الفصل الخامس

الزمر الجزئية Subgroups

نلاحظ أنه في بعض الأحيان قد يكون لدينا زمر محتواه في زمر أكبر. فعلى سبيل المثال زمرة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ مع الجمع محتواه في زمرة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ مع الجمع والتي هي أيضا محتواه في زمرة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مع الجمع. عندما ننظر إلى الزمرة $(\mathbb{Z},+)$ على أنها محتواة في $(\mathbb{R},+)$ فإنه من المهم جدا ملاحظة أن العملية $+$ على العددين الصحيحين m,n كعناصر في $(\mathbb{Z},+)$ تعطي نفس العنصر $m+n$ كما لو اعتبرنا m,n كعنصرين في $(\mathbb{R},+)$. لذلك لايمكننا إعتبار أن $(\mathbb{Q}^{+},\cdot)$ محتواة في $(\mathbb{R},+)$ على الرغم من أن $\mathbb{Q}^{+}$ محتواة في $\mathbb{R}$ كمجموعة. في هذه الحالة $2\cdot 3=6$ تكون في $(\mathbb{Q}^{+},\cdot)$ بينما $2+3=5$ في $(\mathbb{R},+)$. إذن نحن نتطلب ليس فقط أن مجموعة إحدى الزمرتين تكون محتواه في مجموعة الزمرة الأخرى بل أيضا نتطلب أن عملية الزمرة على المجموعة الجزئية تكون هي العملية المولدة والتي تعطي نفس العنصر لكل زوج من هذه المجموعة الجزئية كما تعطي عملية الزمرة على المجموعة الكلية.

تعريف ٥-١. نفرض G زمرة و H مجموعة جزئية غير خالية من G. إذا كانت H مغلقة بالنسبة للعملية على G وكانت H مع العملية المولدة من G هي نفسها زمرة فإن H تسمى زمرة جزئية subgroup من G.

سوف نستخدم الرمز $H \leq G$ أو $G \geq H$ للدلالة على أن H زمرة جزئية من G والرمز $H < G$ أو $G > H$ للدالة على أن H زمرة جزئية من G ولكن $H \neq G$. لذلك $(\mathbb{Z},+) < (\mathbb{R},+)$ ولكن $(\mathbb{Q},\cdot)$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$. كل زمرة G يكون لها زمرتان جزئيتان، G نفسها و $\{e\}$ ، حيث e هو العنصر المحايد في G. G تسمى زمرة جزئية غير خالصة improper subgroup و جميع الزمر الجزئية الأخرى من G تسمى زمر جزئية خالصة proper subgroup ، $\{e\}$ تسمى الزمرة الجزئية التافهة trivial subgroup وجميع الزمر الجزئية الأخرى تسمى زمر جزئية غير تافهة nontrivial subgroup .

مثال ٥-٢. $\mathbb{Q}^+$ مع عملية الضرب تكون زمرة جزئية خالصة من $\mathbb{R}^+$ مع عملية الضرب.

مثال ٥-٣ . زمرة الجذور النونية للواحد الصحيح تكون زمرة جزئية U_n من الزمرة $\mathbb{C}^*$ المكونة من جميع الأعداد المركبة غير الصفر مع عملية الضرب.

مثال ٥-٤. يوجد نوعان مختلفان من بنية الزمرة من رتبة 4 . نصف هاتان الزمرتان عن طريق جدول الزمرة (جدول ٥-١ و جدول ٥-٢) . الزمرة V تسمى زمرة كلاين klein 4-group والرمز V يأتي من الكلمة الألمانية Vier والتي تعني four ، والزمرة $\mathbb{Z}_4$.

V:

	e	a	b	C
e	e	a	b	C
a	a	e	c	B
b	b	c	e	A
c	c	b	a	E

جدول رقم ٥-١

$\mathbb{Z}_4$:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

جدول رقم ٥-٢

الزمرة الجزئية الخالصة غير التافهة الوحيدة من $\mathbb{Z}_4$ هي $\{0,2\}$. لاحظ أن $\{0,3\}$ ليست زمرة جزئية من $\mathbb{Z}_4$ ، حيث أن $\{0,3\}$ ليست مغلقة بالنسبة للعملية + . فمثلا $3+3=2$ و $2 \notin \{0,3\}$. ومع ذلك الزمرة V لها ثلاث زمر جزئية خالصة غير تافهة $\{e,a\}$ ، $\{e,b\}$ ، $\{e,c\}$. هنا $\{e,a,b\}$ ليست زمرة جزئية حيث أن $\{e,a,b\}$ ليست مغلقة بالنسبة للعملية على V لأن $ab=c$ و $c \notin \{e,a,b\}$.

مثال ٥-٥ . نفرض F هي زمرة كل الدوال ذات القيم الحقيقية والتي نطاقها $\mathbb{R}$ مع عملية الجمع. المجموعة الجزئية من F المكونة من كل الدوال المتصلة تكون زمرة جزئية من F، حيث أن مجموع دالتين متصلتين يكون دالة متصلة ، الدالة f حيث $f(x)=0$ لكل x تكون متصلة وهي المحايد الجمعي ، وإذا كانت f دالة متصلة فإن $-f$ تكون دالة متصلة وهي المعكوس الجمعي للدالة f.

النظرية التالية تعطينا الشرط الضروري والكافي لكي تكون المجموعة الجزئية H من الزمرة G زمرة جزئية من G .

نظرية ٥-٦. المجموعة الجزئية H من الزمرة G تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان

١- H مغلقة بالنسبة للعملية على G . أي أن $a,b \in H \Rightarrow ab \in H$

٢ – لكل $a \in H$ يكون $a^{-1} \in H$.

البرهان : إذا كانت $H \leq G$ فإن الشرطان (١) و (٢) يكونا محققان وذلك من تعريف الزمرة. من جهة أخرى نفرض أن الشرطان (١) و (٢) محققان. حيث أن العملية دامجة على G فإنها تكون أيضا دامجة على H . نفرض $a \in H$، إذن من (٢) $a^{-1} \in H$ ومن (١) $e = aa^{-1} \in H$. إذن H تكون زمرة وبالتالي تكون زمرة جزئية من G .

نظرية ٥-٧. المجموعة الجزئية H من الزمرة G تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ لكل $a,b \in H$.

البرهان: نفرض H زمرة جزئية و $b \in H$. إذن $b^{-1} \in H$. كذلك لكل $a,b \in H$ يكون $ab^{-1} \in H$. من جهة أخرى نفرض H مجموعة جزئية غير خالية من G بحيث يكون $ab^{-1} \in H$ لكل $a,b \in H$. لأي $x \in H$. نحصل على $e = xx^{-1} \in H$. كذلك لكل $h \in H$ نحصل على $h^{-1} = eh^{-1} \in H$. نفرض $h_1, h_2 \in H$. إذن $h_2^{-1} \in H$ ويكون $h_1 h_2 = h_1(h_2^{-1})^{-1} \in H$. من نظرية ٥-٦ ، H تكون زمرة جزئية من G .

نظرية ٥-٨. نفرض G زمرة و A زمرة جزئية من G . إذن

(أ) العنصر المحايد في A هو نفس العنصر المحايد في G .

(ب) معكوس العنصر a في A هو نفس معكوس العنصر a في G .

البرهان: (أ) نفرض e_A هو العنصر المحايد للزمرة الجزئية A و e_G هو العنصر المحايد للزمرة G . إذن

$$e_A e_A = e_A \quad و \quad e_A e_G = e_A$$

ومنها نحصل على $e_A e_A = e_A e_G$.

من قانون الحذف نحصل على $e_A = e_G$.

(ب) نفرض أن a_A^{-1} هو معكوس العنصر a في الزمرة الجزئية A و a_G^{-1} هو معكوس العنصر a في الزمرة G .

إذن $aa_A^{-1} = e_A = e_G$ و $aa_G^{-1} = e_G$.

إذن $aa_A^{-1} = aa_G^{-1}$ ومن قانون الحذف نحصل على $a_A^{-1} = a_G^{-1}$.

الآن نتعرف على كيفية الحصول على زمر جزئية من زمر جزئية معطاة.

نظرية ٥-٩. تقاطع زمرتين جزئيتين من الزمرة G يكون زمرة جزئية من G .

البرهان: نفرض H_1 و H_2 زمرتان جزئيتان من الزمرة G. حيث أن H_1 زمرة جزئية، إذن $e \in H_1$. كذلك $e \in H_2$. إذن $e \in H_1 \cap H_2$ وتكون $H_1 \cap H_2$ غير خالية.

نفرض $a,b \in H_1 \cap H_2$. إذن $a,b \in H_1$ و $a,b \in H_2$. وحيث أن H_1 زمرة جزئية، إذن $ab^{-1} \in H_1$. كذلك $ab^{-1} \in H_2$. إذن $ab^{-1} \in H_1 \cap H_2$ لذلك $H_1 \cap H_2$ تكون زمرة جزئية.

ملاحظة ٥-١٠ . إتحاد زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة أن يكون زمرة جزئية كما يتضح من المثال التالي:

مثال ٥-١١ . نفرض $G = (\mathbb{Z},+)$ زمرة الأعداد الصحيحة مع عملية الجمع ونفرض

$$H = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\} = 3\mathbb{Z}$$

و
$$K = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots\} = 5\mathbb{Z}$$

واضح أن كلا من H و K تكون زمرة جزئية من G ولكن $H \cup K = \{0, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \dots\}$ ليست زمرة جزئية من G حيث أن $3,5 \in H \cup K$ ولكن $3+5=8 \notin H \cup K$ ، أي أن عملية الجمع ليست مغلقة على $H \cup K$.

نظرية ٥-١٢. نفرض H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة G. إذن $H \cup K$ يكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان إما $H \subset K$ أو $K \subset H$.

البرهان: نفرض أن $H \cup K$ زمرة جزئية من G ونفرض أن $H \not\subset K$ و $K \not\subset H$. إذن يوجد عنصر $a \in H \setminus K$ وعنصر $b \in K \setminus H$. الآن $a,b \in H \cup K$ ، وحيث أن $H \cup K$ زمرة جزئية، إذن $ab \in H \cup K$. إذا كان $ab \in H$ فإن $b = a^{-1}ab \in H$ وهذا تناقض. و إذا كان $ab \in K$ فإن $a = abb^{-1} \in K$ وهذا أيضا تناقض.

الاتجاه العكسي بديهي.

نفرض H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة G . نعرف حاصل الضرب HK في G كمايلي $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. هنا حاصل الضرب hk هي العملية المعرفة على G .

نظرية ٥-١٣. نفرض H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة G . إذن HK تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $HK = KH$.

البرهان: نفرض $HK = KH$. حيث أن $e = ee \in HK$ ، إذن HK مجموعة غير خالية.

نفرض أن $a,b \in HK$.

إذن $a = h_1k_1$ و $b = h_2k_2$ لبعض $h_1,h_2 \in H$ و $k_1,k_2 \in K$.

إذن $ab^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = h_1k_3h_2^{-1}$ حيث $k_3 = k_1k_2^{-1} \in K$.

الآن $k_3h_2^{-1} \in KH = HK$. إذن $k_3h_2^{-1} = h_3k_4$ لبعض $h_3 \in H$ و $k_4 \in K$.

لذلك $ab^{-1} = h_1h_3k_4 = h_4k_4 \in HK$ حيث $h_4 = h_1h_3 \in H$.

وهذا يبرهن أن HK تكون زمرة جزئية من G.

من جهة أخرى نفرض أن HK زمرة جزئية من G.

نفرض $a \in KH$ ، إذن $a = kh$ لبعض $h \in H$ و $k \in K$.

إذن $a^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK$. إذن $a \in HK$. لـــذلك $KH \subset HK$.

الآن نفـرض $b \in HK$. إذن $b^{-1} \in HK$. إذن $b^{-1} = h'k'$ لـبعض $h' \in H$ و $k' \in K$.

لذلك $b = k'^{-1}h'^{-1} \in KH$. إذن $HK \subset KH$.

وهذا يبرهن على أن $HK = KH$.

نتيجة ٥-١٤. إذا كانت G زمرة إبداليـة فـإن HK تكـون زمرة جزئيـة من G لأي زمرتين جزئيتين H و K من G .

نظرية ٥-١٥. نفرض H و K زمرتان جزئيتان منتهيتان من الزمرة G. إذن $o(HK) = \dfrac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)}$ حيـث $o(H)$ هـي رتبـة H و $o(K)$ هي رتبة K .

البرهان: نتذكر هنا أن $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$.

نفرض $o(H) = r$ ، $o(K) = s$ و $o(H \cap K) = t$.

الآن HK تحتوي على الأكثر عدد rs عنصر.

ومـع ذلـك فمـن الممكـن أن يكـون $h_1k_1 = h_2k_2$ لـبعض $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$. أي أنه قد يحدث تكرار في بعض العناصر.

إذا كـــــــان ممكنـــــــا نفـــــــرض $h_1k_1 = h_2k_2$ ونـــــــضع $x = (h_2)^{-1}h_1 = k_2(k_1)^{-1}$.

الآن $x = (h_2)^{-1}h_1$ يبـــين أن $x \in H$ و $x = k_2(k_1)^{-1}$ يبـــين أن $x \in K$. إذن $x \in H \cap K$. و $h_2 = h_1x^{-1}$ و $k_2 = xk_1$.

من جهة أخرى لأي $y \in H \cap K$ نفرض $h_3 = h_1y^{-1}$ و $k_3 = yk_1$.

إذن واضح أن $h_3k_3 = h_1k_1$ حيث $h_3 \in H$ و $k_3 \in K$.

لذلك كل عنصر $hk \in HK$ يمكن التعبير في الصورة h_ik_i ، حيث $h_i \in H$ و $k_i \in K$ ، عدد مرات وجودها في $H \cap K$ أي t مرة.

إذن عدد عناصر HK يساوي $\frac{rs}{t}$.

تعريف ٥-١٦. مركز center الزمرة G ، ويرمز له بالرمز $Z(G)$ ، هو مجموعة العناصر من G التي تتبادل مع جميع عناصر G . أي أن

$$Z(G) = \{z \in G : zx = xz \; \forall x \in G\}$$

واضح أن $Z(G) \subset G$ وإذا كانت G زمرة إبدالية فإن $Z(G) = G$.

نظرية ٥-١٧. مركز الزمرة يكون دائما زمرة جزئية منها.

البرهان: نفرض G زمرة و $Z(G)$ هو مركز الزمرة. حيث أن $ex = xe$ لكل $x \in G$ ، إذن $e \in Z(G)$ وتكون $Z(G)$ مجموعة غير خالية.

نفرض $a,b \in Z(G)$. إذن $ax = xa$ و $bx = xb$ لكل $x \in G$.

لإثبات أن $Z(G)$ زمرة جزئية سوف نبين أن $ab^{-1} \in Z(G)$.

لكل $x \in G$ يكون $ab^{-1}x = axb^{-1} = xab^{-1}$. إذن $ab^{-1} \in Z(G)$

وتكون $Z(G)$ زمرة جزئية من G .

الزمرة الجزئية الدائرية Cyclic subgroup

نفرض G زمرة ونفرض $a \in G$. الزمرة الجزئية التي تحتوي a يجب أن تحتوي a^n وذلك من نظرية ٥-٦ حيث n عدد صحيح موجب. هذه القوى الصحيحة الموجبة من قوى a تعطي مجموعة مغلقة بالنسبة للضرب. بالطبع الزمرة الجزئية التي تحتوي a يجب أن تحتوي a^{-1} . وعلى وجه العموم يجب أن تحتوي a^{-m} لكل $m \in \mathbb{Z}^+$. كذلك يجب أن تحتوي $e = a^0$. باختصار الزمرة الجزئية من G التي تحتوي العنصر a يجب أن تحتوي a^n لكل $n \in \mathbb{Z}$. من الواضح أن هذه القوى a^n ليس بالضرورة أن جميعها مختلفة. فعلى سبيل المثال في الزمرة V في مثال ٥-٤ ، $a^{-1} = a$ ، $a^4 = e$ ، $a^3 = a$ ، $a^2 = e$ وهكذا.

نظرية ٥-١٨. نفرض G زمرة و $a \in G$. إذن $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ تكون زمرة جزئية من G وهي أصغر زمرة جزئية من G تحتوي a .

البرهان: سوف نختبر الشرط المعطى في نظرية ٥-٦.

حيث أن $a^r a^s = a^{r+s}$ لكل $r,s \in \mathbb{Z}$ نجد أن حاصل ضرب عنصرين في H يكون أيضا عنصر في H . لذلك H تكون مغلقة بالنسبة للعملية على G .

أيضا $a^0=e$ ، لذلك $e\in H$. نفرض $a^r\in H$ ، إذن $a^{-r}\in H$ و $a^r a^{-r}=a^0=e$. إذن H تكون زمرة جزئية من G .

تعريف ٥-١٩. نفرض G زمرة و $a\in G$. إذن الزمرة الجزئية $\{a^n : n\in\mathbb{Z}\}$ من G تسمى الزمرة الجزئية الدائرية cyclic subgroup من G المولدة بالعنصر a ويرمز لها بالرمز $<a>$.

تعريف ٥-٢٠. العنصر a من الزمرة G يسمى مولد generator الزمرة G إذا كان a يولد G أي إذا كان $<a>=G$. الزمرة G تسمى دائرية إذا وجد عنصر $a\in G$ يولد G .

مثال ٥-٢١ . نعتبر الزمرتين V و $\mathbb{Z}_4$ المعرفتين في مثال ٥-٥ الزمرة $\mathbb{Z}_4$ دائرية حيث أن $\mathbb{Z}_4=<1>=<3>$ أما الزمرة V فإنها ليست دائرية حيث أن $<a>$ و $<b>$ و $<c>$ كلها زمر جزئية خالصة من V .

مثال ٥-٢٢. الزمرة $\mathbb{Z}$ مع عملية الجمع تكون زمرة دائرية. كل من 1 و 1- يكون مولد لهذه الزمرة.

مثال ٥-٢٣. نفرض الزمرة $\mathbb{Z}$ مع عملية الجمع. لإيجاد $<3>$ ، حيث أن العملية هي الجمع فإن $<3>$ يجب أن تحتوي

$3, 3+3=6, 3+3+3=9,\ldots$

إذن $\langle 3\rangle = 3\mathbb{Z}$.

بطريقة مماثلة سوف نفرض أن $n\mathbb{Z}$ هي الزمرة الجزئية الدائرية $<n>$ من $\mathbb{Z}$.

لاحظ أن $6\mathbb{Z} < 3\mathbb{Z}$.

نظرية ٥-٢٤. كل زمرة دائرية تكون إبدالية.

البرهان: نفرض G زمرة دائرية مولدها a . أي أن

$$G = \langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

إذا كان g_1, g_2 عنصران في G فإنه يوجد عددان صحيحان r,s بحيث $g_1 = a^r$ و $g_2 = a^s$. إذن

$$g_1 g_2 = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s a^r = g_2 g_1$$

لذلك G تكون إبدالية.

نظرية ٥-٢٥. الزمرة الجزئية من الزمرة الدائرية تكون دائرية.

البرهان: نفرض G زمرة دائرية مولده بالعنصر a ونفرض H زمرة جزئية من G . إذا كانت $H = \{e\}$ فإن $H = <e>$ تكون دائرية. نفرض $H \neq \{e\}$. إذن $a^n \in H$ لبعض $n \in \mathbb{Z}$. نفرض m هي أصغر عدد صحيح موجب بحيث $a^m \in H$. سوف نوضح أن $c = a^m$ تولد H . أي أن $H = <a^m> = <c>$. يجب أن نبين أن كل عنصر $b \in H$ يكون قوة للعنصر c . حيث أن $b \in H$ و $H \leq G$ فإن $b = a^n$ لبعض $n \in \mathbb{Z}$. إذن يوجد $r,q \in \mathbb{Z}$ بحيث $n = mq + r$ و $0 \leq r < m$. إذن

$a^n = a^{mq+r} = (a^m)^q a^r$ ومنها $a^r = (a^m)^{-q} a^n$.

وحيث أن $a^n \in H$ و $a^m \in H$ و H زمرة فإن $(a^m)^{-q} \in H$.

إذن $a^r = (a^m)^{-q} a^n \in H$. وحيث أن m هي أصغر عدد صحيح موجب بحيث $a^m \in H$ و $0 \le r < m$ فإن $r = 0$ ويكون $n = mq$.

إذن $b = a^n = (a^m)^q = c^q$ ، أي أن العنصر b يكون قوة للعنصر c.

تعريف ٥-٢٦. نفرض G زمرة و $a \in G$. أصغر عدد صحيح موجب n يحقق $a^n = e$ ، حيث e هو العنصر المحايد في G ، يسمى رتبة order العنصر a ويرمز لذلك بالرمز $|a|$ أو $o(a)$. إذا لم يوجد مثل هذا العدد n فيقال أن a من رتبة لانهائية.

نظرية ٥-٢٧. نفرض G زمرة و $a \in G$. إذا كان $G = <a>$ فإن رتبة G تساوي رتبة a .

البرهان: نفرض أولا أن $|a| = n < \infty$. لكي نبرهن على أن $|G| = n$ يكفي إثبات أن $G = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. لاحظ أن جميع عناصر $\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ مختلفة، حيث إذا كان $a^i = a^j$ و $i \neq j$ و $i < j < n$ فإن $a^{j-i} = e$ و $j - i < n$. وهذا يناقض حقيقة أن n هي أصغر عدد صحيح موجب يحقق $a^n = e$.

الآن ليكن $a^r \in G$ ، $r \in \mathbb{Z}$. إذن $r = mn + s$ حيث $m, s \in \mathbb{Z}$ و $0 \le s < n$. إذن $a^r = a^{mn+s} = (a^n)^m a^s = a^s$. ولكن a^s هو أحد العناصر $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ وبالتالي كل عنصر $a^r \in G$ هو أحد

العناصر $e,a,a^2,...,a^{n-1}$. إذن $G=\{e,a,a^2,...,a^{n-1}\}$ وهذا يعني أن $|a|=n=|G|$.

ثانيا نفرض أن $|a|=\infty$. إذن $a^i \neq a^j$ لكل $i \neq j$. لأنه إذا كان $a^i=a^j$ و $i>j$، مثلا، فإن $a^{i-j}=e$، وهذا يعني أن رتبة a منتهية وهذا خلاف الفرض. إذن رتبة G تكون أيضا لانهائية.

الآن نعطي النظرية الأساسية التي تعطينا المولدات لزمر جزئية من زمرة دائرية منتهية.

نظرية ٥-٢٨. نفرض G زمرة دائرية منتهية بها n عنصر ومولدها a. نفرض $b \in G$ ونفرض $b=a^s$. إذن b تولد زمرة جزئية دائرية H من G تحتوي $\frac{n}{d}$ عنصر حيث d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين n و s. أيضا $\langle a^s \rangle = \langle a^t \rangle$ إذا وفقط إذا كان $(s,n)=(t,n)$.

البرهان: كون b تولد زمرة جزئية دائرية H من G هذا معروف من نظرية ٥-٢٥ نحتاج فقط لبيان أن H تحتوي $\frac{n}{d}$ عنصر.

الآن $b=a^s$، $b^m=e$ إذا وفقط إذا كان $(a^s)^m=e$ إذا وفقط إذا كان n يقسم ms. والسؤال ما هو أصغر عدد صحيح موجب m بحيث أن n يقسم ms؟ نفرض d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين n و s. إذن يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $d=un+vs$. حيث

أن d تقسم كلا من n و s فإن $1=u\frac{n}{d}+v\frac{s}{d}$ حيث كلا من $\frac{n}{d}$ و $\frac{s}{d}$ عدد صحيح . هذه المعادلة الأخيرة تبين أن كلا من $\frac{n}{d}$ و $\frac{s}{d}$ أوليان نسبيا حيث أن كل عدد صحيح يقسمهم يجب أن يقسم 1.

نريد إيجاد أصغر عدد صحيح موجب m بحيث يكون

$$\frac{ms}{n}=\frac{m(\frac{s}{d})}{\frac{n}{d}}$$

عدد صحيح. حيث أن $\frac{n}{d}$ و $\frac{s}{d}$ أوليان نسبيا و $\frac{n}{d}$ تقسم $m(\frac{s}{d})$ فإن $\frac{n}{d}$ يجب أن يقسم m . إذن أصغر عدد m مطلوب هو $\frac{n}{d}$. إذن H تكون من رتبة $\frac{n}{d}$.

تمارين ٥

في التمارين ١-٦ حدد ما إذا كانت المجموعة الجزئية من $\mathbb{C}$ المعطاة تكون زمرة جزئية من زمرة الأعداد المركبة مع عملية الجمع:

١- $\mathbb{R}$ ٢- $\mathbb{Q}^+$ ٣- $7\mathbb{Z}$

٤- مجموعة الأعداد التخيلية الخالصة بما فيها الصفر $i\mathbb{R}$.

٥- مجموعة المضاعفات الكسرية $\pi\mathbb{Q}$ للعدد π.

٦- المجموعة $\{\pi^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

في التمارين ٧-١٠ حدد ما إذا كانت مجموعة المصفوفات غير الشاذة من درجة $n \times n$ والتي جميع عناصرها أعداد حقيقية تكون زمرة جزئية من $GL_n(\mathbb{R})$.

٧- المصفوفات التي محددها يساوي 2 .

٨- المصفوفات القطرية والتي جميع عناصرالقطر الرئيسي فيها تختلف عن الصفر.

٩- المصفوفات التي محددها يساوي 1 .

١٠- المصفوفات التي محددها 1- .

١١- نعتبر الجدول التالي والذي يعطي الزمرة $\mathbb{Z}_6$ المكونة من ستة عناصر

$\mathbb{Z}_6$:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2					
3						
4						
5						

(أ) أكمل الجدول .

(ب) أحسب الزمر الجزئية $<0>, <1>, <2>$ ،
$<3>, <4>, <5>$ من $\mathbb{Z}_6$.

(جـ) بين أي العناصر يولد الزمرة $\mathbb{Z}_6$.

١٢- بين أنه إذا كان H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة الابدالية G فإن $HK = \{hk : h \in H \text{ and } k \in K\}$ تكون زمرة جزئية من G.

١٣- بين أن الزمرة الدائرية التي لها مولد واحد فقط يمكن أن تحتوي على الأكثر عنصرين.

١٤- نفرض G زمرة إبدالية العملية المعرفة عليها ضرب وعنصرها المحايد e . بين أن مجموعة كل العناصر x من G والتي تحقق $x^2 = e$ تكون زمرة جزئية من G .

١٥- كرر تمرين ١٤ في الوضع العام لمجموعة الحلول x للمعادلة $x^n = e$ لكل عدد صحيح $n \geq 1$.

١٦- بين أنه إذا كانت G زمرة منتهية بعنصر محايد e و $a \in G$ فإنه يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $a^n = e$.

١٧- نفرض H مجموعة جزئية منتهية غير خالية من الزمرة G بحيث تكون مغلقة بالنسبة للعملية على G . بين أن H تكون زمرة جزئية من G .

١٨- نفرض H زمرة جزئية من الزمرة G . نعرف العلاقة $\sim$ على G كما يلي: لكل $a,b \in G$ $\quad a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ بين أن $\sim$ تكون علاقة تكافؤ على G .

١٩- بين أن الزمرة التي ليس بها زمر جزئية خالصة غير تافهة تكون دائرية.

في التمارين ٢٠-٢٤ أعط مثال أو وضح لماذا لا يوجد مثال يحقق الخاصية الموصوفة للزمرة:

٢٠- زمرة منتهية ليست دائرية.

٢١- زمرة لانهائية ليست دائرية.

٢٢- زمرة دائرية لها مولد واحد.

٢٣- زمرة دائرية لا نهائية لها أربع مولدات.

٢٤- زمرة دائرية منتهية لها أربع مولدات.

٢٥- نفرض r و s عددان صحيحان موجبان. بين أن $\{nr + ms : n,m \in \mathbb{Z}\}$ تكون زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$.

٢٦- نفرض a و b عنصران في الزمرة G . بين أنه إذا كان ab من رتبة منتهية n فإن ba يكون أيضا من رتبة n.

في التمارين ٢٧-٣٠ صف عناصر الزمرة الجزئية الدائرية من $GL_2(\mathbb{R})$ المولدة بالمصفوفة المعطاة

٢٧- $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ٢٨- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ٢٩- $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ٣٠- $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

٢٨- أي من الزمر التالية تكون دائرية

$(\mathbb{Z},+)$ ، $(\mathbb{Q},+)$ ، $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$ ، $(6\mathbb{Z},+)$ ، $(\{6^n : n \in \mathbb{Z}\},\cdot)$.

٢٩- أوجد كل الزمر الجزئية من الزمرة المعطاة في كل مما يأتي:

$\mathbb{Z}_8$ ، $\mathbb{Z}_{16}$ ، $\mathbb{Z}_{12}$.

٣٠- أوجد رتب كل الزمر الجزئية للزمرة المعطاة

$\mathbb{Z}_{17}$ ، $\mathbb{Z}_{20}$ ، $\mathbb{Z}_{12}$ ، $\mathbb{Z}_8$ ، $\mathbb{Z}_6$.