الفصل الثالث
الرواسم والعمليات الثنائية
Mappings and binary operations

الرواسم Mappings

الآن نحن بصدد تعريف مفهوم الراسم من مجموعة إلى أخرى. وبدون مبالغة يمكننا القول بأن هذا المفهوم يعتبر من أهم المفاهيم الأساسية وأكثرها شيوعا في جميع فروع الرياضيات.

تعريف ٣-١. نفرض X و Y مجموعتان غير خاليتان. الراسم mapping من X إلى Y هو مجموعة جزئية φ من $X \times Y$ بحيث لكل $x \in X$ يوجد عنصر وحيد $y \in Y$ بحيث أن الثنائي المرتب (x, y) ينتمي إلى φ. للتعبير عن هذا الراسم نكتب $\varphi : X \to Y$ ونعبر عن $(x, y) \in \varphi$ بالصورة $\varphi(x) = y$. y تسمى صورة image x تحت تأثير φ. المجموعة X تسمى نطاق (مجال) domain φ والمجموعة Y تسمى النطاق المصاحب (المجال المصاحب) codomain. مدى φ range هو المجموعة $\varphi(X) = \{\varphi(x) : x \in X\}$. واضح أن مدى الراسم يكون مجموعة جزئية من نطاقه المصاحب.

وللتعبير عن الرواسم نستخدم الرموز $f, g, h, \ldots$ وهكذا.

يقال أن الراسمان $f:X\to Y$ و $g:Z\to W$ متساويان ونكتب $f=g$ إذا كان $Z=X$ ، $W=Y$ و $f(x)=g(x)$ لكل $x\in X$.

تعريف ٣-٢. الراسم $f:X\to Y$ يسمى

١- راسم أحادي injective أو $1-1$ إذا كان $x_1\neq x_2$ يؤدي إلى $f(x_1)\neq f(x_2)$. وبصورة مكافئة، إذا كان $f(x_1)=f(x_2)$ يؤدي إلى $x_1=x_2$.

٢- راسم فوقي surjective أو onto إذا كان $f(X)=Y$ أي إذا كان النطاق المصاحب يساوي المدى للراسم. أو بتعبير آخر إذا كان لكل $y\in Y$ يوجد $x\in X$ بحيث $f(x)=y$.

٣- راسم تناظر أحادي bijective أو correspondence $1-1$ إذا كان أحادي وفوقي.

تعريف٣-٣. المجموعتان X و Y يقال أن لهما نفس العدد الكارديناليsame cardinality إذا وجد راسم أحادي من X فوقي إلى Y. بمعنى إذا وجد راسم تناظر أحادي من X إلى Y.

مثال ٣-٤. الراسم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بالصورة $f(x)=x^2$ ليس أحادي حيث أن $f(2)=4=f(-2)$. أيضا هذا الراسم ليس فوقي لأن $-2\in\mathbb{R}$ ولكن لا يوجد أي عنصر $x\in\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=-2$.

مثال ٣-٥ . الراسم $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ المعرف بالصورة $f(x)=2x$ أحادي ولكنه ليس فوقي.

تعريف ٣-٦. نعتبر الراسمين $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ حيث X,Y,Z مجموعات غير خالية. تحصيل composition الراسمين f و g (ويسمى أيضا حاصل ضربهما) هو الراسم $g\circ f:X\to Z$ المعرف بالعلاقة $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ لكل $x\in X$.

لاحظ أنه في رمز تحصيل الرواسم يكون الترتيب بحيث أن التأثير يكون من اليمين إلى اليسار . في $g\circ f$ ، f يؤثر أولا. نلاحظ أيضا أنه لكي يمكن تعريف الراسم $g\circ f$ يجب أن يكون مدى f مجموعة جزئية من نطاق g .

نظرية ٣-٧. تحصيل راسمان أحاديان يكون راسم أحادي وتحصيل راسمان فوقيان يكون راسم فوقي.

البرهان: نفرض $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ راسمان. سوف نبرهن حالة الأحادي ونترك حالة الفوقي كتدريب للقارئ. نفرض أن الراسمان أحاديان. ونفرض أن $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$ حيث $x,y\in X$. إذن من تعريف تحصيل الرواسم يكون $g(f(x))=g(f(y))$. وحيث أن g راسم أحادي فيكون $f(x)=f(y)$. ولكن f أيضا راسم أحادي، إذن $x=y$ وبذلك يكون $g\circ f$ راسم أحادي.

نتيجة ٣-٨. من النظرية السابقة نستنتج أن تحصيل راسمين كل منهما تناظر أحادي يكون أيضا راسم تناظر أحادي.

تعريف ٣-٩. نفرض X مجموعة غير خالية. الراسم $i : X \to X$ حيث $i(x) = x$ لكل $x \in X$ يسمى راسم الوحدة identity mapping أو راسم التطابق.

إذا كانت $A \subset X$ فإن الراسم $i : A \to X$ ، حيث $i(x) = x$ لكل $x \in A$ يسمى راسم الاحتواء inclusion لـ A في X .

نفرض f راسم تناظر أحادي من X إلى Y. لكل $y \in Y$ يوجد $x \in X$ بحيث $f(x) = y$ لأن f فوقي. و لأن f أحادي فإن هذا العنصر x يكون وحيدا. نعرف الراسم $f^{-1} : Y \to X$ بالصورة $f^{-1}(y) = x$ إذا وفقط إذا كان $y = f(x)$. الراسم f^{-1} يسمى معكوس الراسم f inverse .

الآن نحسب الراسم المركب $f^{-1} \circ f$ والذي يرسم X فوقيا إلى نفسها. نفرض $x \in X$ ونفرض أن $y = f(x)$. إذن من تعريف f^{-1} يكون $x = f^{-1}(y)$.

لذلك $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

وهذا يبين أن $f^{-1} \circ f$ هو راسم الوحدة على X .

بالمثل يمكن إثبات أن $f \circ f^{-1}$ هو راسم الوحدة على Y .

من جهة أخرى نفرض الراسم $f:X\to Y$ بحيث يوجد راسم $g:Y\to X$ له الخاصية أن $f\circ g$ و $g\circ f$ يكون راسم الوحدة على Y و X على الترتيب. سوف نبين أن f يكون تناظر أحادي.

نفرض أن $y\in Y$ ، إذن $(f\circ g)(y)=f(g(y))=y$ لأن $f\circ g$ راسم الوحدة على Y. إذن y هو صورة العنصر $g(y)$ في X تحت تأثير f. إذن f يكون فوقي. لبيان أن f أحادي نفرض أن $f(x_1)=f(x_2)$ حيث $x_1,x_2\in X$. إذن

$$x_1=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))$$
$$=g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2)=x_2$$

حيث أن $g\circ f$ راسم الوحدة على X.

من المناقشة السابقة نكون قد أثبتنا النتيجة التالية:

نظرية ٣-١٠. الراسم $f:X\to Y$ يكون تناظر أحادي إذا وفقط إذا كان يوجد راسم $g:Y\to X$ بحيث يكون $g\circ f$ هو راسم الوحدة على X و $f\circ g$ هو راسم الوحدة على Y .

العمليات الثنائية Binary operations

في مراحل التعليم قبل الجامعي درسنا في الحساب جمع وضرب الأعداد. والفكرة في ذلك أن جمع الأعداد ما هي إلا قاعدة نستخدمها لتمكننا من تعيين، لكل عددين بترتيب معين ،عدد آخر يسمى مجموع

العددين، وكذلك الحال بالنسبة للضرب. والآن نعطي تعميما لهذه الفكرة فيما يسمى بالعمليات الثنائية على مجموعة.

تعريف ٣-١١. نفرض S مجموعة غير خالية. الراسم $*:S\times S\to S$ المعرف بالصورة $(x,y)\to x*y$ لكل $(x,y)\in S\times S$ يسمى عملية ثنائية على S.

أي أن $*$ تعين لكل ثنائي (x,y) في S عنصر وحيد $*(x,y)=x*y\in S$.

مثال ٣-١٢.

(أ) الراسم $+:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $(x,y)\to x+y$ يكون عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة وهي عملية الجمع.

(ب) الراسم $\cdot:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $(x,y)\to xy$ يكون عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة وهي عملية الضرب.

(جـ) الراسم $\div:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $(x,y)\to\frac{x}{y}$ لا يكون عملية ثنائية على مجموعة الأعداد الصحيحة حيث أن ناتج قسمة عددين صحيحين ليس بالضرورة أن يكون عددا صحيحا.

تعريف ٣-١٣. نفرض $*$ عملية ثنائية على S ونفرض H مجموعة جزئية من S. إذن H تكون مغلقة بالنسبة للعملية $*$ إذا كان لكل $a,b\in H$ يكون $a*b\in H$. في هذه الحالة العملية الثنائية على

H والتي نحصل عليها بتقييد $*$ على H تسمى العملية المولدة من $*$ على H.

مثال ٣-١٤. نفرض عمليتا الجمع والضرب على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ونفرض $H=\{n^2 : n\in\mathbb{Z}^+\}$. واضح أن H تكون مغلقة بالنسبة لعملية الضرب ولكنها ليست مغلقة بالنسبة لعملية الجمع حيث أن $1,4\in H$ ولكن $1+4=5\notin H$.

تعريف ٣-١٥. العملية الثنائية $*$ على المجموعة غير الخالية S تسمى

١- دامجة associative إذا كانت تحقق قانون الدمج $(a*b)*c=a*(b*c)$ لكل $a,b,c\in S$.

٢- إبدالية commutative إذا كان $a*b=b*a$ لكل $a,b\in S$.

نظرية ٣-١٦. نفرض X,Y,Z,W مجموعات غير خالية ونعتبر الرواسم $f:X\to Y$ ، $g:Y\to Z$ و $h:Z\to W$. إذن $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ ، أي أن عملية تحصيل (ضرب) الرواسم تكون دامجة.

البرهان: واضح أن كلا من $(h\circ g)\circ f$ و $h\circ(g\circ f)$ لهما نفس النطاق X ونفس النطاق المصاحب Z.

نفرض $x\in X$. من تعريف تحصيل الرواسم نحصل على

$$h\circ(g\circ f)(x)=h\circ(g(f(x))=h(g(f(x))$$

كذلك $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$

إذن $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$ لكل $x \in X$.

إذن $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

الجداول Tables

بالنسبة للمجموعات المنتهية، العملية الثنائية على المجموعة يمكن تعريفها عن طريق جدول يسمى جدول العملية حيث تكتب عناصر المجموعة كرؤوس لأعمدة الجدول وتكتب على يسار الجدول كرؤوس للصفوف وينبغي أن تكتب العناصر أعلى الجدول وعلى يساره بنفس الترتيب.

مثال٣-١٧ نفرض $S = \{0,1,2,3,4\}$ و $\oplus : S \times S \to S$ معرفة كما يلي:

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y & \text{if } x + y < 5 \\ x + y - 5 & \text{if } x + y \geq 5 \end{cases}$$

إذن $\oplus$ تكون عملية ثنائية على S ويمكن تمثيل هذه العملية عن طريق الجدول التالي

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

واضح أن $\oplus$ إبدالية. وبصفة عامة يمكننا بسهولة ملاحظة أن العملية الثنائية المعرفة بجدول تكون إبدالية إذا وفقط إذا كانت عناصر الجدول الداخلية متماثلة بالنسبة لقطر الجدول الرئيسي الذي يبدأ من الركن الأيسر من أعلى وينتهي بالركن الأيمن من أسفل.

البنى الجبرية Algebraic structures

نفرض X مجموعة معرف عليها عملية ثنائية $*$. إذن الثنائي $(X,*)$ يسمى بنية جبرية ثنائية binary algebraic structure.

تعريف ٣-١٨ نفرض $(S,*)$ و $(S',*')$ بنيتان جبريتان ثنائيتان. نقول أن $(S,*)$ و $(S',*')$ متماثلتان isomorphic إذا وجد راسم تناظر أحادي $\varphi:S\to S'$ بحيث يكون $\varphi(x*y)=\varphi(x)*'\varphi(y)$ لكل $x,y\in S$.

مثال ٣-١٩ نفرض $2\mathbb{Z}=\{2n:n\in\mathbb{Z}\}$ هي مجموعة كل الأعداد الصحيحة الزوجية. البنية الثنائية $(\mathbb{Z},+)$ والبنية الثنائية $(2\mathbb{Z},+)$ متماثلتان. لبيان ذلك نعرف الراسم $\phi:\mathbb{Z}\to 2\mathbb{Z}$ بالصورة $\phi(n)=2n$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.

واضح أن ϕ أحادي وفوقي وبالتالي تناظر أحادي.

أيضا لأي $m,n\in\mathbb{Z}$ يكون

$$\phi(m+n)=2(m+n)=2m+2n=\phi(m)+\phi(n)$$

وهذا يبين أن ϕ تماثل بين $\mathbb{Z}$ و $2\mathbb{Z}$.

تعريف ٣-٢٠. نفرض * عملية ثنائية معرفة على المجموعة غير الخالية S.

العنصر $e \in S$ يسمى عنصر محايد identity element للعملية * إذا كان

$$e * s = s * e = s \quad \text{لكل} \quad s \in S$$

العنصر $x' \in S$ يسمى معكوس inverse العنصر $x \in S$ إذا كان

$x * x' = x' * x = e$ حيث e هو العنصر المحايد في S.

نظرية ٣-٢١. إذا كان $(S,*)$ بنية ثنائية فإنه يوجد لها على الأكثر عنصر محايد واحد. أي أن العنصر المحايد إذا وجد فإنه يكون وحيدا.

البرهان: نفرض أن $e, \bar{e}$ عنصران محايدان في S. باعتبار e عنصر محايد يكون $e * \bar{e} = \bar{e}$ وباعتبار $\bar{e}$ عنصرا محايدا يكون $e * \bar{e} = e$. إذن $e = \bar{e}$.

تمارين ٣

١- نفرض $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,4,6\}$. لكل علاقة بين A و B معطاة كمجموعة جزئية من $A\times B$ بين هل هي راسم من A إلى B أم لا. إذا كانت راسم بين هل هو أحادي وهل هو فوقي؟

(أ) $\{(1,4),(2,6),(3,4)\}$.

(ب) $\{(1,6),(1,2),(1,4)\}$.

(جـ) $\{(1,4),(2,4),(3,6)\}$.

(د) $\{(2,2),(1,6),(3,4)\}$.

(هـ) $\{(1,6),(2,6),(3,6)\}$.

(و) $\{(1,2),(2,6),(2,4)\}$.

٢- في الحالات الآتية نعتبر الراسم $f:S\to T$ حدد ما إذا كان f أحادي ، فوقي ثم حدد الصور العكسية لكل عنصر $t\in T$ تحت تأثير f.

(أ) S مجموعة الأعداد الحقيقية، T مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة، $f(s)=s^2$.

(ب) S مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة، T مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة، $f(s)=s^2$.

(جـ) S مجموعة الأعداد الصحيحة، T مجموعة الأعداد الصحيحة ، $f(s)=s^2$.

(د) S مجموعة الأعداد الصحيحة ، T مجموعة الأعداد الصحيحة ، $f(s)=2s$.

٣- بين ما إذا كانت العملية الثنائية إبدالية أو دامجة فيما يلي:

(أ) * معرفة على $\mathbb{Z}$ بالصورة $a*b=a-b$.

(ب) * معرفة على $\mathbb{Q}$ بالصورة $a*b=ab+1$.

(جـ) * معرفة على $\mathbb{Q}$ بالصورة $a*b=ab/2$.

(د) * معرفة على $\mathbb{Z}^+$ بالصورة $a*b=2^{ab}$.

(هـ) * معرفة على $\mathbb{Z}^+$ بالصورة $a*b=a^b$.

٤- بين هل تعريف * يعطي عملية ثنائية على المجموعة أم لا في مايلي:

(أ) نعرف * على $\mathbb{Z}^+$ بالصورة $a*b=a-b$.

(ب) نعرف * على $\mathbb{Z}^+$ بالصورة $a*b=a^b$.

(جـ) نعرف * على $\mathbb{R}$ بالصورة $a*b=a-b$.

٥- أثبت أنه إذا كانت * عملية ثنائية إبدالية ودامجة على مجموعة S فإن $(a*b)*(c*d)=[(d*c)*a]*b$ لكل $a,b,c,d\in S$.

٦- أثبت صحة أو أعط مثال عكسي لعدم صحة العبارة التالية:

(أ) كل عملية ثنائية على مجموعة مكونة من عنصر واحد تكون إبدالية ودامجة.

(ب) كل عملية ثنائية إبدالية على مجموعة بها عنصرين فقط تكون دامجة.

٧- حدد ما إذ كان الراسم ϕ المعطى تماثل للبنية الثنائية الأولى مع البنية الثنائية الثانية. إذا كان ليس تماثل وضح لماذا؟

(أ) $(\mathbb{Z},+)$ مع $(\mathbb{Z},+)$ حيث $\phi(n)=-n$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.

(ب) $(\mathbb{Z},+)$ مع $(\mathbb{Z},+)$ حيث $\phi(n)=2n$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.

(جـ) $(\mathbb{Z},+)$ مع $(\mathbb{Z},+)$ حيث $\phi(n)=n+1$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.

(د) $(\mathbb{Q},+)$ مع $(\mathbb{Q},+)$ حيث $\phi(x)=x/2$ لكل $x\in\mathbb{Q}$.

(هـ) $(\mathbb{Q},\cdot)$ مع $(\mathbb{Q},\cdot)$ حيث $\phi(x)=x^2$ لكل $x\in\mathbb{Q}$.

(و) $(\mathbb{R},\cdot)$ مع $(\mathbb{R},\cdot)$ حيث $\phi(x)=x^3$ لكل $x\in\mathbb{R}$.