الفصل السادس

التشاكلات الزمرية

Group homomorphism

نفرض G_1 و G_2 زمرتان. الآن نهتم بنوع من الرواسم من G_1 إلى G_2 والذي يربط بنية الزمرة G_1 مع بنية الزمرة G_2. مثل هذه الرواسم غالبا يعطينا معلومات عن بنية زمرة من معلومات عن بنية زمرة أخرى.

تعريف ٦-١. الراسم $\phi: G_1 \to G_2$ من الزمرة G_1 إلى الزمرة G_2 يسمى تشاكل زمري group homomorphism أو تشاكل homomorphism إذا تحقق الشرط

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \qquad a,b \in G_1 \text{ لكل} \qquad (1)$$

في العلاقة (1) حاصل الضرب ab في الطرف الأيسر مأخوذ في الزمرة G_1 بينما حاصل الضرب $\phi(a)\phi(b)$ في الطرف الأيمن يكون مأخوذا في الزمرة G_2.

لأي زمرتين G_1 و G_2 يوجد دائما على الأقل تشاكل $\phi: G_1 \to G_2$، يسمى بالتشاكل البديهي، والمعرف بالصورة $\phi(g) = e'$ لكل $g \in G_1$ حيث e' هو العنصر المحايد في G_2. الشرط (1) إذن يختزل إلى $e' = e'e'$. لا توجد أية معلومات أخرى حول G_1 او G_2 يمكن الحصول عليها من الزمرة الأخرى باستخدام هذا التشاكل.

مثال ٦-٢. نفرض $\phi : G_1 \to G_2$ تشاكل زمري فوقي من الزمرة G_1 إلى الزمرة G_2. سوف نوضح أنه إذا كانت G_1 زمرة إبدالية فإن G_2 تكون أيضا زمرة إبدالية. نفرض $x , y \in G_2$. حيث أن ϕ راسم فوقي إذن يوجد $a,b \in G_1$ بحيث $\phi(a) = x$ و $\phi(b) = y$. حيث أن G_1 إبدالية إذن $ab = ba$. باستخدام خاصية التشاكل نحصل على

$$xy = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$$
$$= \phi(ba) = \phi(b)\phi(a) = yx$$

ولذلك G_2 تكون زمرة إبدالية.

المثال السابق يوضح لنا كيفية الحصول على معلومات عن زمرة بمعرفة معلومات عن زمرة أخرى.

مثال ٦-٣. نفرض $GL(n, \mathbb{R})$ زمرة الضرب لكل المصفوفات المنعكسة من درجة $n \times n$. نذكر هنا أن المصفوفة A تكون منعكسة إذا وفقط إذا كان محددها $\det(A)$ يختلف عن الصفر. أيضا نعلم أن $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ لأي مصفوفتان A و B في $GL(n, \mathbb{R})$. هذا يعني أن $\det$ يكون تشاكل من الزمرة $GL(n, \mathbb{R})$ إلى زمرة الضرب للأعداد الحقيقة غير الصفرية.

مثال ٦-٤. نفرض F زمرة الجمع للدوال المتصلة المعرفة على الفترة المغلقة $[0,1]$ ونفرض $\mathbb{R}$ هي زمرة الجمع للأعداد الحقيقية.

الراسم $\sigma : F \to \mathbb{R}$ المعرف بالصورة $\sigma(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ لكل

$f \in F$ يكون تشاكل حيث

$$\sigma(f+g) = \int_0^1 (f+g)(x)\,dx = \int_0^1 [f(x)+g(x)]\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = \sigma(f)+\sigma(g)$$

لكل $f, g \in F$.

مثال ٦-٥. (الاختزال بمقياس n). نفرض γ هو الراسم الطبيعي من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_n$ المعطى بالعلاقة $\gamma(m) = r$ حيث r هو الباقي عند قسمة m على n. بين أن γ يكون تشاكل.

الحل: المطلوب إثبات أن $\gamma(s+t) = \gamma(s)+\gamma(t)$ حيث $s, t \in \mathbb{Z}$.

بإستخدام خوارزمية القسمة نفرض أن

$$s = q_1 n + r_1 \qquad (١)$$

و

$$t = q_2 n + r_2 \qquad (٢)$$

حيث $0 \le r_1, r_2 < n$

إذا كان

$$r_1 + r_2 = q_3 n + r_3 \qquad (٣)$$

حيث $0 \le r_3 < n$ فإن

$$s+t = (q_1+q_2+q_3)n + r_3$$

لذلك $\gamma(s+t)=r_3$

من معادلات (١) و (٢) نجد أن $\gamma(s)=r_1$ و $\gamma(\mathrm{t})=r_2$.

من معادلة (٣) نجد أن r_1+r_2 في $\mathbb{Z}_n$ يساوي r_3 أيضا.

لذلك $\gamma(s+t)=\gamma(s)+\gamma(t)$.

تعريف ٦-٦. نفرض G و H زمرتان. الراسم $\phi:G\to H$ يسمى تماثل isomorphism إذا كان تشاكل زمري تناظر أحادي. في هذه الحالة نقول أن الزمرتان G و H متماثلتان isomorphic ونرمز لذلك بالرمز $G\cong H$.

عندما تكون زمرتان متماثلتان فإنه بمعنى معين يمكن اعتبار الزمرتان متساويتان . فقط يختلفان في أن عناصرهما أعيد تسميتها. التماثل يعطينا مفتاحا لإعادة التسمية. وإذا كنا نعلم حسابات في زمرة يمكننا إجراء حسابات مشابهة لتلك الحسابات في الزمرة الأخرى. التماثل يشابه القاموس الذي يستخدم في ترجمة جملة من لغة إلى جملة لها نفس المعنى في لغة أخرى.

نظرية ٦-٧. نفرض ϕ تشاكل زمري من الزمرة G إلى الزمر $\overline{G}$.

(١) إذا كان e هو العنصر المحايد في G فإن $\phi(e)$ يكون هو العنصر المحايد $\bar{e}$ في $\overline{G}$.

(٢) إذا كان $a\in G$ فإن $\phi(a^{-1})=\phi(a)^{-1}$.

(٣) إذا كانت H زمرة جزئية من G فإن $\phi(H)$ تكون زمرة جزئية من $\overline{G}$.

(٤) إذا كانت K زمرة جزئية من $\overline{G}$ فإن $\phi^{-1}(K)$ تكون زمرة جزئية من G حيث $\phi^{-1}(K)=\{a\in G:\phi(a)\in K\}$.

باختصار نجد ان التشاكل يحافظ على العنصر المحايد والمعكوس والزمر الجزئية.

البرهان: نفرض ϕ تشاكل زمري من الزمرة G إلى الزمر $\overline{G}$. إذن

$$\phi(a)=\phi(ae)=\phi(a)\phi(e)$$

بضرب هذه العلاقة من جهة اليسار في $\phi(a)^{-1}$ نجد أن $\bar{e}=\phi(e)$. لذلك $\phi(e)$ يجب أن يكون هو العنصر المحايد $\bar{e}$ في $\overline{G}$ وهذا يبرهن (١).

المعادلة $\bar{e}=\phi(e)=\phi(aa^{-1})=\phi(a)\phi(a^{-1})$

تبين أن $\phi(a^{-1})=\phi(a)^{-1}$ وهذا يبرهن (٢) .

الآن نفرض أن H زمرة جزئية من G ونفرض $\phi(a),\phi(b)\in\phi(H)$. إذن $\phi(a)\phi(b)=\phi(ab)$. لذلك نجد $\phi(a)\phi(b)\in\phi(H)$. إذن $\phi(H)$ تكون مغلقة بالنسبة للعملية على $\overline{G}$. حقيقة أن $\bar{e}=\phi(e)$ و $\phi(a^{-1})=\phi(a)^{-1}$ يكمل برهان أن $\phi(H)$ زمرة جزئية من $\overline{G}$ وهذا يبرهن (٣).

لاثبات (٤) نفرض K زمرة جزئية من $\overline{G}$ ونفرض أن $a,b \in \phi^{-1}(K)$. إذن $\phi(a),\phi(b) \in K$. وحيث أن K زمرة جزئية، $\phi(a)\phi(b) \in K$.

المعادلة $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$ تبين أن $ab \in \phi^{-1}(K)$. إذن $\phi^{-1}(K)$ تكون مغلقة بالنسبة للعملية على G . أيضا K يجب أن تحتوي عنصر محايد $\overline{e}=\phi(e)$. لذلك $e \in \phi^{-1}(K)$. إذاكان $a \in \phi^{-1}(K)$ فإن $\phi(a) \in K$ وبالتالي $\phi(a)^{-1} \in K$. ولكن $\phi(a^{-1})=\phi(a)^{-1}$، لذلك $a^{-1} \in \phi^{-1}(K)$. إذن $\phi^{-1}(K)$ تكون زمرة جزئية من G .

تعريف ٦-٨. نفرض $\phi : G \to \overline{G}$ تشاكل زمري من الزمرة G إلى الزمرة $\overline{G}$. الزمرة الجزئية $\phi^{-1}(\{\overline{e}\})=\{x \in G : \phi(x)=\overline{e}\}$ تسمى نواة التشاكل ϕ kernel ويرمز لها بالرمز $\ker(\phi)$. بتعبير آخر

$$\ker(\phi)=\{x \in G : \phi(x)=\overline{e}\}.$$

حيث أن $e \in \ker(\phi)$ ، إذن $\ker(\phi)$ مجموعة غير خالية.

مثال ٦-٩. نفرض D ترمز إلى زمرة الجمع للدوال التفاضلية من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ ونفرض F ترمز إلى زمرة الجمع لمجموعة كل الدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. عملية الاشتقاق تعطي راسم $\phi : D \to F$ حيث $\phi(f)=f'$ لكل $f \in D$. يمكن بسهولة إثبات أن ϕ يكون تشاكل حيث أن $\phi(f+g)=(f+g)'=f'+g'=\phi(f)+\phi(g)$.

$ker(\phi)$ يتكون من كل الدوال f بحيث $\phi(f)=f'=0$ وهي الدالة الثابتة.

نظرية ٦-١٠. التشاكل الزمري $\phi:G \to H$ يكون أحادي إذا وفقط إذا كان $\ker(\phi)=\{e\}$.

البرهان. نفرض أن ϕ أحادي ونفرض $x \in \ker(\phi)$. إذن $\phi(x)=\bar{e}=\phi(e)$. إذن $x=e$. لذلك $\ker(\phi)=\{e\}$.

من جهة أخرى نفرض أن $\ker(\phi)=\{e\}$. لإثبات أن ϕ أحادي نفرض أن $\phi(x)=\phi(y)$. هذا يؤدي إلى $\phi(xy^{-1})=\phi(x)\phi(y)^{-1}=\bar{e}$ ومن ثم $xy^{-1} \in \ker\phi$. لذلك $xy^{-1}=e$ وبالتالي $x=y$.

إذن ϕ يكون أحادي.

تعريف ٦-١١. نفرض G زمرة. الراسم $\phi:G \to G$ يسمى تماثل ذاتي automorphism للزمرة G إذا كان ϕ تشاكل تناظر أحادي.

مثال ٦-١٢. نفرض G زمرة. لعنصر ما $a \in G$ ، نعرف الراسم $I_a:G \to G$ بالصورة $I_a(x)=axa^{-1}$ لكل $x \in G$. حيث أن

$$I_a(xy)=axya^{-1}=(axa^{-1})(aya^{-1})$$
$$=I_a(x)I_a(y)$$

لذلك I_a يكون تشاكل.

الآن نفـرض أن $I_a(x)=I_a(y)$. إذن $ax\,a^{-1}=a\,y\,a^{-1}$. ومـن قانون الحذف نحصل على $x=y$ وبالتالي I_a يكون أحادي.

لأي $x\in G$ ، $x=a(a^{-1}x\,a)a^{-1}=I_a(a^{-1}x\,a)$.

إذن I_a يكون فوقي وبالتالي تماثل ذاتي.

هذا التماثل الذاتي يسمى التماثل الذاتي الداخلي للزمرة G inner automorphism المحدد بالعنصر a .

مثال ٦-١٣. مرافق العدد المركب يكون تماثل ذاتي لزمرة الأعداد المركبـــة مـــع الجمـــع. أي الراســـم $\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ حيـــث $\phi(a+bi)=\phi(a-bi)$ يكون تماثل ذلتي.

تمارين ٦

في التمارين ١-٦ حدد ما إذا كان الراسم المعطى تشاكل أم لا.

١- $\phi:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{R},+)$ حيث $\phi(n)=n$.

٢- $\phi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{Z},+)$ حيث $\phi(x)=$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

٣- $\phi:(\mathbb{R}^{*},\cdot)\to(\mathbb{R}^{*},\cdot)$ حيث $\phi(x)=|x|$.

٤- $\phi:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^{*},\cdot)$ حيث $\phi(x)=2^{x}$.

٥- نفرض G أي زمرة و $\phi:G\to G$ حيث $\phi(g)=g^{-1}$ لكل $g\in G$.

٦- نفرض F زمرة الجمع لمجموعة كل الدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ التفاضلية من جميع الرتب. نفرض $\phi:F\to F$ حيث $\phi(f)=f''$ (المشتقة الثانية).

في التمارين ٧-٩ أحسب الكميات المشار إليها للتشاكل المعطى

٧- $\ker(\phi)$ و $\phi(25)$ للتشاكل $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_7$ بحيث $\phi(1)=4$.

٨- $\ker(\phi)$ و $\phi(18)$ للتشاكل $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{10}$ بحيث $\phi(1)=6$.

٩- $\ker(\phi)$ و $\phi(20)$ للتشاكل $\phi:\mathbb{Z}\to S_8$ بحيث $\phi(1)=(1,4,2,6)(2,5,7)$.

١٠- كم تشاكل فوقي يوجد من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$ ؟

١١- كم تشاكل يوجد من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$ ؟

١٢- نفرض G زمرة و $g \in G$. نفرض $\phi_g : G \to G$ معرف بالصورة $\phi_g(x) = gx$ لكل $x \in G$. بين لأي $g \in G$ يكون ϕ_g تشاكل؟

١٣- نفرض G زمرة و $g \in G$. نفرض $\phi_g : G \to G$ معرف بالصورة $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ لكل $x \in G$. بين لأي $g \in G$ يكون ϕ_g تشاكل؟

١٤- بين أنه إذا كان G ، G_1 و G_2 ثلاث زمر وكان $\phi : G \to G_1$ و $\gamma : G_1 \to G_2$ تشاكلان فإن الراسم المركب $\gamma\phi : G \to G_2$ يكون أيضا تشاكل.

١٥- نفرض $\phi : G \to H$ تشاكل زمري بين أن $\phi(G)$ تكون إبدالية إذا وفقط إذا كان $xyx^{-1}y^{-1} \in \ker(\phi)$ لكل $x, y \in G$.

١٦- نفرض $\phi : G \to H$ تشاكل زمري نواته K ونفرض $a \in G$.
برهن على أن $\{x \in G : \phi(x) = \phi(a)\} = Ka$.

١٧- بين أن $\mathbb{Z}_4 \cong \langle i \rangle$.