

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي جعل العلم النافع طريقاً موصلاً لرضاه، وصرافاً يتبعه من أراد هداه، ويحيد عنه من ضل واتبع هواه، ومن أضل ممن اتبع هواه بغير هدى من الله، وأشهد أن لا إله إلا الله رفع شأن العلم وأهله حتى وصلوا من المجد منتهاه، ومن العز أعلى ذراه، فمن سلك طريقاً يبتغي فيه علماً؛ سهل الله له به طريقاً إلى جنته وعلاه، وأشهد أن محمداً عبده ورسوله الرحمة المهداة، والنعمة المسداة، صلى الله عليه وعلى آله وأصحابه الهداة النقاة، ومن سار على نهجه إلى يوم لقاءه.

أما بعد فهذا كتاب مقدمة في الجبر المجرّد أقدمه للمكتبة العربية حسبه لله وخدمة لأبنائي الدارسين إسهاماً مني في تبسيط تدريس العلوم الحديثة وخاصة المجرّدة منها.

الجبر كلمة عربية وهو فرع من علم الرياضيات وجاء اسمه من كتاب (المختصر في حساب الجبر والمقابلة) الذي قدمه عالم الرياضيات والفلك المسلم محمد بن موسى الخوارزمي الذي قدم العمليات الجبرية التي تنظم إيجاد حلول للمعادلات الخطية والتربيعية. ويشكل علم الجبر أحد الفروع الثلاثة الأساسية في الرياضيات إضافة إلى الهندسة الرياضية والتحليل الرياضي ونظرية الأعداد والتباديل والتوافيق. ويهتم هذا العلم بدراسة البنى الجبرية والتماثلات بينها والعلاقات والكميات.

الجبر المجرد حقل رياضي يهتم بدراسة البنى الجبرية مثل الزمر والحلقات والحقول. تعبير الجبر المجرد يستعمل حالياً لتمييز هذا الحقل عن "الجبر الأولي"، الذي يعلم القواعد الصحيحة لمعالجة الصيغ والتعابير الجبرية التي تتضمن أعداداً حقيقية ومركبة، ومجهولة. في نفس الوقت يشكل الجبر الأولي مقدمة لتقديم مفاهيم بعض البنى الجبرية مثل الحقل الحقيقي والجبر التبادلي. كان الجبر المجرد أحياناً في النصف الأول من القرن العشرين معروفاً باسم الجبر الحديث.

تعبير الجبر المجرد يستعمل أحياناً في الجبر العام في حين يستعمل أكثر المؤلفين ببساطة تعبير "جبر".

ظهرت معظم التراكيب الجبرية أولاً في حقول أخرى من الرياضيات، ثم حددت كفرضيات ودرست في الجبر المجرد. لهذا السبب، للجبر المجرد ارتباطات مثمرة عديدة مع كل الفروع الأخرى من الرياضيات والفيزياء.

وقد سمي الجبر المجرد بهذا الاسم لأن فيه تتم دراسة البنى الجبرية كالزمر والحلقات والحقول، و الفراغات الاتجاهية الذي تمثل عصب دراسة الجبر الخطي. ويتم بعد ذلك في الجبر المجرد، عملية تجريد للعملية الحسابية فيستعاض عن الأعداد برموز تدعى في الجبر متغيرات أو عناصر لمجموعة ما. عندئذ تصبح عمليات الجمع والضرب مجرد أمثلة على المؤثرات الجبرية و العمليات الجبرية الثانية.

وضع هذا الكتاب لكي يغطي مقرر نظرية الزمر والحلقات والحقول في المرحلة الجامعية الأولى على مدى فصل دراسي أو فصلين دراسيين. ويتكون من ثلاثة أقسام موزعة على واحد وعشرون فصلاً. القسم الأول يتكون من ثلاثة فصول وفيه تم تقديم المفاهيم والمصطلحات والخواص الأساسية في كل من المجموعات، العلاقات الثنائية، الأعداد الصحيحة، الرواسم والعمليات الثنائية والتي سوف يتعرض لها الدارس خلال هذا الكتاب. حيث تم تقديم تعريف المجموعة وبعض العمليات عليها والعلاقات الثنائية على مجموعة وأنواعها وتم التركيز على علاقة التكافؤ وفصول التكافؤ. كما تم إعطاء بعض الخواص الأساسية للأعداد الصحيحة ومبدأ الاستنتاج الرياضي ومبدأ أصغر عنصر والنظرية الأساسية للحساب و خوارزمية القسمة والخوارزمية الإقليدية التي يتم بها حساب القاسم المشترك الأكبر لعددتين صحيحين. كذلك تم عرض تعريف الرواسم وأنواع الرواسم وتعريف العمليات الثنائية وخواصها، خاصة عملية تحصيل الرواسم وخاصية الدمج لهذه العملية. وفي نهاية هذا الجزء تعرضنا لمفهوم البنية الجبرية وجدول العملية الثنائية على مجموعة منتهية.

نظرية الزمر هي موضوع الحديث في القسم الثاني من هذا الكتاب والذي يتكون من تسعة فصول. بدأ هذا القسم بتعريف الزمرة وإعطاء أمثلة للزمر والخواص الأساسية للزمرة. بعد ذلك تم تقديم مفهوم الزمرة الجزئية والزمرة الجزئية الدائرية وخواصها ثم مفهوم

التشاكل والتماثل بين الزمر. كذلك تم تقديم زمرة التباديل وزمر التماثلات للأشكال الهندسية المنتظمة والمجموعات المصاحبة ونظرية لاجرانج والتي تلعب دورا أساسيا في نظرية الزمر المنتهية. أيضا تمت دراسة نوع خاص من الزمر الجزئية وهو الزمر الجزئية القياسية والتي تم استخدامها في تكوين زمرة القواسم. تعرضنا كذلك لنظريات التماثل الثلاث. كما تم دراسة علاقة الترافق على زمرة وبيان أنها علاقة تكافؤ واستخدام فصول الترافق لإثبات ما يسمى بمعادلة الفصول للزمرة. في الفصل قبل الأخير من هذا القسم تم التعرض لنظريات سيلو والتي تحتل مكانة هامة في دراسة الزمر المنتهية حيث أنها تساعد في تحديد طبيعة الزمر الجزئية من زمرة برتبة معينة. الحصول على زمرة جديدة من زمر معطاة عن طريق ما يسمى بالضرب المباشر تم التعرض له في نهاية هذا القسم.

القسم الثالث الذي يتألف من تسعة فصول اختص بدراسة نظرية الحلقات والحقول. بدأ هذا الجزء بتعريف الحلقة وأنواع الحلقات وأمثلة عليها والخواص الأساسية لها كما تم تقديم مثال من أشهر الأمثلة على الحلقات وهو حلقة كثيرات الحدود على حلقة. انتقل الحديث بعد ذلك إلى التشاكل والتماثل بين الحلقات وخواصها وكمثال هام عليها تماثل القيمة لحلقة كثيرات الحدود. أيضا تعرضنا بالدراسة والتحليل للمثاليات وأنواعها من المثالي الأساسي والمثالي الأعظم والمثالي الأولي والعمليات على المثاليات من جمع وضرب واتحاد وتقاطع واستخدمنا المثالي في تعريف حلقة القواسم لحلقة. بعد ذلك

تعرضنا لعملية توسيع الحلقة إلى حقل عن طريق إيجاد حقل القواسم لنطاق صحيح وكمثال حقل القواسم لحلقة كثيرات الحدود وقدّمنا نظرية الكسور الجزئية في حقل قواسم كثيرات الحدود. أيضا تعرضنا للحلقة الإقليدية وأثبتنا أن كل حلقة إقليدية تكون نطاق مثالي أساسي وأن حلقة كثيرات الحدود على حقل تكون حلقة إقليدية. في الفصل قبل الأخير قدّمنا تعريف الفراغات الاتجاهية ومفهوم الاستقلال الخطي والاساس والبعء وذلك لحاجتنا لها في الفصل التالي عند دراسة حقول التوسيع. الفصل الحادي والعشرون هو الفصل الأخير في هذا الكتاب وقد اختص هذا الفصل بدراسة الحقول، والهدف من هذه الدراسة هو إيجاد حقول تحتوي جذور لأي كثيرة حدود معطاة وذلك بإضافة مايسمى بالأعداد الجبرية إلى حقل معطى لنحصل على حقل التوسيع. حاولنا تضمين هذا الكتاب بكثير من الأمثلة على كل تعريف حتى يتضح مفهوم التعريف وفي نهاية كل فصل أوردنا عددا من التمارين التي نقيس مدى فهم الطالب للمحتوى العلمي له. وقد وضعنا حلولا لبعض التمارين الواردة في هذا الكتاب في ملحق خاص لكي يرجع إليها القارئ إذا وجد في ذلك ضرورة.

خلال عرض المادة العلمية حاولنا عرضها بصورة مبسطة ووضعنا بجوار كل مصطلح علمي ترجمته باللغة الانجليزية عند وروده للمرة الأولى لكي يتعرف عليه القارئ وحتى لا يكون هناك غموض في معنى المصطلح خاصة مع تعدد الترجمات.

في نهاية الكتاب أوردنا قائمة المراجع التي اعتمد عليها المؤلف في صياغة المحتوى العلمي للكتاب.

ونظرا لطول الكتاب إذا طبع في جزء واحد وتيسيرا على أبناءنا الدارسين فقد فضلنا طباعة على جزأين، جزء يختص بنظرية الزمر والجزء الثاني يختص بنظرية الحلقات والحقول بالإضافة إلى ملحق خاص بحلول التمارين.

وفي الختام أسأل الله العظيم أن يتقبل هذا العمل وأن يجعله خالصا لوجهه الكريم وأن يكون نافعا ومفيدا لأبنائنا الدارسين كما أسأله سبحانه وتعالى التوفيق لهم، ونطلب الدعاء من كل من يقرأ في هذا الكتاب.

المؤلف

فتحي هشام خضر

أبريل ٢٠١٣م