القسم الثاني

نظرية الزمر

Group Theory

مقدمة

يؤدي مفهوم الزمرة الذي يعتبر أحد ركائز البناء الرياضي الحديث، دورا متعدد الأشكال في فروع الرياضيات. ولذلك تعتبر بنية الزمرة إحدى البنى الجبرية الأساسية، وتمثل نظريتها في الوقت الراهن واحدة من النظريات الأكثر تقدما في الجبر.

وقد تطلب تطوير هذه النظرية وتدقيق مفهومها، عدة أجيال من الرياضيين.

ففي عام ١٧٧٠ م درس الفرنسي لاجرانج Lagrange الزمر S_2 و S_3 و S_4 لعلاقتها بحلول معادلات الدرجة الثانية والثالثة والرابعة. وفي عام ١٨٢٤م أثبت النرويجي آبل Abel استحالة إيجاد قانون عام لحل معادلات الدرجة الخامسة. وبعد دراسة الفرنسي جالوا Galois أعمال كل من لاجرانج و آبل قرن في عام ١٨٣٢م المعادلات الجبرية بالزمر(مجموعة منتهية مغلقة من التباديل). واكتشف الشروط التي يجب توافرها في معادلة درجتها أكبر من أو تساوي خمسة لكي يكون لها حلا جبريا. وفيما بين ١٨٤٤م و ١٨٤٦ م طوّر الفرنسي كوشي Cauchy نظرية التباديل وأثبت أنه إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها mp حيث p عدد أولي فإن G تحوي زمرة جزئية رتبتها p. وفي عام ١٨٥٤م

استخدم الانجليزي كيلي Cayley الخاصية التجميعية والعنصر المحايد في تعريفه للزمرة . وفي عام ١٨٦٧ تعامل جوردان مع الزمر غير المنتهية كما عرف الزمر قابلة للحل. وفي عام ١٨٧٠ نشر جوردن كتابه (التباديل والمعادلات الجبرية) الذي عرض فيه ما عرف عن زمر التباديل وعلاقتها بنظرية جالوا إضافة للعديد من النتائج الجديدة في التشاكل الزمري.

وفي عام ١٨٧٢م وسع النرويجي سيلو Sylow أعمال جالوا وكوشي على الزمر المنتهية من الرتبة mp^n وفي نفس العام استخدم الالماني كلاين Klein نظرية الزمر لتعريف علم الهندسة تعريفا دقيقا وشاملا. وفي عام ١٨٨٢م نشر الالماني ويبر التعريف الدقيق للزمرة الذي نستخدمه حاليا.

وانطلاقا من ذلك العهد بدأت نظرية الزمر في التجلي، سيما في مجال حلّ المعادلات الجبرية.وتعددت تطبيقات الزمر في فروع الرياضيات (مثل نظرية الدوال ونظرية المعادلات التفاضلية ونظرية التوبولوجيا الجبرية والتوبولوجيا العامة)، وفي غير الرياضيات (مثل علم البلورات وتصنيف الجسيمات الأولية في الفيزياء، وميكانيكا الكم، والنظرية النسبية، ونظرية العقد). إنها قائمة طويلة، يصعب تحديدها بدقة، تبيّن مدى تواجد الزمر ومختلف نظرياتها في الفروع العلمية المختلفة.

الفصل الرابع

الزمـــــر Groups

النظّام الجبري أو البنية الجبرية هي عبارة عن مجموعة غير خالية مع عمليـة ثنائيـة أو أكثـر معرفـة عليهـا. من البنـى الجبريـة التـي تحقـق عملياتها الثنائية خواص معينـة مهمـة : الزمـرة ، الحلقـة ، الحقل و هكذا. البنية الجبريـة S مـع عمليـة ثنائيـة + أو • تكتب $(S,+)$ أو $(S,\bullet)$. ومع ذلك يمكن أيضا استخدام التعبير "البنيـة الجبريـة S مـع الجمـع أو الضرب" . فيما يلي نتعرض بالدراسة لأحد هذه البنـى الجبريـة وهـو مـا يعرف بالزمرة.

تعريف ٤-١. الزمـرة group $(G,*)$ هـي مجموعـة غيـر خاليـة G مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية $*$ بحيث تتحقق المسلمات التالية:

$\mathbf{G}_1$: لكل $a,b,c \in G$ يكون $(a*b)*c = a*(b*c)$ أي أن العمليـة $*$ تكون دامجة.

$\mathbf{G}_2$: يوجـد عنـصر e فـي G بحيـث لكـل $x \in G$ يكـون $e*x = x*e = x$. أي وجـود العنـصر المحايـد e بالنـسبة للعملية $*$.

$\mathbf{G}_3$: لكل $a \in G$ يوجد عنصر a' في G بحيث $a*a' = a'*a = e$. a' هو معكوس العنصر a .

تعريف ٤-٢. الزمرة $(G,*)$ تسمى زمرة إبدالية abelian إذا كانت العمليــة الثنائيــة لهــا إبداليــة commutative أي إذا كــان $a*b=b*a$ لكل $a,b \in G$.

أمثلة ٤-٣.

١- مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{Z}^+$ مع عملية الجمع لا تكون زمرة. حيث لا يوجد عنصر محايد في $\mathbb{Z}^+$ كما لا يوجد معكوس لكل عنصر.

٢- مجموعة كل الأعداد الصحيحة غير السالبة (أي الأعداد الصحيحة الموجبة مع الصفر) لا تكون زمرة مع عملية الجمع حيث لا يوجد معكوس لكل عنصر.

٣- المجموعات $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ كل منها تكون زمرة مع عملية الجمع العادية.

٤- المجموعة $\mathbb{Z}^+$ مع عملية الضرب لا تكون زمرة حيث لا يوجد معكوس لكل عنصر.

٥- مجموعة كل الدوال ذات القيم الحقيقية والتي نطاقها $\mathbb{R}$ مع عملية جمع الدوال تكون زمرة إبدالية.

٦- المجموعة $M_{m,n}(\mathbb{R})$ المكونة من كل المصفوفات من درجة $m \times n$ والتي عناصرها أعداد حقيقية مع عملية جمع المصفوفات تكون زمرة إبدالية . المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تكون هي العنصر المحايد.

٧- المجموعة الجزئية S من $M_n(\mathbb{R})$ والمكونة من كل المصفوفات المنعكسة (التي لها معكوس) المربعة من درجة n تكون زمرة مع عملية ضرب المصفوفات.

٨- نفرض $*$ عملية ثنائية معرفة على $\mathbb{Q}^+$ بالصورة $a*b=\frac{ab}{2}$.

واضح أن $\mathbb{Q}^+$ مغلقة بالنسبة للعملية $*$. كذلك

$$(a*b)*c=\frac{ab}{2}*c=\frac{abc}{4} \quad \text{و} \quad a*(b*c)=a*\frac{bc}{2}=\frac{abc}{4}$$

لذلك $*$ تكون دامجة.

أيضا $2*a=a*2=a$ لكل $a\in\mathbb{Q}^+$. إذن 2 تكون هي العنصر المحايد للعملية $*$.

أخيرا $a*\frac{4}{a}=\frac{4}{a}*a=2$. لذلك $a'=\frac{4}{a}$ تكون هي معكوس العنصر a .

الخواص الأولية للزمرة.

نظرية ٤-٤. نفرض $(G,*)$ زمرة . إذن قوانين الحذف تكون محققة في G ، أي أنه

إذا كان $a*b=a*c$ فإن $b=c$

وإذا كان $b*a=c*a$ فإن $b=c$.

لكل $a,b,c\in G$.

البرهان: نفرض أن $a*b=a*c$. إذن من $\mathbf{G}_3$ يوجد a' ويكون

$$a'*(a*b)=a'*(a*c)$$

ومن قانون الدمج يكون

$$(a'*a)*b=(a'*a)*c$$

ومن تعريف a' يكون $a'*a=e$.

لذلك $e*b=e*c$ ومن تعريف e يكون $b=c$.

بالمثل من العلاقة $b*a=c*a$ نحصل على $b=c$.

نظرية ٤-٥ . إذا كانت $(G,*)$ زمرة وكان $a,b\in G$ ، فإن المعادلتان الخطيتان $a*x=b$ و $y*a=b$ يكون لهما حلول وحيدة x و y في G .

البرهان : أولا سوف نبين وجود حل على الأقل. لاحظ أن

$a*(a'*b)=(a*a')*b$ من قانون الدمج

$=e*b$ من تعريف المعكوس

$=b$ من خواص العنصر المحايد

لذلك $x=a'*b$ يكون حلا للمعادلة $a*x=b$.

بالمثل $y=b*a'$ يكون حلا للمعادلة $y*a=b$.

لبيان أن الحل وحيد، نفرض وجود حلان y_1,y_2 للمعادلة $y*a=b$.

إذن $y_1*a=b$ و $y_2*a=b$ ومنها $y_1*a=y_2*a$.

من قانون الحذف نحصل على $y_1=y_2$. وهذا يبين أن الحل y يكون وحيدا.

بالمثل يمكن إثبات أن الحل x يكون وحيدا.

نظرية ٤-٦. في الزمرة $(G,*)$ العنصر المحايد e يكون وحيدا. ولكل عنصر $a \in G$ يوجد معكوس وحيد a' .

البرهان: لإثبات أن العنصر المحايد يكون وحيدا ، نفرض وجود عنصرين محايدين e_1, e_2 في G . إذن باعتبار e_1 عنصرا محايدا يكون $e_1 * e_2 = e_2$ ، و باعتبار e_2 عنصرا محايدا يكون $e_1 * e_2 = e_1$. لذلك نحصل على $e_1 = e_2$.

لإثبات أن معكوس العنصر $a \in G$ يكون وحيدا ، نفرض وجود معكوسان $a', a"$ للعنصر a . إذن يكون لدينا

$a * a' = a' * a = e$ و $a * a" = a" * a = e$.

لذلك يكون $a * a' = a * a"$

ومن قانون الحذف نحصل على $a' = a"$.

نتيجة ٤-٧. نفرض $(G,*)$ زمرة و $a, b \in G$. إذن

(أ) $(a*b)' = b' * a'$ (ب) $(a')' = a$.

البرهان : سوف نبرهن (أ) ونترك برهان (ب) للقارئ.

لاحظ أنه في الزمرة G يكون

$$(a*b)*(b'*a') = a*(b*b')*a'$$

$$= (a*e)*a'$$

$$= a*a' = e$$

كذلك

$$(b'*a')*(a*b)=b'*(a'*a)*b$$
$$=(b'*e)*b$$
$$=b'*b=e$$

ومن تعريف المعكوس ومن كونه وحيدا نحصل على $(a*b)'=b'*a'$.

الزمر المنتهية وجدول الزمرة Finite groups and group table

حيث أن الزمرة غير خالية فإنها تحتوي على الأقل عنصر واحد، وهو العنصر المحايد، لذلك فإن أقل مجموعة يمكن أن تشكل زمرة تكون هي المجموعة ذات عنصر واحد $\{e\}$. العملية الثنائية على $\{e\}$ تعرف بالصورة $e*e=e$. مسلمات الزمرة الثلاث تكون محققة.

الآن نحاول وضع بنية لزمرة على مجموعة من عنصرين. حيث أن أحد العنصرين يجب أن يلعب دور العنصر المحايد، نفرض أن المجموعة هي $\{e,a\}$. نحاول وضع جدول للعملية الثنائية $*$ على $\{e,a\}$. عندما نعطي جدول لعملية الزمرة فإننا دائما نكتب العنصر المحايد أولا كما في الجدول التالي

$*$	e	a
e		
a		

حيث e هي العنصر المحايد. لذلك

$e*x=x*e=x$ لكل $x\in\{e,a\}$.

إذن إكمال الجدول يكون بطريقة وحيدة كما يلي، إذا كانت $*$ بحيث تعطي زمرة:

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

باعتبار هذا المثال كخلفية، يمكننا سرد بعض الشروط الضرورية لكي يكون الجدول المعطى لعملية ثنائية على مجموعة منتهية يعطي بنية زمرة على هذه المجموعة. أولا يجب أن يوجد عنصر في المجموعة، والذي يمثل العنصر المحايد، ونرمز له بالرمز e ويؤثر كعنصر محايد. شرط الإغلاق يعني أن جميع عناصر الجدول تكون هي نفس عناصر المجموعة. الشرط $e*x=x$ يعني أن الصف المقابل للعنصر e في الجدول سوف يحتوي نفس العناصر التي تظهر في الصف أعلى الجدول بنفس الترتيب. بالمثل، الشرط $x*e=x$ يعني أن العمود أسفل e في الجدول يحتوي نفس العناصر التي تظهر على يسار الجدول بنفس الترتيب. حقيقة أن كل عنصر a له معكوس تعني أن الصف الذي يحتوي a في أيسر الصف يجب أن تظهر فيه e والعمود أسفل a التي في أعلى الجدول يجب أن يظهر فيه العنصر e . لذلك e يجب أن تظهر في كل صف وفي كل عمود. من نظرية ٤-٥ ليس فقط المعادلتان $a*x=e$ و $y*a=e$ كل منهما لها حل وحيد ولكن كذلك المعادلتان $a*x=b$ و $y*a=b$. هذا يعني أن كل عنصر b في الزمرة

يجب أن يظهر مرة واحدة وواحدة فقط في كل صف وفي كل عمود في الجدول.

وعلى العكس، إذا أعطينا جدول لعملية ثنائية على مجموعة منتهية بحيث يوجد عنصر يؤثر كعنصر محايد وفي كل صف وكل عمود يظهر كل عنصر من عناصر المجموعة على وجه التحديد مرة واحدة فإنه يمكن بيان أن الجدول يكون بنية زمرة إذا وفقط إذا تحقق قانون الدمج.

رموز ومصطلحات

من المناسب الآن توضيح بعض المصطلحات والرموز المستخدمة في نظرية الزمر. المشتغلون بالجبر لا يستخدمون على وجه القطع رمز خاص * للدلالة على عملية ثنائية تختلف عن تلك المستخدمة للضرب والجمع العاديتين. إنهم يستخدمون رمز الضرب أو رمز الجمع ويسمون العملية ضرب أو جمع حسب الرمز المستخدم. الرمز الطبيعي للجمع هو " + " وعادة الضرب العادي يكتب بتجاور المضروبين بدون نقطة بينهما إذا لم يكن هناك لبس. لذلك بدلا عن كتابة $a*b$ سوف نستخدم إما $a+b$ لنقرأ مجموع a و b أو ab ونقرأ حاصل ضرب a و b. عادة الرمز "+" سوف يستخدم فقط للدلالة على العملية الابدالية. حيث أن الجبريون يشعرون بعدم الارتياح عندما يقال أن $a+b \neq b+a$. لهذا السبب عندما تكون العملية يحتمل أن تكون غير إبدالية فإننا سوف نستخدم رمز الضرب. عادة الرمز 0 يستخدم للدلالة على العنصر

المحايد الجمعي والرمز 1 للدلالة على العنصر المحايد الضربي. في حالة التعامل مع مجموعة الأعداد الصحيحة قد يحدث بعض اللبس ، في هذه الحالة قد نستخدم الرمز e أو u للدلالة على العناصر المحايدة.

من المناسب أن نرمز لمعكوس العنصر a في الزمرة G بالرمز a^{-1} في حالة الضرب والرمز $-a$ في حالة الجمع. من الآن فصاعدا سوف نستخدم تلك الرموز بدلا عن a' .

نفرض n عدد صحيح موجب. إذا كان a عنصر في الزمرة G فإن حاصل الضرب $aaa..a$ ، n مرة، سوف يرمز له بالرمز a^n . نفرض أن a^0 هو العنصر المحايد e ونرمز للضرب $a^{-1}a^{-1}a^{-1}..a^{-1}$ ، n مرة، بالرمز a^{-n} . يمكن بسهولة بيان أن $a^m a^n = a^{m+n}$ لأي $m,n \in \mathbb{Z}$. في حالة الجمع سوف نرمز للمجموع $a+a+...+a$ ، n مرة، بالرمز na ونرمز للمجموع $(-a)+(-a)+...+(-a)$ ، n مرة، بالرمز $-na$. ونفرض أن $0a$ هو العنصر المحايد. ننتبه أنه في الرمز na ، العدد n يكون في $\mathbb{Z}$ وليس في G .

تعريف ٤-٨. إذا كانت G زمرة فإن رتبة G order ، ويرمز لها بالرمز $|G|$ أو $o(G)$ ، هي عدد عناصر G . وتسمى الزمرة منتهية أو لانهائية حسب كون رتبتها منتهية أو لانهائية.

تمارين ٤

في التمارين ١ – ٦ حدد ما إذا كانت العملية * المعطاة تكون زمرة. إذا لم تكن زمرة بين أي المسلمات لا تتحقق.

١. نفرض * معرفة على $\mathbb{Z}$ بالصورة $a*b=ab$.

٢. نفرض * معرفة على $2\mathbb{Z}=\{2n:n\in\mathbb{Z}\}$ بالصورة $a*b=a+b$.

٣. نفرض * معرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بالصورة $a*b=\sqrt{ab}$.

٤. نفرض * معرفة على $\mathbb{Q}$ بالصورة $a*b=ab$.

٥. نفرض * معرفة على $\mathbb{R}^{*}$ (مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر) بالصورة $a*b=\frac{a}{b}$.

٦. نفرض * معرفة على $\mathbb{C}$ بالصورة $a*b=|ab|$ (حيث $|a|$ هو مقياس العدد المركب a).

في التمارين ٧ – ١٤ حدد ما إذا كانت مجموعة المصفوفات المعطاة مع العملية المحددة تكون زمرة :

٧. مجموعة كل المصفوفات القطرية من درجة $n\times n$ مع عملية جمع المصفوفات.

٨. مجموعة كل المصفوفات القطرية من درجة $n\times n$ مع عملية ضرب المصفوفات.

٩. مجموعة كل المصفوفات القطرية من درجة $n \times n$ والتي جميع عناصر القطر فيها غير صفرية مع عملية ضرب المصفوفات.

١٠. مجموعة كل المصفوفات القطرية من درجة $n \times n$ والتي جميع عناصر القطر فيها 1 أو 1- مع عملية ضرب المصفوفات.

١١. مجموعة كل المصفوفات المثلثية العلوية من درجة $n \times n$ مع عملية ضرب المصفوفات.

١٢. مجموعة كل المصفوفات المثلثية العلوية من درجة $n \times n$ مع عملية جمع المصفوفات.

١٣. مجموعة كل المصفوفات المثلثية العلوية من درجة $n \times n$ والتي محددها يساوي 1 مع عملية ضرب المصفوفات.

١٤. مجموعة كل المصفوفات من درجة $n \times n$ والتي محددها يساوي 1 أو 1- مع عملية ضرب المصفوفات.

١٥. نفرض S مجموعة الأعداد الحقيقية عدا (1-). نعرف العملية * على S بالصورة $a*b=a+b+ab$

(أ) بين أن * تكون عملية ثنائية على S.

(ب) بين أن $(S,*)$ تكون زمرة.

(جـ) أوجد حل للمعادلة $2*x*3=7$ في S.

١٦. اعتبر المسلمات $\mathfrak{G}_1$ ، $\mathfrak{G}_2$ ، $\mathfrak{G}_3$ للزمرة. سوف نضع هذه المسلمات مرتبة بالصورة $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$. الاحتمالات الأخرى الممكنة لترتيب هذه المسلمات هي $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_1$، $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ ، $\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_1$ ،

$\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1\mathbf{G}_3$ ، $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_3\mathbf{G}_2$. من بين هذه الصور الست الممكنة للترتيب توجد ثلاث مقبولة منطقيا للتعريف. ما هي الصور غير المقبولة ؟ ولماذا؟

١٧. أعط جدول لعملية ثنائية على المجموعة $\{e,a,b\}$ من ثلاثة عناصر تحقق المسلمات $\mathbf{G}_2$ و $\mathbf{G}_3$ ولا تحقق $\mathbf{G}_1$.

١٨. بين أنه إذا كانت G زمرة منتهية بعنصر محايد e وعدد عناصرها زوجي فإنه يوجد $a \neq e$ في G بحيث $a*a=e$.

١٩. نفرض * عملية ثنائية على مجموعة S ، العنصر $x \in S$ يسمى خامل idempotent بالنسبة للعملية * إذا كان $x*x=x$.
برهن على أن أي زمرة يوجد بها تحديدا عنصر خامل واحد.

٢٠. نفرض G زمرة عنصرها المحايد e بحيث $x*x=e$ لكل $x \in G$. بين أن G تكون إبدالية.

٢١. نفرض G زمرة إبدالية ونفرض $C^n = \underbrace{c*c*\ldots*c}_{n \text{ مرة}}$ حيث $c \in G$ و $n \in \mathbb{Z}^+$. استخدم الاستنتاج الرياضي في إثبات أن $(a*b)^n = a^n * b^n$ لكل $a,b \in G$

٢٢. نفرض G زمرة بها عدد منتهي من العناصر. بين أنه لأي $a \in G$ يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $a^n = e$ حيث e هو العنصر المحايد في G.

٢٣. بين أنه إذا كان لأي عنصرين a,b في الزمرة G ، $(a*b)^2 = a^2 * b^2$ فإن $a*b = b*a$.

٢٤. نفرض G زمرة ونفرض $a,b \in G$. بين أن $(a*b)' = a' * b'$ إذا وفقط إذا كان $a*b = b*a$.

٢٥. بين أن أي زمرة منتهية بها على الأكثر أربعة عناصر تكون إبدالية.

٢٦- نفرض زمرة فيها $(a \cdot b)^i = a^i \cdot b^i$ لثلاث أعداد صحيحة متوالية i لكل $a,b \in G$. بين أن G تكون إبدالية.

٢٧- بين أن النتيجة في تمرين ٢٦ تكون غير صحيحة إذا كانت العلاقة $(a \cdot b)^i = a^i \cdot b^i$ تتحقق فقط لعددين صحيحين متوالين.

٢٨- نفرض G مجموعة غير خالية مغلقة بالنسبة لعملية دامجة وتحقق

(أ) يوجد $e \in G$ بحيث $a \cdot e = a$ لكل $a \in G$.

(ب) إذا كان $a \in G$ فإنه يوجد عنصر $y_a \in G$ بحيث $a \cdot y_a = e$.

أثبت أن G يجب أن تكون زمرة مع هذه العملية.

٢٩- نفرض G مجموعة منتهية مغلقة بالنسبة لعملية دامجة ونفرض أن قوانين الحذف محققة في G. برهن أن G تكون زمرة.

٣٠- نفرض G هي مجموعة كل المصفوفات الحقيقية من درجة 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بحيث $ad - bc \neq 0$ عدد كسري. برهن أن G تكون زمرة مع عملية ضرب المصفوفات.