القسم الأول

مفاهيم أساسية

Fundamentals

مقدمة

في هذا القسم نقدم المفاهيم والخواص الأساسية التي سوف نستخدمها في هذا الكتاب. في الفصل الأول قدمنا المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات والعلاقات الثنائية وركزنا على علاقة التكافؤ وفصول التكافؤ نظرا لأهميتها. بعد ذلك في الفصل الثاني كان الحديث عن الأعداد الصحيحة وبعض المفاهيم والخواص المتعلقة بها وأعطينا مبدأ الاستنتاج الأول والثاني والنظرية الأساسية في الحساب وخوارزمية القسمة وأنهينا هذا الفصل بعلاقة تكافؤ مهمة وهي علاقة ائتلاف الأعداد الصحيحة والتي تعتبر مصدريا غنيا بالأمثلة في نظرية الزمر. الفصل الثالث خصص لتعريف الراسم وأنواع الرواسم ومعكوس الراسم والعمليات الثنائية وأنواعها وأثبتنا أن عملية تحصيل الرواسم هي عملية دامجة. أنهينا هذا الفصل بتعريف المقصود بما يسمى بالبنى الجبرية وجدول العملية وتماثل البنى الجبرية.

الفصل الأول

المجموعات والعلاقات

Sets and Relations

الكثير من الدارسين لا يقدرون أهمية التعريفات في الرياضيات. هذه الأهمية تظهر من حاجة الرياضيون إلى التواصل مع بعضهم البعض. فإذا أراد شخصان التواصل حول موضوع معين فلابد من أن يكون لديهما نفس الفهم لمفردات المصطلحات الخاصة بهذا الموضوع. ومع هذا فهناك أمر لابد من الاتفاق عليه وهو أنه لا يمكن تعريف كل مفهوم. فعلى سبيل المثال إذا أردنا تعريف كلمة " مجموعة " set على أنها " تجمع من الأشياء المعرفة جيدا " فسوف ينشأ سؤال عن معنى كلمة " تجمع ". فإن قلنا معناها " تكتل "، فسوف نسأل أيضا عن معنى كلمة تكتل ولن ننتهي. وحيث أن مفردات اللغة منتهية فإننا سوف نعود مرة أخرى إلى ما بدأنا به. إذن لابد من الاتفاق على أن هناك بعض المفاهيم الأولية التي بها نبدأ دون تعريف. و "المجموعة" واحدة من تلك المفاهيم الأولية التي نبدأ بها.

الآن نوضح بعض الأشياء التي سوف نستخدمها عن المجموعات. تتألف المجموعة من عناصر elements . وإذا كان a واحد من هذه العناصر فإننا نرمز لهذه الحقيقة بالصورة $a \in S$ وتقرأ a عنصر في S أو a تنتمي إلى S. بنفس الفكرة $a \notin S$ ، تقرأ a لا تنتمي إلى

S، إذا كانت a ليست من عناصر S. المجموعة التي ليس بها عناصر تسمى بالمجموعة الخالية empty set ويرمز لها بالرمز ϕ .

نفرض A و B مجموعتان. نقول أن A مجموعة جزئية من B أو B تحتوي A ونعبر عن ذلك بالصورة $A \subset B$ أو $B \supset A$ إذا كانت جميع عناصر A تنتمي إلى B . إذا كانت المجموعتان لهما نفس العناصر فيقال أنهما متساويتان ونكتب $A = B$. نلاحظ أن $A \subset B$ لا تستبعد أن يكون $A = B$. واضح أن $A = B$ إذا وفقط إذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$. إذا كانت $A \subset B$ ولكن $A \neq B$ في هذه الحالة نقول أن A مجموعة جزئية خالصة من B proper subset of .

واضح أن المجموعة الخالية تكون مجموعة جزئية من أي مجموعة. نرمز عادة للمجموعة بالحروف الكبيرة $A, B, C,\ldots$ ولعناصرها بالحروف الصغيرة $a, b, c, \ldots$.

للتعبير عن المجموعة سوف نستخدم إما طريقة الوصف أو طريقة السرد. طريقة الوصف كقولنا مثلا مجموعة الأعداد الحقيقية و مجموعة الأعداد الصحيحة وهكذا أو نكتب

$$A = \{x : \text{تحقق شروط معينة } x\}$$

وأما طريقة السرد فتستخدم إذا كان ذلك ممكنا مثل

$$A = \{1,2,3,4,\ldots,100\}$$

مثال ١-١. نفرض $A = \{a,b,c,d,e,f\}$. واضح أن $\phi \subset A$ ، $\{a,b\} \subset A$ ، $\{c\} \subset A$ ، $g \notin A$ و $c \in A$.

خلال دراستنا في هذا الكتاب سوف نستخدم بعض الرموز القياسية التي تدل على بعض المجموعات الخاصة من الأعداد:

$\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة.

$\mathbb{Q}$ هي مجموعة الأعداد الكسرية (النسبية).

$\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

$\mathbb{C}$ هي مجموعة الأعداد المركبة.

$\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Q}^+$ ، $\mathbb{R}^+$ هي مجموعات العناصر الموجبة في $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ على الترتيب.

$\mathbb{Z}^*$، $\mathbb{Q}^*$ ، $\mathbb{R}^*$ ، $\mathbb{C}^*$ هي مجموعات العناصر غير الصفرية في $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ على الترتيب.

عند كتابة المجموعة بطريقة سرد عناصرها فإننا لا نكرر كتابة أي عنصر. وإذا كانت المجموعة تحتوي عدد منتهي من العناصر فإنها تسمى مجموعة منتهية finite set وإذا كان عدد عناصرها لا نهائي سميت مجموعة لا نهائية infinite set . واضح أن المجموعات $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{C}$ كلها لا نهائية بينما المجموعة $\{1,2,3,4\}$ منتهية وعدد عناصرها 4 . غالبا نرمز لعدد عناصر المجموعة A بالرمز $|A|$ أو $o(A)$.

العمليات على المجموعات.

إذا كان لدينا مجموعتان أو أكثر فإنه يمكن تكوين مجموعات جديدة من هذه المجموعات عن طريق ما يسمى بالعمليات علي

المجموعات مثل الاتحاد والتقاطع والفرق والمكملة والضرب الكارتيزي.

تعريف ١-٢. نفرض A و B مجموعتان

١- إتحاد union المجموعتان A و B ، ويرمز له بالرمز $A \cup B$، هو المجموعة التي تحتوي كل عناصر A وكل عناصر B. أي أن

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

هنا كلمة or (أو) تعني أن x تكون محتواه في واحدة على الأقل من المجموعتين.

٢- تقاطع intersection المجموعتان A و B ، ويرمز له بالرمز $A \cap B$ ، هو المجموعة التي تحتوي كل العناصر المشتركة في A و B . أي أن

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

نقول أن المجموعتان A و B منفصلتان أو غير متقاطعتان disjoint إذا كان تقاطعهما هو المجموعة الخالية، أي إذا كان $A \cap B = \phi$.

٣- الفرق difference ، ويرمز له بالرمز $A \setminus B$ ، هو المجموعة التي تحتوي عناصر A التي لا تكون محتواه في B . أي أن

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

٤- إذا كانت $A \subset B$ فإن مكملة complement A في B ويرمز لها بالرمز $B \setminus A$ هي مجموعة عناصر B التي لا تكون محتواه في A ، أي أن

$$B \setminus A = \{x : x \in B \text{ and } x \notin A\}$$

إذا كان لدينا مجموعة ما U بحيث أن كل المجموعات التي نتعامل معها هي مجموعة جزئية من هذه المجموعة، فإن المجموعة U تسمى بالمجموعة الشاملة universal set . فعند التعامل مع مجموعات من الأعداد، على سبيل المثال، فإن المجموعة الشاملة في هذه الحالة تكون هي $\mathbb{C}$. وإذا كان التعامل مقصورا على مجموعات من الأعداد الحقيقية فإن المجموعة الشاملة في هذه الحالة تكون هي $\mathbb{R}$ ، وهكذا.

إذا كانت U هي المجموعة الشاملة وكانت A مجموعة جزئية من U فإن مكملة A في U هي ($U \setminus A$) يرمز لها أحيانا بالرمز A^c .
واضح أنه في هذه الحالة $A \cup A^c = U$ و $A \cap A^c = \phi$.

٥- حاصل الضرب الكارتيزي Cartesian product للمجموعتين A و B ويرمز له بالرمز $A \times B$ هو مجموعة كل الثنائيات المرتبة ordered pairs (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$ ، أي أن

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ and } b \in B\}$$

هنا (a,b) يسمى ثنائي (زوج) مرتب لأنه يتكون من عنصرين ولأن الترتيب معتبر حيث أن (b,a) ليست هي (a,b). لاحظ أن $(a,b) = (c,d)$ إذا وفقط إذا كان $a = c$ و $b = d$.

مثال ١-٣. نفرض $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$ و $C = \{2,3,4\}$.

إذن $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

بينما $A \cap B = \{4,5,6\}$ ، كذلك $A \setminus B = \{1,2,3\}$.

واضح أن $C \subset A$. إذن $A \setminus C = \{1,5,6\}$.

لأي مجموعة A نرمز لتجمع كل المجموعات الجزئية من A بالرمز $P(A)$. المجموعة $P(A)$ تسمى مجموعة القوة للمجموعة A the power set.

العلاقات الثنائية Binary relations.

نفرض A و B مجموعتان غير خاليتان. المجموعة الجزئية R من حاصل الضرب الكارتيزي $A \times B$ تسمى علاقة من A إلى B.

الآن نعتبر حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعة A مع نفسها، أي $A \times A$. نلاحظ أنه إذا كانت A مجموعة منتهية عدد عناصرها n فإن $A \times A$ تكون أيضا مجموعو منتهية وعدد عناصرها n^2 . مجموعة العناصر (a,a) في $A \times A$ تسمى قطر $A \times A$ diagonal.

المجموعة الجزئية R من $A \times A$ يقال أنها تعرف علاقة تكافؤ equivalence relation على A إذا تحققت الخواص التالية:

١- $(a,a) \in R$ لكل $a \in A$. وهنا نقول أن R علاقة عاكسة reflexive .

٢- $(a,b) \in R$ يؤدي إلى $(b,a) \in R$. وهنا نقول أن R علاقة متماثلة symmetric .

٣- $(a,b),(b,c)\in R$ يؤدي إلى $(a,c)\in R$. وهنا نقول أن R علاقة متعدية (أو ناقلة) transitive .

عادة نستخدم الرمز aRb لنقصد به أن $(a,b)\in R$.

إذا كانت R علاقة تكافؤ على المجموعة A وكان $a\in A$ فإن المجموعة $[a]=\{x\in A : aRx\}$ تسمى فصل تكافؤ equivalence class العنصر a . أحيانا نستخدم الرمز $\bar{a}$ أو $c(a)$ للدلالة على فصل التكافؤ.

مثال ١-٤. نفرض $\mathbb{Z}$ مجموعة كل الأعداد الصحيحة. لكل $a,b\in\mathbb{Z}$ نعرف العلاقة R على $\mathbb{Z}$ كما يلي:

$aRb \Leftrightarrow a-b$ يكون عدد زوجي

يمكن التحقق بسهولة من أن هذه تكون علاقة تكافؤ.

واضح أن فصول التكافؤ هي

$[1]=\{\pm1,\pm3,\pm5,\pm7,\dots\}$, $[2]=\{0,\pm2,\pm4,\pm6,\pm8,\dots\}$.

تعريف١-٥. التجزيء partition للمجموعة غير الخالية A هو تجمع من المجموعات الجزئية من A بحيث كل عنصر من A يكون محتوى في واحدة فقط من هذه المجموعات الجزئية والتي يسمى كل منها خلية cell. بتعبير آخر التجمع $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$، حيث $A_i\subset A$ لكل $i=1,2,\dots,n$ ، يسمى تجزيء للمجموعة غير الخالية A إذا تحقق الشرطان

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ و (ii) $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$.

نظرية ١-٦. نفرض R علاقة تكافؤ على المجموعة غير الخالية A.

إذن

(أ) لأي عنصر $a \in A$ يكون $a \in [a]$.

(ب) $aRb \iff [a]=[b]$.

(جـ) $[a]\neq[b] \Rightarrow [a]\cap[b]=\phi$.

البرهان: (أ) بما أن R علاقة تكافؤ على A ، إذن لكل $a \in A$ يكون aRa . إذن $a \in [a]$.

(ب) نفرض أن aRb والمطلوب إثبات أن $[a]=[b]$. نفرض $x \in [a]$. إذن aRx وهذا يؤدي إلى xRa . وحيث أن R علاقة تكافؤ و aRb ، إذن

$$xRa, aRb \Rightarrow xRb \Rightarrow bRx \Rightarrow x \in [b]\ .$$

إذن $[a] \subset [b]$.

بالمثل يمكن إثبات أن $[b] \subset [a]$.

إذن $[a]=[b]$.

من جهة أخرى إذا كان $[a]=[b]$ فإن

$$b \in [b] \Rightarrow b \in [a] \Rightarrow aRb \Rightarrow (a,b) \in R\ .$$

(جـ) سوف نبرهن أنه إذا كان $[a]\cap[b]\neq\phi$ فإن $[a]=[b]$.

نفرض أن $[a]\cap[b]\neq\phi$. إذن يوجد عنصر $x\in A$ بحيث $x\in[a]\cap[b]$. إذن aRx و bRx. إذن

$aRx, bRx \Rightarrow aRx, xRb \Rightarrow aRb \Rightarrow [a]=[b]$.

من نظرية ١-٦ نستنتج أن فصول التكافؤ تكون تجزيئا للمجموعة A أي أنه عن طريق علاقة تكافؤ على مجموعة ما يمكن تعريف تجزيء لهذه المجموعة. النظرية التالية توضح لنا أن العكس أيضا يكون صحيحا أي أنه عن طريق تجزيء لمجموعة ما يمكن تعريف علاقة تكافؤ على هذه المجموعة.

نظرية ١-٧. أي تجزيء للمجموعة غير الخالية A يعرف عليها علاقة تكافؤ وتكون خلايا التجزيء هي فصول التكافؤ لهذه العلاقة.

البرهان: نفرض $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ تجزيئا للمجموعة A. نعرف العلاقة R على A كما يلي: لكل $a,b\in A$ ، aRb إذا وفقط إذا كان يوجد A_i بحيث $a,b\in A_i$.

سوف نبرهن على أن R علاقة تكافؤ.

بما أن $A=\bigcup_r A_r$ ، لأي $a\in A$ يوجد A_i بحيث $a\in A_i$. إذن aRa وتكون R عاكسة.

واضح من التعريف أن R تكون متماثلة.

الآن نفرض أن aRb و bRc. إذن يوجد A_i و A_j بحيث يكون $a,b\in A_i$ و $b,c\in A_j$. إذن $b\in A_i\cap A_j$. وحيث أن خلايا

التجزيء المختلفة غير متقاطعة فيكون $A_i = A_j$ ومن ثم $a,c \in A_i$

وهذا يعني أن aRc وتكون R متعدية وبالتالي تكون علاقة تكافؤ.

لإثبات أن عناصر التجزيء $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ تكون هي فصول

التكافؤ، سوف نبرهن على أنه إذا كان $a \in A_i$ فإن $[a] = A_i$.

لكل $a \in A$ يوجد A_i بحيث $a \in A_i$. نفرض $x \in A_i$. إذن xRa .

إذن $x \in [a]$. إذن $A_i \subset [a]$.

الآن نفرض $y \in [a]$. إذن aRy وبالتالي yRa وهذا يعني أنه

يوجد A_j بحيث $y, a \in A_j$ ومن ثم $A_i \cap A_j \neq \phi$. إذن

$A_i = A_j$ ومنها $y \in A_i$. إذن $[a] \subset A_i$. وهذا يكمل البرهان.

تمارين ١

في التمارين ١-٤ صف المجموعة المعطاة بكتابة كل عناصرها:

١- $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$.   ٢- $\{m \in \mathbb{Z} : m^2 = 3\}$.

٣- $\{m \in \mathbb{Z} : mn = 60 \text{ for some } n \in \mathbb{Z}\}$.

٤- $\{m \in \mathbb{Z} : m^2 - m < 115\}$.

في التمارين ٥-٩ قرر ما إذا كان الشيء المعطى يعرف مجموعة (تعريفا جيدا). أعط وصف بديل للمجموعة:

٥- { $n \in \mathbb{Z}^+$ حيث n عدد كبير }.

٦- $\{n \in \mathbb{Z} : 39 < n^3 < 57\}$.

٧- $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 < 0\}$.

٨- { $n \in \mathbb{Q}$ حيث x غالبا عدد صحيح}.

٩- أكتب عناصر مجموعة القوة للمجموعة المعطاة فيما يلي:

(أ) ϕ.   (ب) $\{a\}$.   (جـ) $\{a,b\}$.   (د) $\{a,b,c\}$.

١٠- فيما يلي بين ما إذا كانت العلاقة المعطاة علاقة تكافؤ:

(أ) nRm في $\mathbb{Z}$ إذا كان $mn > 0$.

(ب) xRy في $\mathbb{R}$ إذا كان $x \geq y$.

(جـ) xRy في $\mathbb{R}$ إذا كان $|x| = |y|$.

(د) xRy في $\mathbb{R}$ إذا كان $|x - y| \leq 3$.