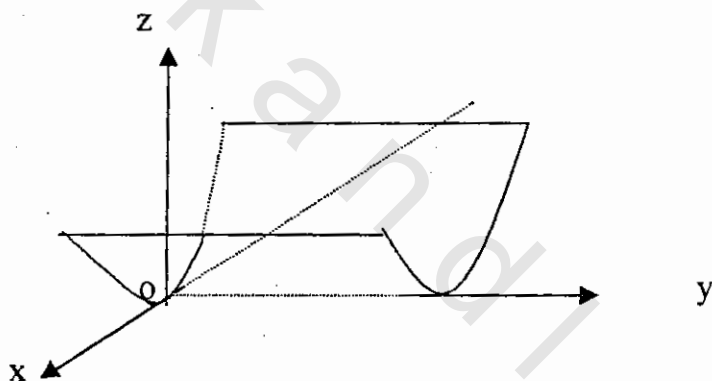
- (١) أرسم المعادلة $f(x, y) = 0$ في المستوى xy وهو عبارة عن منحنى.
- (٢) أرسم السطح المنشأ بواسطة الخطوط المستقيمة الموازية لمحور z وتقطع المنحنى المرسوم في الخطوة الأولى.

انظر شكل (١١) والسطح المرسوم فيه يسمى أسطوانة قائمة right cylinder شكل (١٠).

مثال (٣): الأسطوانة المقامة على منحنى الدالة $f(x, y) = y - x = 0$ هو المستوى $y - x = 0$ في الفراغ، أي أن المستوى أحد أنواع الأسطوانات.

مثال (٤): الأسطوانة الدائرية القائمة right circular cylinder هي نوع خاص من الأسطوانات وهي المقامة على منحنى الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ وهي الأكثر شيوعاً في حياتنا اليومية.

مثال (٥): الأسطوانة $z = x^2$ هي الأسطوانة المقامة على منحنى القطع المكافئ $z = x^2$ في المستوى z x . هذه الأسطوانة توازي محور oy عند نقطة الأصل وتسمى أسطوانة مكافئة شكل (١٢).



شكل (١٢)

مثال (٦): اعتبر جزء الخط المستقيم $L: z = \frac{y}{2}$ الواقع في الربع الأول من المستوى

yz . أوجد معادلة السطح الناتج من دوران هذا الخط حول محور y .

الحل: نعتبر نقطة $P(x, y, z)$ على السطح الناتج من الدوران وهذه النقطة نتجت من

دوران نقطة على الخط L . إحداثي y للنقطة Q هو نفسه بالنسبة للنقطة P

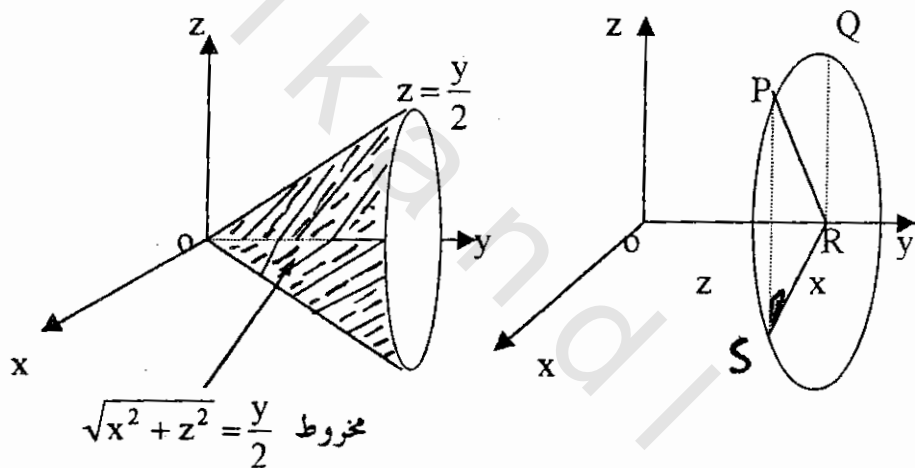
والإحداثي x للنقطة Q يساوي صفر (شكل (١٣)).

من هندسة الشكل يكون $\overline{PR} = \overline{QR}$ والمثلث PSR القائم الزاوية في S نحصل

$$\overline{PR} = \sqrt{x^2 + z^2} = \overline{QR} \quad \text{على}$$

حيث $\overline{QR}$ الإحداثي z للنقطة Q. إذن $Q = (0, y, \sqrt{x^2 + z^2})$

وحيث أن $Q \in L$ إذن $\sqrt{x^2 + z^2} = \frac{y}{2}$



شكل (١٣)

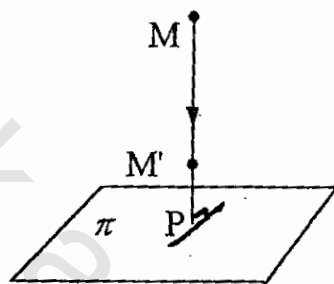
الطريقة المستخدمة في هذا المثال تطبق على أي سطح دوراني حول أي محور من المحاور ونلخصها في الخطوات الآتية :

حدد نقطة P على السطح. ثم حدد نقطة Q على المنحنى والتي عند دورانها تعطي النقطة P. أوجد إحداثيات Q بدلالة إحداثيات P. عوض بهذه الإحداثيات في المعادلة التي تحققها Q تنتج معادلة تتحقق بالنقطة P.

(٦.٣.٣) انكماش وانبعاج السطوح:

نعتبر التحويل الهندسي في الفراغ E^3 بحيث أنه كل نقطة M تتحول إلى نقطة

M' بحيث يكون المستقيم $\overline{MM'}$ عمودي على مستوى معلوم π فيكون في هذه الحالة $\overline{PM} = k \overline{PM'}$ ، $k \in \mathbb{R}$ ، $k \neq 0$.



شكل (١٣)

هذا التحويل يسمى بانكماش (تمدد) الفراغ إلى المستوى π (مغير البعد). والمقدار k يسمى معامل الانكماش (التمدد) Deformation factor حيث $k < 1$ ($k > 1$)، في حالة $k=1$ نحصل على تحويل التطابق.

بالنسبة لكل السطوح الدورانية السابقة نقوم بإجراء تحويل انكماش لنقاط هذه الأجسام نحصل على مجسمات جديدة حصلنا عليها بعمل تشويه أو إنبعاج في اتجاهات مختلفة أو ما يسمى Deformation، والهدف من هذا التشويه هو تحويل الدائرة التي هي أحد مقاطع السطوح الدورانية إلى قطع مخروطي آخر غير الدائرة.

مثال (٧): بإجراء تحويل الانكماش بالنسبة للمستوى oxz

$$x = x', y = \frac{a}{b} y', z = z', (x, y, z) \rightarrow \left(x', \frac{a}{b} y', z' \right)$$

وتطبيقه على الجسم الناقص الدوراني والجسم الزائدي الدوراني فإننا نحصل على الجسم الناقص والجسم الزائدي ذو الطيتين والطية الواحدة والتي تعطى بالمعادلات الآتية على الترتيب :-

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

هذه السطوح هي سطوح درجة ثانية ليست دورانية، والتي نقوم بدراستها بالتفصيل في الباب الرابع.

مثال (٨): اشتق معادلات المجسمات المكافئة الناقصية والزائدية.

الحل: إذا أجرينا تحويل الانكماش $x = x'$, $y = \sqrt{\frac{a}{b}} y'$, $z = z'$ بالنسبة للمستوى

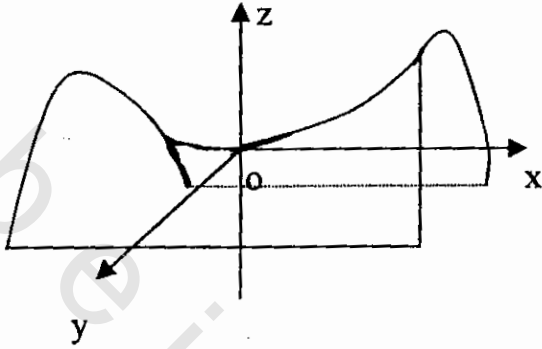
oxz على الجسم المكافئ الدوراني $x^2 + y^2 = 2a z$ فإننا نحصل على الجسم

المكافئ الناقص $\frac{x'^2}{a} + \frac{y'^2}{b} = 2 z'$ حيث $a > 0$, $b > 0$ وإذا كانت a , b هما

إشارة مختلفة وليكن $a = p^2$, $b = -q^2$ فإنه يكون لدينا السطح المكافئ الزائدي

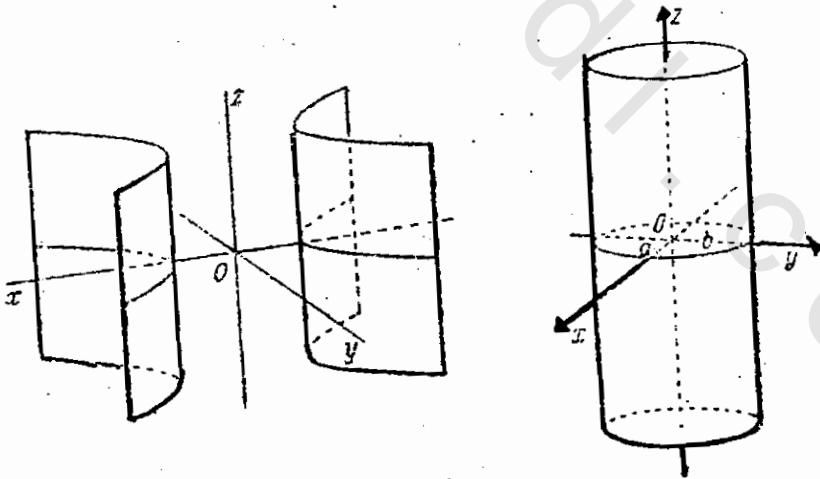
والذي يسمى سطح السرج Saddle Surface شكل (١٤) وهو

يشبه سرج الحصان أو المسار بين قمتين في تضاريس الأرض.



شكل (١٥) سطح السرج

وكذلك بالنسبة للأسطوانات العامة أي أن قاعدتها ليست بالضرورة أن تكون دائرة بل أي منحنى مستو عام (شكل ١٦).



شكل (١٦)

تمارين (٣)

- ١— أوجد معادلة المستوى المماس ومعادلات العمودي على السطح $z = f(x, y)$.
- ٢— عين معادلة المستوى المماس ومعادلات العمودي على سطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ عند النقطة $R_0 = (1, 2, 3)$ وأثبت أن العمودي لـه الاتجاه R_0 .
- ٣— أوجد المستويات المماسية للسطح $x^3 = f\left(\frac{x^2}{x'}\right)$ عند أي نقطة (x_0, y_0, z_0) وبين أنها تمر بنقطة الأصل.
- ٤— أثبت أن السطوح الثلاث $\sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = a^j x^j, j=1, 2, 3$ تتقاطع على التعمد فيما بينها. (الزوايا بين المستويات المماسية قياسها 90°)
- ٥— أثبت أن المستوى المماسي للسطح $xyz = a^3$ عند أي نقطة عليه يكون مع المستويات الإحداثية هرم ثابت الحجم.
- ٦— بين أن سطح الدرجة الثانية $\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1)^2 + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2)^2 = 0$ يتكون من زوج من المستويات لجميع قيم λ, μ حيث $\lambda \mu \leq 0$.
- ادرس الحالة $\lambda \mu > 0$ في الفراغ المعرف على (مجموعة الأعداد المركبة) وناقش حالة تعامد هذه المستويات.
- ٧— أوجد معادلات السطوح الدورانية الناتجة عن دوران المنحنى $y = f(x), z=0$ حول محور x وكذلك حول محور y ($y > 0$) بفرض أن f دالة تناظر أحادي.
- ٨— أوجد معادلة السطح الناتج عن دوران المنحنى $y = 2e^{3z}, x=0$ حول محور z مرة وكذلك حول محور y ($y > 0$) ووضح ذلك بالرسم.

٩— أوجد السطح الناتج عن دوران المنحنى $y + 5e^{-2x} = 0, z = 0$ حول محور x مرة ومحور y مرة أخرى حيث $-2 \leq x \leq \ell$ وبين ذلك بالرسم.

١٠— أوجد السطح الناتج عن دوران المنحنى $z = 0, y = \ln x$ حول محور x مرة ومحور y مرة أخرى حيث $1 \leq x \leq e$ وبين ذلك بالرسم.

١١— أوجد السطح الناتج عن دوران المنحنى $z = 0, y = \cosh x$ حول محور x مرة ومحور y مرة أخرى حيث $-2 < x < 2$ - موضحا ذلك بالرسم.

١٢— أوجد السطح الناتج عن دوران المنحنى $z = 0, y = \tan x$ حول محور x مرة، محور y مرة أخرى حيث $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ موضحا ذلك بالرسم.

١٣— أوجد شرط تماس المستوى $\ell x + m y + n z = P$ للسطح $F(x, y, z) = 0$ عند نقطة ما $P(x_0, y_0, z_0)$.

(إرشاد : العمودي على السطح هو $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ يوازي العمودي (ℓ, m, n) على المستوى للماس).

١٤— أوجد شرط تماس المستوى $\ell x + m y + n z = P$ للسطوح

(i) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

(ii) $2x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(iii) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

(إرشاد : استخدم تمرين (١٣)).

١٥— أوجد معادلة العمودي على السطح

$$ze^{xy} + x^2 - 2y = 1$$

عند النقطة $(0, 0, 1)$.

١٦— أوجد معادلة المستوى المماس للسطح $x^2 - y^2 + 3z^2 = 1$

عند النقطة $\left(1, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ وأوجد الأجزاء التي يقطعها المستوى المماس مع

مستويات الإحداثيات.

١٧— أوجد معادلة المستوى الذي يوازي المستوى المماس للسطح

$$(x-1)^2 + y^2 - z^2 = 1$$

عند النقطة $(1, 1, 0)$ ويمر بالنقطة $(2, 1, 2)$.

١٨— أوجد درجة السطوح الممثلة بالمعادلات الآتية:—

$$(i) \quad x^2 + \frac{xy}{z^2 - y^2} + 5 = 0 \quad (ii) \quad x(y-z) + zx^3 + yz^2 = 1$$

١٩— أوجد نقاط تقاطع السطح $2x^2 - y^2 + z^2 = 1$

بالمستقيم $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ وبين أنه سطح تربيعي (من الدرجة الثانية).