الفصل الثاني عشر

الضرب المباشر

والزمر الابدالية المنتهية المولدة

Direct Products

and finite generated abelian groups

دعونا نتوقف لحظة لمراجعة مخزوننا الحالي من الزمر. بدءا من الزمر المنتهية ، لدينا الزمرة الدائرية $\mathbb{Z}_n$ والزمرة المتماثلة S_n والزمرة التبادلية A_n لكل عدد صحيح موجب n. أيضا لدينا زمرة الأزواج النونية D_n وزمرة كلاين الرباعية V. بالطبع نعلم أنه توجد زمر جزئية لهذه الزمر. بالانتقال إلى الحالة اللانهائية لدينا زمر تتكون من الأعداد مع عملية الجمع العادية أو الضرب العادية مثل $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{C}$ وعناصرها غير الصفرية مع الضرب. لدينا أيضا S_A، زمرة كل التبديلات على المجموعة اللانهائية A . كما لدينا العديد من الزمر التي تتشكل من المصفوفات. الهدف من هذا الجزء هو إعطاء طريقة لاستخدام زمر معروفة كلبنات لبناء زمر جديدة.

الضرب المباشر direct product

نفرض A و B زمرتان. نعتبر الضرب الكارتيزي $G = A \times B$ للزمرتين A و B ، حيث $G = A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$.

والسؤال الآن هل يمكننا تعريف عملية على G بحيث تكون G مع هذه العملية زمرة؟ نحاول في عملية ضرب المركبات. أي أن لكل $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in G$ نعرف $(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(a_1a_2,b_1b_2)$.

الضرب a_1a_2 هو العملية A والضرب b_1b_2 هو العملية في B .

وحيث أن $(a_1a_2,b_1b_2)\in G$ لأن $a_1a_2\in A$ و $b_1b_2\in A$ ، إذن العملية تكون مغلقة على G.

الآن نبرهن أن G مع هذه العملية تكون زمرة.

<u>العملية دامجة</u>: نفرض $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)\in G$. إذن

$$[(a_1,b_1)(a_2,b_2)](a_3,b_3)=(a_1a_2,b_1b_2)(a_3,b_3)$$
$$=((a_1a_2)a_3,(b_1b_2)b_3=(a_1(a_2a_3),b_1(b_2b_3))$$
$$=(a_1,b_1)[(a_2,b_2)(a_3,b_3)]$$

إذن العملية تكون دامجة.

<u>العنصر المحايد</u>: نفرض e هو العنصر المحايد في A و f العنصر المحايد في B. إذن $(e,f)\in G$.

الآن $(a,b)(e,f)=(ae,bf)=(a,b)$.

كذلك $(e,f)(a,b)=(ea,fb)=(a,b)$.

إذن (e,f) هو العنصر المحايد في G.

<u>المعكوس</u>: نفرض $(a,b)\in G$ ، إذن $a\in A$ و $b\in B$. حيث A و B زمر، إذن يوجد a^{-1} معكوس العنصر a في A ويوجد b^{-1}

معكوس العنصر b في B. إذن $(a^{-1},b^{-1})\in G$. الآن

$(a^{-1},b^{-1})(a,b)=(a^{-1}a,bb^{-1})=(e,f)$.

كذلك $(a,b)(a^{-1},b^{-1})=(aa^{-1},bb^{-1})=(e,f)$.

إذن (a^{-1},b^{-1}) هو معكوس العنصر (a,b).

إذن $G=A\times B$ تكون زمرة مع هذه العملية. هذه الزمرة تسمى الضرب المباشر الخارجي للزمرتين A و B external direct product.

الآن نعتبر $\overline{A}=\{(a,f):a\in A\}\subset A\times B=G$ حيث f هو العنصر المحايد في B. من الواضح أن طريقة تكوين $\overline{A}$ يجعلنا نتوقع أن يكون هناك علاقة بين A و $\overline{A}$. في الواقع $\overline{A}$ تكون زمرة جزئية من G متماثلة مع A. لإثبات ذلك نعرف الراسم $\phi:A\to\overline{A}$ بالصورة $\phi(a)=(a,f)$ لكل $a\in A$. واضح أن هذا الراسم أحادي وفوقي وبالتالي تناظر أحادي. كذلك هذا الراسم يكون تشاكل لأن

$\phi(ab)=(ab,f)=(ab,ff)=(a,f)(b,f)=\phi(a)\phi(b)$.

إذن ϕ يكون تماثل.

الآن نفرض $(a,f)\in\overline{A}$ و $(a_1,b_1)\in G$.

إذن $(a_1,b_1)(a,f)(a_1,b_1)^{-1}=(a_1,b_1)(a,f)(a_1^{-1},b_1^{-1})$

$=(a_1aa_1^{-1},b_1fb_1^{-1})=(a_1aa_1^{-1},f)\in\overline{A}$

لذلك $\overline{A}$ تكون زمرة جزئية قياسية من G. لذلك يكون لدينا صورة $\overline{A}$ متماثلة مع A في G.

مافعلنا مع A يمكن تطبيقه مع B لنحصل على $\overline{B}$ صورة متماثلة مع B في G. حيث $\overline{B}=\{(e,b)\in G : b\in B\}$ حيث e هو العنصر المحايد في A.

الآن
$$\overline{A}\,\overline{B}=\{(a,f)(e,b) : a\in A, b\in B\}$$
$$=\{(ae,fb) : a\in A, b\in B\}$$
$$=\{(a,b) : a\in A, b\in B\}=G$$

أي أنــه أمكـن تكـوين G بـصورة أخـرى كحاصـل ضـرب زمـرتين جزنيتين قياسيتين من G.

في الحالة الأولى تم تشكيل G تشكيلا خارجيا، حيث أن زمرتـان لـيس بينهما علاقة ومنها نشأت G. أما الصورة الثانية فنجد أنـه تـم تـشكيل G تشكيلا داخليا حيث $\overline{A}$ و $\overline{B}$ زمرتـان جزنيتـان قياسيتان من G ، A متماثلة مع $\overline{A}$ و B متماثلة مع $\overline{B}$.

إذن أوضحنا الآن أن $G=\overline{A}\,\overline{B}$ وكل $g\in G$ يمكن تمثيلها تمثيلا وحيدا على الصورة $g=\bar{a}\bar{b}$ حيث $\bar{a}\in\overline{A}$ و $\bar{b}\in\overline{B}$. حيث إذا كـان $g=(a,b)=(a,f)(e,b)$ ، حيــث $(a,f)\in\overline{A}$ و $(e,b)\in\overline{B}$ فــإن $g=\bar{a}\bar{b}$ حيث $\bar{a}=(a,f)$ و $\bar{b}=(e,b)$. ولبيان أن هذا التمثيل وحيد نفـرض $(a,b)=\overline{x}\,\overline{y}$ حيــث $\overline{x}\in\overline{A}$ و $\overline{y}\in\overline{B}$. إذن $\overline{x}=(x,f)$ و

$\overline{y}=(e,y)$ حيث e هو العنصر المحايد في A و f هو العنصر المحايد في B. إذن $\overline{x}\,\overline{y}=(x,f)(e,y)=(x,y)$. إذن $x=a$ و $y=b$. إذن $\overline{x}=\overline{a}$ و $\overline{y}=\overline{b}$.

الآن استطعنا تكوين G كحاصل ضرب زمرتين جزئيتين قياسيتين $\overline{A}$ و $\overline{B}$ من G وكل عنصر $g\in G$ له تمثيل وحيد في الصورة $g=\overline{a}\overline{b}$ حيث $\overline{a}\in\overline{A}$ و $\overline{b}\in\overline{B}$. الآن ننتقل إلى حاصل ضرب عدد n من الزمر حيث $n>1$.

نفرض $G_1,G_2,\ldots,G_n$ n زمرة. نفرض

$$G=G_1\times G_2\times\ldots\times G_n=\{(g_1,g_2,\ldots,g_n):g_i\in G_i\}$$

حيث $i=1,2,\ldots,n$ ، مجموعة كل النونيات المرتبة، أي حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعات $G_1,G_2,\ldots,G_n$. نعرف الضرب على G بالصورة

$$(g_1,g_2,\ldots,g_n)(g_1',g_2',\ldots,g_n')=(g_1g_1',g_2g_2',\ldots,g_ng_n')$$

بمعنى ضرب المركبات المتناظرة. الضرب في المركبة رقم i مأخوذ على الزمرة G_i. إذن G تكون زمرة حيث $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ هو العنصر المحايد حيث e_i هو العنصر المحايد في G_i. كذلك $(g_1,g_2,\ldots,g_n)^{-1}=(g_1^{-1},g_2^{-1},\ldots,g_n^{-1})$.

هذه الزمرة تسمى الضرب الخارجي المباشر للزمر $G_1,G_2,...,G_n$.

نفرض

$$\overline{G_i}=\{(e_1,e_2,...,e_{i-1},g_i,e_{i+1},...,e_n):g_i\in G_i\}\ .$$

إذن $\overline{G_i}$ تكون زمرة جزئية قياسية متماثلة مع G_i.

علاوة على ذلك $G=\overline{G_1}\,\overline{G_2}...\overline{G_n}$ وكل عنصر $g\in G$ له تمثيل وحيد على الصورة $g=\overline{g_1}\,\overline{g_2}...\overline{g_n}$ حيث $\overline{g_i}\in\overline{G_i}$.

هنا كما في حالة $A\times B$ تم تكوين G كحاصل ضرب داخلي مباشر لزمر جزئية $\overline{G_1},\overline{G_2},....,\overline{G_n}$ بطريقة بحيث كل عنصر يكون له تمثيل وحيد كحاصل ضرب العناصر $\overline{g_1},\overline{g_2},....,\overline{g_n}$ حيث $\overline{g_i}\in\overline{G_i}$ لكل $i=1,2,...,n$.

تعريف ١٢-١. نفرض G زمرة و $N_1,N_2,...,N_n$ زمر جزئية قياسية من G بحيث

١- $G=N_1N_2...N_n$.

٢- إذا كان $g\in G$ فإن $g=m_1m_2...m_n$ حيث $m_i\in N_i$ بصورة وحيدة.

إذن نقول أن G هي حاصل الضرب الداخلي المباشر internal direct product للزمر $N_1,N_2,...,N_n$.

الآن نفرض أن G هي الضرب الداخلي المباشر للمجموعات الجزئية القياسية $N_1,N_2,\ldots,N_n$. حيث أن $N_1,N_2,\ldots,N_n$ يمكن النظر إليها باعتبارها زمر دون النظر إليها على أنها جزئية قياسية من G فإنه يكون من الممكن تكوين الزمرة $T = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n$ الضرب الخارجي المباشر للزمر $N_1,N_2,\ldots,N_n$. هنا أحسب أن القارئ سوف يتوقع أن هناك علاقة ما بين كل من T و G. في الواقع هدفنا الآن هو إثبات أن T و G متماثلتان. إذا حدث هذا فيكون من الأحرى حذف كلمة داخلي وخارجي والاكتفاء بالحديث عن الضرب المباشر direct product.

تمهيدية ١٢-٢. نفرض G هي الضرب الداخلي المباشر للزمر الجزئية $N_1,N_2,\ldots,N_n$. إذن لكل $i \neq j$ يكون $N_i \cap N_j = \{e\}$ وإذا كان $a \in N_i$ و $b \in N_j$ فإن $ab = ba$.

البرهان: نفرض $x \in N_i \cap N_j$. إذن يمكن كتابة x على الصورة $x = e_1 .. e_{i-1} x e_{i+1} .. e_n$ حيث $e_i = e$ وباعتبار x عنصر في N_i. بالمثل يمكن كتابة x على الصورة $x = e_1 .. e_i .. e_{j-1} x e_{j+1} .. e_n$ $e_i = e$ وباعتبار x عنصر في N_j. ولكن كل عنصر، وعلى وجه الخصوص x ، له تمثيل وحيد في الصورة $m_1 m_2 \ldots m_n$ حيث

$m_i \in N_i$ لكل $i=1,2,...,n$. إذن من تساوي التمثيلين للعنصر x نحصل على $x=e$ ويكون $N_i \cap N_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$.

الآن نفرض $a \in N_i$ و $b \in N_j$. إذن $aba^{-1} \in N_j$ لأن N_j زمرة جزئية قياسية . لذلك $aba^{-1}b^{-1} \in N_j$.

بالمثل حيث أن $a^{-1} \in N_i$ و $ba^{-1}b^{-1} \in N_i$ فإن $aba^{-1}b^{-1} \in N_i$.

إذن $aba^{-1}b^{-1} \in N_i \cap N_j$.

ولكن $N_i \cap N_j = \{e\}$، إذن $aba^{-1}b^{-1} = e$.

ومنها نحصل على $ab = ba$.

ينبغي التنبيه هنا على أنه إذا كانت $K_1, K_2, ..., K_n$ زمر جزئية قياسية من الزمرة G بحيث $G = K_1 K_2 ... K_n$ و $K_i \cap K_j = \{e\}$ لبعض $i \neq j$ فليس بالضرورة أن تكون G هي الضرب الداخلي المباشر لـ $K_1.K_2....,K_n$ بل يجب أن يكون الشرط $K_i \cap K_j = \{e\}$ لكل $i \neq j$.

نظرية ١٢-٣. نفرض G زمرة ونفرض أن G الضرب الداخلي المباشر لـ $N_1.N_2....,N_n$. نفرض $T = N_1 \times N_2 \times ... \times N_n$. إذن G و T يكونا متماثلان.

البرهان: نعرف $\psi : T \to G$ بالصورة

$\psi((b_1,b_2,...,b_n))=b_1b_2..b_n$ حيث $b_i \in N_i$ لكل $i=1,2,...,n$.

سوف نوضح أن ψ تماثل من T فوقي إلى G.

حيث أن G هو الضرب الداخلي المباشر لـ $N_1,N_2,...,N_n$ فإنه لكل $x \in G$ يكون $x=a_1a_2..a_n$ لبعض $a_i \in N_i$ لكل $i=1,2,...,n$.

ولكن إذن $\psi((a_1,a_2,...,a_n))=a_1a_2..a_n=x$ ويكون ψ راسم فوقي.

من وحداوية التمثيل لكل عنصر من عناصر الضرب فإن الراسم ψ يكون أحادي.

حيث إذا كان $\psi((a_1,a_2,...,a_n))=\psi((c_1,c_2,...,c_n))$

حيث $a_i \in N_i$ و $c_i \in N_i$ لكل $i=1,2,...,n$

فإن $a_1a_2..a_n=c_1c_2..c_n$ ومن وحداوية التمثيل نحصل على $a_i=c_i$ لكل $i=1,2,...,n$.

لإثبات أن هذا الراسم تشاكل نفرض $X=(a_1,a_2,...,a_n)$ و $Y=(b_1,b_2,...,b_n)$ عنصران في T. إذن

$$\psi(XY)=\psi((a_1,a_2,...,a_n)(b_1,b_2,...,b_n))$$

$$\psi(XY)=\psi((a_1b_1,a_2b_2,...,a_nb_n))$$

$$=a_1b_1a_2b_2..a_nb_n$$

ومن تمهيدية ٢-١٢ $a_ib_j=b_ja_i$ لكل $i \neq j$. إذن

$$a_1b_1a_2b_2..a_nb_n = a_1a_2..a_nb_1b_2..b_n$$

إذن
$$\psi(XY) = a_1a_2..a_nb_1b_2..b_n$$
$$= \psi(X)\psi(Y)$$

وهذا يكمل البرهان.

هذه النظرية تبرهن على أمر خاص وهو إذا كانت G متماثلة مع الضرب الخارجي المباشر لزمر معينة G_i فإن G في الحقيقة تكون هي الضرب الداخلي المباشر لزمر $\overline{G_i}$ تكون متماثلة مع G_i. ببساطة نقول أن G هي الضرب المباشر دون ذكر لكلمة داخلي أو خارجي.

في الجزء التالي سوف نرى أن كل زمرة إبدالية منتهية تكون الضرب المباشر من زمر دائرية.

يمكننا استخدام الرمز $\prod_{i=1}^{n} G_i$ للتعبير عن $G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$. وفي حالة كون العملية على كل G_i إبدالية أحيانا نستخدم رمز الجمع للعملية على $\prod_{i=1}^{n} G_i$ ونشير إلى $\prod_{i=1}^{n} G_i$ بالجمع المباشر للزمر G_i. الرمز $\oplus_{i=1}^{n} G_i$ يستخدم أحيانا بديلا عن $\prod_{i=1}^{n} G_i$ وخاصة مع الزمر الإبدالية.

مثال ١٢-٤. نعتبر الزمرة $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ والتي تحتوي $2 \cdot 3 = 6$ عناصر هي

$$(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)$$

سوف نوضح أن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ تكون دائرية. لإثبات ذلك يكفي إيجاد مولد. دعنا نحاول مع $(1,1)$. هنا العمليات في $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ تكتب جمع. لذلك سوف نفعل ذلك مع $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

$$(1,1) = (1,1)$$
$$2(1,1) = (1,1) + (1,1) = (0,2)$$
$$3(1,1) = (1,1) + (1,1) + (1,1) = (1,0)$$
$$4(1,1) = 3(1,1) + (1,1) = (1,0) + (1,1) = (0,1)$$
$$5(1,1) = 4(1,1) + (1,1) = (0,1) + (1,1) = (1,2)$$
$$6(1,1) = 5(1,1) + (1,1) = (1,2) + (1,1) = (0,0)$$

إذن $(1,1)$ تولد كل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. إذن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ تتماثل مع $\mathbb{Z}_6$.

مثال ١٢-٥. نعتبر $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. هذه الزمرة تتكون من تسعة عناصر. سوف نوضح أن $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ليست دائرية. حيث أن الجمع بالمركبات، وحيث أنه في $\mathbb{Z}_3$ كل عنصر يجمع مع نفسه ثلاث مرات ليعطي العنصر المحايد فكذلك يكون الحال بالنسبة إلى $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. لذلك لا يوجد عنصر يولد الزمرة.

بنفس للأسلوب يمكننا إثبات أن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ليست دائرية. لذلك $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ يجب أن تكون متماثلة مع زمرة كلاين الرباعية.

نظرية ١٢-٦. الزمرة $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ تكون دائرية ومتماثلة مع $\mathbb{Z}_{mn}$ إذا وفقط إذا كان $(m,n)=1$.

البرهان: نعتبر الزمرة الجزئية الدائرية من $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ المولدة بالعنصر $(1,1)$. كما هو معلوم رتبة هذه الزمرة الدائرية هي أصغر قوة للعنصر $(1,1)$ تعطي $(0,0)$. هنا نأخذ القوة للعنصر $(1,1)$ برمز الجمع المستخدم بتكرار إضافة $(1,1)$ إلى نفسه. مع عملية جمع المركبات ، المركبة الأولى $1 \in \mathbb{Z}_m$ تعطي 0 بعد مجموع m مرة، $2m$ مرة، وهكذا. المركبة الثانية $1 \in \mathbb{Z}_n$ تعطي 0 بعد مجموع n مرة، $2n$ مرة، وهكذا. لذلك لكي يعطوا 0 في توقيت واحد عدد المجاميع يجب أن يكون مضاعف لكل من m و n. أصغر عدد يكون مضاعف لكل من m و n هو mn إذا وفقط إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين هو 1. في هذه الحالة $(1,1)$ يولد الزمرة الجزئية الدائرية من رتبة mn وهي نفس الزمرة الكلية. هذا يبين أن $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ تكون زمرة دائرية من رتبة mn وبالتالي تتماثل مع $\mathbb{Z}_{mn}$ إذا كان m و n أوليان نسبيا.
الاتجاه العكسي. نفرض أن $\gcd(m,n)=d>1$. إذن $\frac{mn}{d}$ تقبل القسمة على كلا من m و n. إذن لكل $(r,s)\in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ يكون لدينا

$$\underbrace{(r,s)+(r,s)+\ldots+(r,s)}_{\text{مرة } \frac{mn}{d}}=(0,0)$$

إذن لا يوجد أي عنصر (r,s) في $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ يمكن أن يولد كل الزمرة $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. إذن $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ زمرة ليست دائرية وبالتالي لا تكون متماثلة مع $\mathbb{Z}_{mn}$.

هذه النظرية يمكن تعميمها إلى حاصل ضرب أكثر من عاملين.

نتيجة ١٢-٧. الزمرة $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{m_i}$ تكون دائرية ومتماثلة مع $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \ldots m_n}$ إذا وفقط إذا كانت الأعداد m_i بحيث أن $\gcd(m_i, \mathrm{m}_j) = 1$ لكل $i \neq j$ حيث $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

مثال ١٢-٨. النتيجة السابقة تبين لنا أنه إذا كان العدد الصحيح n يمكن كتابته كحاصل ضرب قوى لأعداد أولية مختلفة على الصورة $n = (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} \ldots (p_r)^{n_r}$ فإن $\mathbb{Z}_n$ تكون متماثلة مع $\mathbb{Z}_{(p_1)^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{n_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_r)^{n_r}}$.

وكحالة خاصة $\mathbb{Z}_{72}$ تكون متماثلة مع $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$.

تعريف ١٢-٩. نفرض $r_1 . r_2, \ldots, r_n$ أعداد صحيحة موجبة. المضاعف المشترك الأصغر lcm لهذه الأعداد هو العدد الصحيح الذي يولد الزمرة الدائرية المكونة من كل المضاعفات المشتركة لـ r_i ، بمعنى الزمرة الدائرية لكل الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على كل r_i حيث $i = 1, 2, \ldots, n$.

نظرية ١٢-١٠. نفرض $(a_1,a_2,...,a_n)\in\prod_{i=1}^{n}G_i$. إذا كان a_i من رتبة منتهية r_i في G_i فإن رتبة $(a_1,a_2,...,a_n)$ في $\prod_{i=1}^{n}G_i$ تساوي المضاعف المشترك الأصغر لكل الأعداد r_i.

البرهان: ينتج من تكرار المناقشة الواردة في نظرية ١٢-٦ لقوة $(a_1,a_2,...,a_n)$ التي تعطي $(e_1,e_2,...,e_n)$. القوة يجب أن تكون في نفس الوقت مضاعف r_1 بحيث أن هذه القوة للمركبة الأولى a_1 تعطي e_1 ومضاعف r_2 بحيث أن هذه القوة للمركبة الثانية a_2 تعطي e_2 وهكذا.

مثال ١٢-١١. أوجد رتبة $(8,4,10)$ في $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{60}\times\mathbb{Z}_{24}$:

الحل. حيث أن $\gcd(8,12)=4$ نجد أن 8 من رتبة $\frac{12}{4}=3$ في $\mathbb{Z}_{12}$ بالمثل نجد أن 4 من رتبة 15 في $\mathbb{Z}_{60}$ و 10 من رتبة 12 في $\mathbb{Z}_{24}$. إذن $lcm(3,15,12)$ تكون $3\cdot5\cdot4=60$. لذلك $(8,4,10)$ تكون من رتبة 60 في $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{60}\times\mathbb{Z}_{24}$.

بعض النظريات في الجبر المجرد قد تكون سهلة الفهم والاستعمال على الرغم من أن برهانها قد يكون على درجة عالية من التعقيد وقد يستلزم وقتا طويلا لانجازه. هنا نعطي نظرية من هذا النوع ولن نتعرض لبرهانها.

نظرية ١٢-١٢. (النظرية الأساسية للزمر الابدالية المنتهية المولدة)

Fundamental theorem of finite commutative generated groups

كل زمرة إبدالية منتهية مولدة G تكون متماثلة مع الضرب المباشر لزمر دائرية في الصورة

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$$

حيث p_i أعداد أولية ليس بالضروري مختلفة و r_i أعداد صحيحة موجبة. الضرب المباشر يكون وحيدا ماعدا إمكانية إعادة ترتيب العوامل والتماثل.

مثال ١٢-١٣. أوجد كل الزمر الابدالية (عدا التماثل) من رتبة 360 .

الحل: باستخدام نظرية ١٢-١٢ حيث أن الزمر المطلوبة من رتبة منتهية 360 فإنه لايظهر أي عامل $\mathbb{Z}$ في الضرب المباشر.

أولا نعبر عن 360 كحاصل ضرب قوى أعداد أولية $2^3.3^2.5$.

إذن الاحتمالات الممكنة هي

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$$

إذن توجد 6 صور مختلفة لزمر إبدالية (عدا) التماثل من رتبة 360.

تعريف ١٢-١٤. الزمرة G تسمى قابلة للتحليل decomposable إذا كانت متماثلة مع الضرب المباشر لزمرتين جزئيتين فعليتين غير خاليتين. وإلا فإنها تسمى غير قابلة للتحليل indecomposable.

نظرية ١٢-١٥. الزمر الدائرية المنتهية غير القابلة للتحليل هي على وجه التحديد الزمر الدائرية من رتبة قوة لعدد أولي.

البرهان: نفرض G زمرة إبدالية غير تحليلية. إذن G تكون متماثلة مع الضرب المباشر لزمر دائرية من رتبة قوى أعداد أولية من نظرية ١٢-١٢ وحيث أن G غير تحليلية فإن الضرب المباشر سوف يحتوي فقط على زمرة دائرية واحدة رتبتها من قوة لعدد أولي.

من جهة أخرى نفرض p عدد أولي. إذن $\mathbb{Z}_{p^r}$ تكون غير تحليلية، حيث إذا كانت $\mathbb{Z}_{p^r}$ متماثلة مع $\mathbb{Z}_{p^i} \times \mathbb{Z}_{p^j}$ حيث $i+j=r$ فإن كل عنصر سوف يكون له رتبة على الأكثر $p^{\max(i,j)} < p^r$.

نظرية ١٢-١٦. إذا كان m يقسم رتبة الزمرة الابدالية المنتهية G فإن G يكون لها زمرة جزئية من رتبة m .

البرهان: من نظرية ١٢-١٢ يمكننا التفكير في G على أنها

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}}$$

حيث p_i ليس بالضرورة أن تكون مختلفة. حيث أن $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n}$ هو رتبة G فإن m يجب أن تكون في الصورة $p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_n^{s_n}$ حيث

$0 \le s_i \le r_i$. ${p_i}^{r_i - s_i}$ تكون مولد لزمرة دائرية جزئية من $\mathbb{Z}_{{p_i}^{r_i}}$ من رتبة تساوي خارج قسمة ${p_i}^{r_i}$ على $\gcd({p_i}^{r_i}, {p_i}^{r_i - s_i})$. ولكن $\gcd({p_i}^{r_i}, {p_i}^{r_i - s_i}) = {p_i}^{r_i - s_i}$. لذلك ${p_i}^{r_i - s_i}$ يولد زمرة جزئية دائرية من $\mathbb{Z}_{{p_i}^{r_i}}$ من رتبة $\dfrac{{p_i}^{r_i}}{{p_i}^{r_i - s_i}} = {p_i}^{s_i}$. إذن

$$\left\langle {p_1}^{r_1 - s_1} \right\rangle \times \left\langle {p_2}^{r_2 - s_2} \right\rangle \times \ldots \times \left\langle {p_n}^{r_n - s_n} \right\rangle$$

هي الزمرة الجزئية من رتبة m المطلوبة.

تمارين ١٢

١- أكتب كل عناصر $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$. أوجد رتبة كل عنصر. هل هذه الزمرة دائرية؟

٢- كرر التمرين السابق مع $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_4$.

في التمارين ٣-٧ أوجد رتبة العنصر المعطى في الضرب المباشر

٣- $(2,6)$ في $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{12}$.

٤- $(2,3)$ في $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{15}$.

٥- $(8,10)$ في $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{18}$.

٦- $(3,10,9)$ في $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{15}$.

٧- $(3,6,12,16)$ في $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{20}\times\mathbb{Z}_{24}$.

٨- أوجد كل الزمر الجزئية الفعلية غير التافهة من $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

٩- أوجد كل الزمر الجزئية الفعلية غير التافهة من $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

١٠- أوجد كل الزمر الجزئيى من $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ من رتبة 4.

١١- هل الزمرتان $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{12}$ و $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$ متماثلتان؟ لماذا نعم أولماذا لا؟

١٢- أوجد القيمة العظمى الممكنة لرتبة عنصر في $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{18}\times\mathbb{Z}_{15}$.

١٣- نفرض G زمرة إبدالية من رتبة 72.

(أ) هل يمكن معرفة عدد الزمر الجزئية من رتبة 8 من G؟ لماذا نعم أولماذا لا؟

(ب) هل يمكن معرفة عدد الزمر الجزئية من رتبة 4 من G. لماذا نعم أولماذا لا؟

١٤- نفرض G زمرة إبدالية. بين أن عناصر G من رتبة منتهية تكون زمرة جزئية من G. هذه الزمرة الجزئية تسمى زمرة الالتواء الجزئية من G torsion subgroup.

١٥- أثبت أن الضرب المباشر لزمر إبدالية يكون زمرة إبدالية.

١٦- إعط مثال يوضح أنه ليس كل زمرة إبدالية غير تافهة يمكن أن تكون ضرب مباشر داخلي لزمرتين جزئيتين خالصتين غير تافهتين.

١٧- نفرض G_1 و G_2 زمرتان. بين أن $G_1 \times G_2$ تكون إبدالية إذا وفقط إذا كان G_1 و G_2 إبداليتان.

١٨- نفرض G_1 و G_2 زمرتان دائريتان من رتبة 2 و 3 على الترتيب. بين أن الضرب الخارجي المباشر $G_1 \times G_2$ لهما يكون أيضا زمرة دائرية.

١٩- نفرض G_1 و G_2 زمرتان. بين أن

(i) العنصر المحايد في $G_1 \times G_2$ هو العنصر الوحيد المشترك بين المجموعتين $\{e_1\} \times G_2$ و $G_1 \times \{e_2\}$.

(ii) كل عنصر في $G_1 \times \{e_2\}$ يتبادل مع كل عنصر في $\{e_1\} \times G_2$.

(iii) كل عنصر في $G_1 \times G_2$ يمكن التعبير عنه بصورة وحيدة كحاصل ضرب عنصر من $G_1 \times \{e_2\}$ وعنصر من $\{e_1\} \times G_2$.

٢٠- نفرض G_1 و G_2 زمرتان. بين أن المجموعتان الجزئيتان $\{e_1\} \times G_2$ و $G_1 \times \{e_2\}$ من $G_1 \times G_2$ تكونا زمرتان جزئيتان قياسيتان من $G_1 \times G_2$ ومتماثلتان مع G_2 و G_1 على الترتيب.

٢١- نفرض G أي زمرة ، $H = \{(a,a) : a \in A\}$. بين أن H تكون زمرة جزئية من الضرب الخارجي المباشر $G \times G$. علاوة على ذلك H تكون قياسية إذا وفقط إذا كان G إبدالية.

٢٢- إذا كان $G_1, G_2, \ldots, G_n$ n زمرة فبين أن

$$Z(G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n) = Z(G_1) \times Z(G_2) \times \ldots \times Z(G_n)$$

٢٣- نفرض أن الزمرة G هي الضرب الداخلي المباشر للزمرتين الجزئيتين القياسيتين N_1 و N_2 من G. أثبت أن

(i) $N_1 \cap N_2 = \{e\}$ (ii) $ab = ba$ لكل $a \in N_1$ و $b \in N_2$.

٢٤- نفرض أن الزمرة G هي الضرب الداخلي المباشر للزمرتين الجزئيتين القياسيتين N_1 و N_2 من G. أثبت أن

$G / N_2 \cong N_1$ و $G / N_1 \cong N_2$.

تمارين عامة

على

نظرية الزمر

١- نفرض G زمرة و $a,b \in G$. بين أن $(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}$ لأي عدد صحيح موجب n.

٢- نفرض G هي مجموعة كل الأعداد الكسرية غير الصفرية. نعرف العملية $*$ على G بالصورة $a*b = \frac{ab}{2}$ لكل $a,b \in G$. بين أن $(G,*)$ تكون زمرة.

٣- نفرض G مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي أكبر من 1. نعرف العملية $*$ على G بالصورة $x*y = xy - x - y + 2$ لكل $x,y \in G$. بين أن $(G,*)$ تكون زمرة.(إرشاد: العملية دامجة، العنصر المحايد هو 2 ، معكوس العنصر x هو $\frac{x}{x-1}$ ، واضح أيضا أن العملية مغلقة حيث إذا كان $x > 1$ و $y > 1$ فإن $x*y = xy - x - y + 2 = (y-1)(x-1)+1 > 1$)

٤- فيما يلي بين ما إذا كانت العملية المعطاة مع المجموعة المشار إليها تكون زمرة أم لا. إذا لم تكن زمرة بين أي من الشروط لا يتحقق:

(أ) $*$ معرفة على $\mathbb{Z}$ حيث $a*b = \min\{a,b\}$.

(ب) $*$ معرفة على $\mathbb{Z}^+$ حيث $a*b = \min\{a,b\}$.

(جـ) $*$ معرفة على $\mathbb{Z}^+$ حيث $a*b = \max\{a,b\}$.

(د) * معرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث $x * y = xy + 1$.

(هـ) * معرفة على $\mathbb{R}$ حيث $x * y = x + y - 1$.

(و) * معرفة على $\mathbb{Q}^+$ حيث $x * y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

(ز) عملية ضرب المصفوفات مع المجموعة
$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

(ح) * معرفة على $\mathbb{R}^2$ حيث
$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 x_2 + y_2)$.

٥- أوجد كل الزمر الجزئية الدائرية من $\mathbb{Z}_{12}$.

٦- في زمرة الأعداد المركبة مع عملية الضرب أوجد رتبة كل من العنصرين $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

٧- في الزمرة $G = GL_2(\mathbb{R})$ للمصفوفات المنعكسة من درجة 2×2 والتي جميع عناصرها أعداد حقيقية بين أن
$H = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$ تكون زمرة جزئية من G.

٨- نفرض $K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : d = a, c = -2b, ad - bc \neq 0 \right\}$ مجموعة جزئية من $GL_2(\mathbb{R})$. بين أن K تكون زمرة جزئية من $GL_2(\mathbb{R})$.

٩- في $GL_2(\mathbb{R})$ أحسب منظم normalizer العنصر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

١٠- نفرض G زمرة و $a \in G$ بحيث $a \neq e$ برهن على صحة أو عدم صحة العبارات التالية.

(أ) العنصر a يكون من رتبة 2 إذا وفقط إذا كان $a^2 = e$.

(ب) العنصر a يكون من رتبة 3 إذا وفقط إذا كان $a^3 = e$.

(جـ) العنصر a يكون من رتبة 4 إذا وفقط إذا كان $a^4 = e$.

١١- نفرض $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. هل H زمرة جزئية من $\mathbb{R}^2$.

فيما يلي نعطي جداول تمثل ثلاث زمر مختلفة من رتبة 8 سوف نرجع إلها في بعض التمارين التالية:

جدول رقم (١) الزمرة O

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	ab	a^2b	a^3b	e	a	a^2	a^3
ab	ab	a^2b	a^3b	b	a	a^2	a^3	e
a^2b	a^2b	a^3b	b	ab	a^2	a^3	e	a
a^3b	a^3b	b	ab	a^2b	a^3	e	a	a^2

جدول رقم (٢) الزمرة P

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	e	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	e	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	e	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	e

جدول رقم (٣) الزمرة Q

	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	e	a^3
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	e
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	e	a^3	a^2	a
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a	e	a^3	a^2

١٢- في الزمر O، P و Q في جداول ١-٣ أوجد منظم العناصر a و ab .

١٣-أوجد الزمرة الجزئية الدائرية من S_7 المولدة بالعنصر $(1,2,3)(5,7)$.

١٤- أوجد رتبة العنصر $A=\begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$ في الزمرة $GL_3(\mathbb{C})$.

١٥- نفرض G زمرة جزئية من الزمرة $GL_3(\mathbb{R})$ حيث $G=\left\{\begin{bmatrix} m & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : m \neq 0\right\}$ ونفرض $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. أوجد $N(A)$ منظم A و $N(B)$ منظم B في G وبين أن $N(A) \cap N(B) = Z(G)$.

الحل: نفرض $X=\begin{bmatrix} m & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ تنتمي إلى $N(A)$ في G. لذلك $XA=AX$ ومن ثم $\begin{bmatrix} m & b+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. بمساواة العناصر المتناظرة نحصل على $m=1$ وبالتالي $N(A)=\left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R}\right\}$. بالمثل يمكن إثبات أن $N(B)=\left\{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : 0 \neq m \in \mathbb{R}\right\}$ وهذ يبين أن $N(A) \cap N(B)$ هو مصفوفة الوحدة. وحيث أن أي عنصر في $Z(G)$ يجب أن ينتمي إلى $N(A) \cap N(B)$، ينتج أن $Z(G)$ يجب ان يكون هو الزمرة الجزئية التافهة التي تحتوي فقط العنصر المحايد.

١٦- أحسب منظم العنصر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ في $GL_2(\mathbb{Z}_3)$.

الحل: نفرض $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تنتمي إلى منظم العنصر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$، لذلك $AX=XA$ ومنها يكون $\begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 2c & 2d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 2c & c+2d \end{bmatrix}$. بمساواة العناصر المتناظرة نحصل على $c=0$ و $a=d$. ومن ثم منظم A في $GL_2(\mathbb{Z}_3)$ يكون هو الزمرة الجزئية $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}: a,b\in\mathbb{Z}_3, a\neq 0\right\}$.

١٧- أكتب التبديلة $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 9 & 2 & 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ كحاصل ضرب دورات منفصلة. هل σ تبديلة زوجية؟ أحسب σ^{-1}.

١٨- للتبديلتين $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 3 & 6 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

و $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 3 & 6 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

أكتب كل من التبديلات التالية كحاصل ضرب دورات منفصلة: σ، τ، $\sigma\tau$، $\sigma\tau\sigma^{-1}$، σ^{-1}، τ^{-1}، $\tau\sigma$، $\tau\sigma\tau^{-1}$.

١٩- نفرض $\sigma=(2,4,9,7)(6,4,2,5,9)(1,6)(3,8,6)\in S_9$. أكتب σ كحاصل ضرب دورات منفصلة. أحسب σ^{-1}.

٢٠- نفرض A مجموعة غير خالية و $X\subset A$. نعتبر $G=\{\sigma\in S_A:\sigma(X)=X\}$. برهن على أن G تكون زمرة تبديلات.

٢١- نفرض G تكون زمرة تبديلات حيث $G \subset S_A$ لمجموعة ما A.
نفرض τ تبديلة محددة في S_A. برهن على أن $\tau G \tau^{-1} = \{\sigma \in S_A : \sigma = \tau\gamma\tau^{-1} : \text{for some } \gamma \in G\}$ تكون زمرة تبديلات.

٢٢- نفرض F ترمز إلى مجموعة كل الدوال $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ حيث $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ لكل $z \in \mathbb{C}$ حيث $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ و $ad-bc=1$.
بين أن F تكون زمرة مع عملية تحصيل الدوال.

٢٣- صف عناصر $GL_2(\mathbb{R})$ التي رتبتها تسوي 2.

٢٤- هل $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) : A^2 = I\}$ تكون زمرة جزئية من $GL_2(\mathbb{R})$؟

٢٥- صف عناصر $GL_2(\mathbb{R})$ من رتبة 2 والتي على الصورة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ وبين أنه يوجد عدد لانهائي من هذه العناصر.

٢٦- أحسب منظم العنصر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ في $GL_2(\mathbb{Z}_3)$.

الإجابة: $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0, b \neq 0\right\}$.

٢٧- نفرض H هي المجموعة الجزئية من $G=GL_2(\mathbb{Z}_5)$ حيث

$H=\left\{\begin{bmatrix} m & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}: m,b\in\mathbb{Z}_5, m=\pm 1\right\}$. بين أن H تكون زمرة جزئية من G تحتوي 10 عناصر.

٢٨- نفرض H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة G. برهن على أن HK تكون زمرة جزئية من G إذا وفقط إذا كان $KH\subseteq HK$.

الحل: نفرض HK تكون زمرة جزئية من G . إذا كان $k\in K$ و $h\in H$ فإن $k=ek\in HK$ و $h=he\in HK$. لذلك $kh\in HK$ لأن HK مغلقة بالنسبة للضرب ومن ثم $KH\subseteq HK$. من جهة أخرى نفرض أن $KH\subseteq HK$. واضح أن $e=ee\in HK$. نفرض $g_1,g_2\in HK$ ، لذلك يوجد $h_1,h_2\in H$ و $k_1,k_2\in K$ بحيث $g_1=h_1k_1$ و $g_2=h_2k_2$. الآن $g_1g_2=h_1k_1h_2k_2$ وحيث أن $k_1h_1\in HK$ فإن $k_1h_1=h_2'k_1'$ ومن ثم $g_1g_2=h_1h_2'k_1'k_2\in HK$. إخيرا $g_1^{-1}=(h_1k_1)^{-1}=k_1^{-1}h_1^{-1}HK$ لأن $KH\subseteq HK$.

٢٩- أوجد الزمرة الجزئية الدائرية المولدة بالعنصر $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ في $GL_4(\mathbb{Z}_2)$.

٣٠- نفرض G_1 ، G_2 ، H_1 و H_2 زمر ونفرض $\theta_1:G_1\to H_1$ و $\theta_2:G_2\to H_2$ تماثلان زمريان. نعرف الراسم $\phi:G_1\times G_2\to H_1\times H_2$ بالصورة

. $(x_1,x_2)\in G_1\times G_2$ لكـــــــل $\phi((x_1,x_2))=(\theta_1(x_1),\theta_2(x_2))$

برهن أن ϕ يكون تماثل زمري.

٣١- نفرض H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة الإبدالية G بحيث $HK=G$ و $HK=\{e\}$. برهن على أن $G\cong H\times K$.

الحل: سوف نبين أن $\phi:H\times K\to G$ المعرف بالصورة $\phi(h,k)=hk$ لكل $(h,k)\in H\times K$ يكون تماثل زمري.

أولا لكل $(h_1,k_1),(h_2,k_2)\in H\times K$ يكون

$$\phi((h_1,k_1)(h_2,k_2))=\phi(h_1h_2,k_1k_2)=h_1h_2k_1k_2=h_1k_1h_2k_2\ h_2$$
$$=\phi((h_1,k_1))\phi((h_2,k_2))$$

حيث أن $HK=G$ فإن ϕ يكون فوقي. أخيرا إذا كان لأي $\phi((h,k))=e$ $(h,k)\in H\times K$ فإن $hk=e$ وبالتالي $h=k^{-1}\in H\cap K$. لذلك $h=e$ و $k=e$ وبالتالي ϕ يكون أحادي.

٣٢- كم تماثل مختلف بين $\mathbb{Z}_6$ و $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ ؟ (إثنان مختلفان)

٣٣- كم تماثل مختلف بين $\mathbb{Z}_{12}$ و $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3$ ؟ (يوجد أربعة مختلفة)

٣٤- على $\mathbb{R}$ نعرف العملية $*$ بالصورة $x*y=x+y-1$. برهن على أن $(\mathbb{R},+)\cong(\mathbb{R},*)$. (إرشاد إعتبر الراسم $x\to x-1$).

٣٥- نفرض G زمرة إبدالية منتهية ونفرض n عدد صحيح موجب. نعرف $\phi:G\to G$ بالصورة $\phi(g)=g^n$ لكل $g\in G$. أوجد الشروط الضرورية والكافية لكي يكون ϕ تماثل زمري. (الإجابة أي عنصر غير صفري لا يكون من رتبة قاسم لـ n).

٣٦- نفرض G زمرة دائرية من رتبة 25 تكتب عمليتها ضرب، $G=\langle a\rangle$. أوجد كل العناصر من G التي رتبتها 5.

٣٧- في S_4 أوجد الزمر الجزئية H المولدة بالعنصرين $(1,2,3)$ و $(1,2)$. ثم أوجد $\sigma H \sigma^{-1}$ حيث $\sigma = (1,4)$.(الإجابة: بفرض أن $a = (1,2,3)$ و $b = (1,2)$ فإن $H = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$)

٣٨- بين أن كل عنصر في A_4 يمكن أن يكتب كحاصل ضرب دورات طول كل منها 3. (إرشاد: الدورات التي طولها 3 في A_4 هي $(1,2,3)$ ، $(1,2,4)$ ، $(1,3,2)$ ، $(1,3,4)$ ، $(1,4,2)$ ، $(1,4,3)$ ، $(2,3,4)$ ، $(2,4,3)$).

٣٩- أوجد منظم العنصر $(1,2,3)$ في S_3 ، S_4 و A_4.

٤٠- نفرض $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_4$ و $H = \{(0,0),(0,2)\}$ و $K = \{(0,0),(3,0)\}$. أكتب كل المجموعات المصاحبة لـ H وكل المجموعات المصاحبة لـ K.

٤١- نعتبر الزمرة D_4 معطاة بالصورة $\{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ ، حيث $a^4 = e$ ، $b^2 = e$ و $ba = a^3b$. نفرض N الزمرة الجزئية $\langle a^2 \rangle = \{e, a^2\}$.

(أ) بين أن N تكون زمرة جزئية قياسية من D_4.

(ب) هل زمرة القواسم D_4 / N تكون زمرة دائرية.

٤٢- نفرض $G = D_8$ ونفرض $N = \{e, a^2, a^4, a^6\}$.

(أ) أكتب كل المجموعات المصاحبة اليمنى واليسرى لـ N وتحقق من أن N تكون زمرة جزئية قياسية من G.

(ب) بين أن G/N تكون من رتبة 4 ولكنها ليست دائرية.

٤٣- بين أن $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ (نعرف الراسم $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ بالصورة $f(x)$ هو فصل باقي x معيار n. f يكون تشاكل فوقي نواته $n\mathbb{Z}$)

٤٤- إذا كانت m تقسم n فإن $\mathbb{Z}_m \le \mathbb{Z}_n$. بين أن $\mathbb{Z}_n/\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{m}}$ (نعرف الراسم $f:\mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{\frac{n}{m}}$ بالصورة $f(x) = x \,(mod\, \frac{n}{m})$. f يكون تشاكل فوقي نواته $\mathbb{Z}_m$. كحالة خاصة عندما $n=12$ و $m=4$ و $f(0)=0$ ، $f(1)=1$ ، $f(2)=2$ ، $f(3)=0$ ، $f(4)=1$ ، $f(5)=2$ ، $f(6)=0$ ، وهكذا)

٤٥- نفرض G زمرة. بين أن $G/\mathbb{Z}(G) \cong In(G)$ حيث $\mathbb{Z}(G)$ هو مركز الزمرة G و $In(G)$ هي مجموعة كل التماثلات الذاتية الداخلية للزمرة G. (نعرف الراسم $\psi: G \to In(G)$ بالصورة $\psi(a) = I_a$ لكل $a \in G$ حيث $I_a(x) = axa^{-1}$ لكل $x \in G$).

نفرض C_n ترمز إلى زمرة دائرية من رتبة n أي أن $C_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.

٤٦- صف جدول العملية للضرب المباشر $C_2 \times C_2$. هل $C_2 \times C_2$ دائرية؟ (إرشاد: $C_2 \times C_2$ تحتوي العناصر $e=(e,e)$ ، $\alpha=(a,e)$ ، $\beta=(e,a)$ ، $\gamma=(a,a)$. حاصل ضرب أي عنصرين من $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ يعطي

الثالث وكل عنصر من $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ يكون من رتبة 2 و e من رتبة 1 لذلك لا يوجد عنصر في $C_2\times C_2$ من رتبة 4 ومن ثم فهي ليست دائرية).

٤٧- بين أن الضرب المباشر $C_2\times C_2$ تكون متماثلة مع الزمرة الرباعية V.

٤٨- بين أن الضرب المباشر $C_2\times C_3$ تكون دائرية متماثلة مع C_6.

(الحل: نفرض $C_2=\{e,a\}$ حيث $a^2=e$ و $C_3=\{e,b,b^2\}$ حيث $b^3=e$.
لذلك (a,b) يولد $C_2\times C_3$ حيث أن القوى المتتابعة لهذا العنصر تعطي (a,b)، (e,b^2)، (a,e)، (e,b)، (a,b^2)، (e,e). لذلك $C_2\times C_3$ تكون دائرية من رتبة 6 ومن ثم تكون متماثلة مع C_6).

٤٩- إذا كان m و n عددان أوليان نسبيا بين أن $C_n\times C_m$ تكون متماثلة مع C_{nm} وبالتالي تكون دائرية.

٥٠- نفرض p و q أعداد أولية مختلفة و $|G|=p$ و $|H|=q$. بين أن الضرب المباشر $G\times H$ تكون دائرية.

٥١- ضع علامة √ أمام العبارة الصحيحة وعلامة × أمام العبارة الخاطئة فيما يلي

أ) كل تبديله هي راسم أحادي.

ب) كل زمرة جزئية من الزمرة الإبدالية تكون زمرة إبدالية.

جـ) كل راسم يكون تبديله إذا وفقط إذا كان أحاديا.

د) الزمرة المتماثلة S_{10} تحتوي عشرة عناصر.

هـ) كل زمرة قواسم للزمرة الدائرية تكون دائرية.

و) إذا كانت $*$ أي عملية ثنائية دامجة على المجموعة S فإن

$a*(b*c)=(b*c)*a$ لكل $a,b,c \in S$.

ز) أي زمرة منتهية تحوي ثلاثة عناصر على الأكثر تكون إبدالية .

ح) أي زمرة دائرية يكون لها مولد وحيد.

ط) كل زمرة دائرية تكون إبدالية.

ي) إذا كان G و G' زمرتان فإن $G \cap G'$ تكون زمرة.

٥٢- صحح – إن كان ذلك ضروريا- التعريف التالي :

أ) الزمرة الجزئية القياسية H من الزمرة G هي التي تحقق $hG=Gh$ لكل $h \in H$.

ب) التشاكل الذاتي للزمرة G هو تشاكل من G إلى G .

جـ) مركز الزمرة G يحتوي كل عناصر G التي تتبادل مع كل عنصر في G.

د) زمرة المبدل الجزئية من الزمرة G هي $\{a^{-1}b^{-1}ab : a,b \in G\}$.

٥٣- نفرض H زمرة جزئية و a عنصر في الزمرة G . أثبت أن $K=aHa^{-1}$ تكون زمرة جزئية من G .

٥٤- في الزمرة G أثبت أن a و xax^{-1} لهما نفس الرتبة حيث $x \in G$.

٥٥- أكتب كل الزمر الجزئية من الزمرة الدائرية من رتبة 12 .

٥٦- نفرض H زمرة جزئية و N زمرة جزئية قياسية من الزمرة G .

أثبت أن $H \cap N$ تكون زمرة جزئية قياسية من H .

٥٧- أثبت أن التماثل بين الزمر يكون علاقة تكافؤ على مجموعة كل الزمر.

حلول تمارين الجزء الأول

نظرية الزمر

حلول تمارين ١

٩- (أ) ϕ (ب) ϕ ، $\{a\}$

(جـ) ϕ ، $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{a,b\}$.

(د) ϕ ، $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$ ، $\{a,b\}$ ، $\{a,c\}$ ، $\{b,c\}$ ، $\{a,b,c\}$.

١٠- (أ) ليست علاقة تكافؤ. ليست عاكسة.

(ب) ليست علاقة تكافؤ. $2 \geq 3$ ولكن $3 \ngeq 2$.

(جـ) علاقة تكافؤ. $\bar{0}=\{0\}$ و $\bar{a}=\{a,-a\}$ لكل $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

(د) ليست علاقة تكافؤ $1R3, 3R5 \not\Rightarrow 1R5$ ، $|1-5|=4>3$.

حلول تمارين ٣

١- (أ) راسم. ليس أحادي، ليس فوقي.

(ب) راسم. ليس أحادي، ليس فوقي.

(جـ) ليس راسم.

(د) راسم. أحادي، ليس فوقي.

(هـ) راسم. ليس أحادي، ليس فوقي.

(و) ليس راسم.

٣-(أ) ليست إبدالية $1-2 \neq 2-1$. ليست دامجة.

(ب) إبدالية. ليست دامجة.

(جـ) إبدالية. دامجة.

(د) إبدالية. ليست دامجة.

(هـ) ليس إبدالية. ليست دامجة.

٤-(أ) ليست عملية ثنائية. $1*1=0$ و $0 \notin \mathbb{Z}^+$.

(ب) ليست عملية ثنائية.

(جـ) ليست عملية ثنائية.

٥- $(a*b)*(c*d)=(c*d)*(a*b)$

$$(d*c)*(a*b)=[(d*c)*a]*b$$

٦-(أ) العبارة صحيحة.

(ب) العبارة خطأ

$$(a*a)*b=b*b=a$$

b	a	a
$*$	a	b
a	b	a

ولكن $a*(a*b)=a*a=b$

٧- (أ) تماثل. تناظر أحادي و

$$\phi(m+n)=-(n+m)=(-n)+(-m)=\phi(n)+\phi(m)$$

(ب) ليست تماثل. ليست فوقية $\phi(n)\neq 1$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.

(جـ) ليست تماثل $\phi(m+n)=m+n+1$.

بينما $\phi(m)+\phi(nm+1+n+1=m+n+2$.

(د) تماثل. أحدي وفوقي. كذلك

$$\phi(a+b)=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\phi(a)+\phi(b)\ .$$

(هـ) ليست تماثل لأن ϕ ليس فوقي $\phi(a)\neq -1$ لكل $a\in\mathbb{Q}$.

(و) تماثل لأن ϕ أحادي وفوقي وكذلك

$$\phi(xy)=(xy)^3=x^3y^3=\phi(x)\phi(y)\ .$$

حلول تمارين ٤

١- ليست زمرة. لا يوجد معكوس.

٢- زمرة

٣- ليست زمرة. العملية ليست دامجة.

٤- ليست زمرة. لا يوجد معكوس.

٥- ليست زمرة. العملية ليست دامجة.

٦- ليست زمرة . لا يوجد عنصر محايد.

٧- نعم تكون زمرة. عملية جمع المصفوفات دامجة ومجموع مصفوفتين قطريتين يعطي مصفوفة قطرية. المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تكون هي العنصر المحايد الجمعي وبتغيير إشارة عناصر المصفوفة نحصل على المعكوس الجمعي للمصفوفة.

٨- ليست زمرة. المصفوفة التي تحتوي على أي عنصر صفري في القطر الرئيسي ليس لها معكوس ضربي.

٩- نعم تكون زمرة.

١٠- نعم تكون زمرة.

١١- لا تكون زمرة. المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تكون مصفوفة مثلثية علوية ولكن ليس لها معكوس ضربي.

١٢- نعم تكون زمرة. مجموع مصفوفتين مثلثتين علويتين يعطى مصفوفة مثلثية علوية.

١٣- نعم تكون زمرة.

الانغلاق: نفرض A و B مصفوفتان مثلثتان علويتان محدد كل منها يساوي 1. إذن العنصر c_{ij} الموجودة في الصف رقم i والعمود رقم j من $C = AB$ يكون 0 إذا كان $i > j$ ، لأنه لكل حاصل ضرب $a_{ik}b_{kj}$ حيث $i > j$، يظهر حساب c_{ij} إما $k < i$ وبذلك $a_{ik} = 0$ أو $k \geq i > j$ وبذلك $b_{kj} = 0$. لذلك حاصل ضرب مصفوفتان مثلثيتان علويتان يعطي أيضا مصفوفة مثلثية علوية.

المعادلة $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ تبين أن حاصل ضرب مصفوفتان محدد كل منهما يساوي 1 يعطي أيضا مصفوفة محددها يساوي 1.

عملية ضرب المصفوفات دامجة.

العنصر المحايد: المصفوفة I_n المربعة من درجة $n \times n$ محددها يساوي 1 وهي مثلثية علوية.

المعكوس: الخاصية

$$1 = \det(I_n) = \det(A^{-1}A) = \det(\mathrm{A}^{-1})\det(\mathrm{A})$$

تبين أنه إذا كان $\det(A) = 1$ فإن $\det(A^{-1}) = 1$.

١٤- تكون زمرة. العلاقة $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ تبين أن مجموعة كل المصفوفات المربعة من درجة $n \times n$ والتي محددها ± 1 تكون مغلقة بالنسبة لعملية الضرب. كذلك عملية ضرب

المصفوفات دامجة و $\det(I_n)=1$ وكما في التمرين السابق $\det(A)=\pm1$ يؤدي إلى $\det(A^{-1})=\pm1$.

١٥-(أ) يجب أن نبين أن S مغلقة بالنسبة للعملية $*$، أي أن، $a+b+ab\neq-1$ لكل $a,b\in S$. الآن $a+b+ab=-1$ إذا وفقط إذا كان $0=ab+a+b+1=(a+1)(b+1)$ وهذا يحدث إذا وفقط إذا كان إما $a=-1$ أو $b=-1$ وهذا غير محقق لكل $a,b\in S$.

(ب) الدمج: لدينا $a*(b*c)=a*(b+c+bc)$

$$=a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)$$

$$=a+b+c+ab+ac+bc+abc$$

كذلك $(a*b)*c=(a+b+ab)*c$

$$=(a+b+ab)+c+(a+b+ab)c$$

$$=a+b+c+ab+ac+bc+abc$$

إذن العملية دامجة.

المحايد: هو 0 حيث $a*0=0*a=a$

المعكوس: $-\frac{a}{a+1}$ هو معكوس العنصر a حيث

$$a*\frac{-a}{a+1}=a+\frac{-a}{a+1}+a\frac{-a}{a+1}=\frac{a(a+1)-a-a^2}{a+1}=\frac{0}{a+1}=0$$

(جـ) حيث أن العملية إبدالية $2*x*3=2*3*x=11*x$

من (ب) معكوس 11 هو $\frac{-11}{12}$ ومن $11*x=7$ نحصل على

$$x = \frac{-11}{12} * 7 = \frac{-11}{12} + 7 + \frac{-11}{12} \cdot 7$$

$$= \frac{-11+84-77}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

١٦- الترتيبات $\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_1$ ،$\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2$ ، $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_2$ غير مقبولة . حيث أن العنصر المحايد يستخدم في العبارة $\mathfrak{G}_3$ والتي يجب أن لا تسبق تعريف العنصر المحايد في $\mathfrak{G}_2$.

١٧- الجدول الوحيد المطلوب بحيث يطون فيه e عنصر محايد وكل صف وكل عمود يحتوي e بحيث يحقق $\mathfrak{G}_3$ و$\mathfrak{G}_2$.إذن الجدول يكون بحيث أن صف أو عمود يحتوي عنصر مرتين . واضح أن هذه ليست زمرة حيث أن $\mathfrak{G}_1$ ليست محققة.

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	b
b	b	a	e

١٨- نفرض $S = \{x \in G : x' \neq x\}$. إذن S تحتوي عدد زوجي من العناصر حيث أن عناصرها يمكن أن تجمع في ثنائيات x, x' . وحيث أن G تحتوي عدد زوجي من العناصر فإن عدد عناصر G غير المحتواه في S (أي $G \setminus S$) يجب أن يكون زوجي. المجموعة $G \setminus S$ غير خالية لأنها تحتوي e. إذن يوجد على الأقل عنصر خلاف e يكون معكوس نفسه.

١٩- نفرض $(G,*)$ زمرة ونفرض $x \in G$ بحيث $x * x = x$. إذن $x * x = x * e$. من قانون الحذف نحصل على $x = e$. إذن e هو العنصر الوحيد الخامل.

٢٠- لـــدينا $e=(a*b)*(a*b)$ و $(a*a)*(b*b)=e*e=e$. إذن $(a*a)*(b*b)=(a*b)*(a*b)$. بإســتخدام قــانون الحــذف نحصل على $a*b=b*a$.

٢١- نفرض $P_n \equiv (a*b)^n = a^n * b^n$.

حيث أن $(a*b)^1 = a*b = a^1 * b^1$ ، إذن $P(1)$ تكون صحيحة.

نفرض أن $P(k)$ صحيحة. إذن

$$\begin{aligned}(a*b)^{k+1} &= (a*b)^k * (a*b)\\ &= (a^k * b^k)*(a*b) = [a^k *(b^k * a)]* b\\ &= [a^k *(a*b^k)]*b = [(a^k * a)*b^k)]*b\\ &= (a^{k+1} * b^k)*b = a^{k+1} * b^{k+1}\end{aligned}$$

وهذا يكمل البرهان.

٢٢- العناصر $e,a,a^2,a^3,....,a^m$ ليست جميعها مختلفة حيث أن G تحتوي m عنصر فقط. إذا كان أحد العناصر $a,a^2,a^3,....,a^m$ هو e ينتهي البرهان. وإذا لم يكن فيجب أن يكون $a^i = a^j$ حيث $i<j$. بتكرار الحذف نحصل على $a^{j-i}=e$.

٢٣- لدينا $(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$.

لذلك $a*[b*(a*b)]=a*[a*(b*b)]$.

ومن قانون الحذف نحصل على $b*(a*b)=a*(b*b)$. إذن $(b*a)*b=(a*b)*b$. ومن قانون الحذف نحصل على $b*a=a*b$.

٢٤- نفرض $a*b=b*a$. إذن $(a*b)'=(b*a)'=a'*b'$.

من جهة أخرى إذا كان $(a*b)'=a'*b'$ فإن $b'*a'=a'*b'$.

إذن $(b'*a')'=(a'*b')'$ ومنها يكون $a*b=b*a$.

٢٥- نفرض G زمرة. إذا كانت $G=\{e\}$ فإنها تكون إبدالية. إذا كانت $G=\{e,a\}$ فإن $ea=ae=a$ وتكون G إبدالية. نفرض $G=\{e,a,b\}$. إذا كان $a^{-1}=b$ فإن $ab=ba=e$. إذا كان $a^{-1}=a$ و $b^{-1}=b$ فإن $ab=a \Leftarrow b=e$ و $ab=b \Leftarrow$ $a=e$. أخيرا نفرض $G=\{e,a,b,c\}$. إذن أح العناصر يكون معكوس نفسه. نفرض $c=c^{-1}$. إذن $a^{-1}=b$ ويكون $ab=ba=e$ و $ac=ca=b$ و $bc=a=cb$.

حلول تمارين ٥

١- زمرة جزئية.

٢- ليست زمرة جزئية، لا يوجد عنصر محايد.

٣- زمرة جزئية.　　　　　　٤- زمرة جزئية.

٥- زمرة جزئية.

٦- ليست زمرة جزئية، المجموعة ليست مغلقة بالنسبة للجمع.

٧- لا تكون زمرة جزئية. إذا كان $\det(A)=\det(B)=2$ فإن $\det(AB)=\det(A)\det(B)=4$. المجموعة ليست مغلقة بالنسبة لعملية الضرب.

٨- نعم زمرة جزئية.

٩- نعم تكون زمرة جزئية.

١٠- ليست زمرة جزئية. إذا كان $\det(A)=\det(B)=-1$ فإن $\det(AB)=\det(A)\det(B)=1$. المجموعة ليست مغلقة بالنسبة لعملية الضرب.

١١- (أ)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

(ب) $\langle 0\rangle=\{0\}, \langle 2\rangle=\langle 4\rangle=\{0,2,4\}$ ، $\langle 3\rangle=\{0,3\}$ ،

$\langle 1\rangle=\langle 5\rangle=\mathbb{Z}_6$

(جـ) 5, 1 .

١٢- الاغلاق: نفرض $S=\{hk : h\in H, k\in K\}$ ونفرض $x,y\in S$. إذن $x=hk$ و $y=h'k'$ لـبعض $h,h'\in H$ و $k,k'\in K$. حيث أن G إبدالية نحصل على $xy=hkh'k'=(hh')(kk')$. وحيث أن H و K زمر جزئية، $hh'\in H$ و $kk'\in K$. لـذلك $xy\in S$ و S تكون مغلقة بالنسبة للعملية المولدة عليها.

المحايد: $e\in H$ و $e\in K$. لذلك $e=ee\in S$.

المعكـــوس: نفــــرض $x\in S$. إذن $x=hk$. الآن $h^{-1}\in H$ و $k^{-1}\in K$. إذن $h^{-1}k^{-1}\in S$. وحيـــث أن G إبداليـــة $h^{-1}k^{-1}=k^{-1}h^{-1}=(hk)^{-1}=x^{-1}$. لـذلك معكـوس x ينتمـي إلى S. إذن S زمرة جزئية.

١٣- نفرض $B=\{e,a,a^2,...,a^{n-1}\}$ زمرة دائرية بها n عنصر. إذن $a^{-1}=a^{n-1}$ أيضا يولد G، حيث أن $(a^{-1})^i=(a^i)^{-1}=a^{n-i}$ لقيم $i=1,2,...,n-1$. لذلك إذا كان G لها مولد وحيد فإنه يجب أن يكون $n-1=1$ و $n=2$. بالطبع $G=\{e\}$ أيضا دائرية.

١٤- نفرض $H=\{x\in G : x^2=e\}$. نفرض $a,b\in H$. حيث أن G إبدالية، إذن $(ab)^2=a^2b^2=ee=e$. لـذلك $ab\in H$ وتكـون H

مغلقة بالنسبة للعملية المولدة. حيث أن $ee=e$ فإن $e\in H$. أخيرا حيث أن $aa=e$ إذن كل عنصر في H يكون معكوس نفسه. إذن H تكون زمرة جزئية من G.

١٥- نفرض $H=\{x\in G : x^n=e\}$ ونفرض $a,b\in H$. حيث أن G إبدالية، إذن $(ab)^n=a^nb^n=ee=e$. لذلك $ab\in H$ وتكون H مغلقة بالنسبة للعملية المولدة. حيث أن $e^n=e$ فإن $e\in H$. أخيرا، نفرض $a\in H$. حيث أن $a^n=e$ نجد أن معكوس a هو a^{n-1}، وهذا عنصر في H لأن H مغلقة بالنسبة للعملية المولدة.

١٦- نفرض G زمرة عدد عناصرها m. إذن العناصر $a,a^2,\dots,a^{m-1}$ لا يمكن أن تكون جميعها مختلفة لذلك $a^i=a^j$ لبعض $i<j$. إذن $e=a^{j-i}$ وتكون $j-i$ هو العدد n.

١٧- نفرض $a\in H$ ونفرض أن عدد عناصر H يساوي n. إذن العناصر $a,a^2,\dots,a^{n+1}$ تكون جميعها في H (لأن H مغلقة بالنسبة للعملية) ولايمكن أن تكون جميعها مختلفة. إذن $a^i=a^j$ لبعض $i<j$. إذن $e=a^{j-i}$. لذلك $e\in H$. أيضا $a^{-1}\in H$ لأن $a^{-1}=a^{j-i-1}$ وهذا يبين أن H زمرة جزئية من G.

١٨- <u>الانعكاس:</u> نفرض $a\in G$. إذن $aa^{-1}=e$ و $e\in H$ لأن H زمرة جزئية. إذن $a\sim a$.

التماثل: نفرض $a,b \in G$ بحيث $a \sim b$. إذن $ab^{-1} \in H$. وحيث أن H زمرة جزئية، إذن $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$. لذلك $b \sim a$.

الإنتقال: نفرض $a,b,c \in G$ بحيث $a \sim b$ و $b \sim c$. إذن $ab^{-1} \in H$ و $bc^{-1} \in H$. وحيث أن H زمرة جزئية، إذن $(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1} \in H$. إذن $a \sim c$.

١٩- نفرض G زمرة ليس بها زمرة جزئية خالصة غير تافهة. إذا كان $G = \{e\}$ فإن G تكون دائرية. نفرض $G \neq \{e\}$. نفرض $e \neq a \in G$. نعلم أن $\langle a \rangle$ زمرة جزئية من G و $\langle a \rangle \neq \{e\}$. وحيث أن G لا تحوي زمرة جزئية خالصة غير تافهة يجب أن يكون $G = \langle a \rangle$، لذلك G تكون دائرية.

٢٠- زمرة كلاين الرباعية.

٢١- $(\mathbb{R},+)$.

٢٢- $\mathbb{Z}_2$.

٢٣- لا يوجد مثل هذا المثال. كل زمرة دائرية لانهائية تكون متماثلة مع $(\mathbb{Z},+)$ وهذه لها مولدان 1 و -1 .

٢٤- $\mathbb{Z}_8$ لها المولدات 1، 3، 5، 7.

٢٥- المعادلة

$$(n_1 r + m_1 s) + (n_2 r + m_2 s) = (n_1 + n_2) r + (m_1 + m_2) s$$

تبين أن المجموعة مغلقة بالنسبة للجمع . ولأن $0r+0s=0$ فإن 0 ينتمي إلى المجموعة. كذلك لأن

$$[(-n)r+(-m)s]+(nr+ms)=0$$

فإن المجموعة تحتوي معكوس كل عنصر. إذن المجموعة تكون زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$.

٢٦- نفرض n هي رتبة ab . إذن $(ab)^n=e$. بضرب هذه المعادلة من اليمين في a ومن اليسار في b نجد أن $(ba)^{n+1}=bea=(ba)e$. بحذف العامل ba من الطرفين نحصل على $(ba)^n=e$. لذلك إذا كانت رتبة ba أقل من n فإنه بأسلوب مشابه تكون رتبة ab أقل من n وهو ما يناقض اختيارنا لـ n. إذن رتبة ba تكون أيضا n.

حلول تمارين ٦

١- تشاكل لأن $\phi(m+n)=m+n=\phi(m)+\phi(n)$.

٢- ليس تشاكل لأن $\phi(2.6+1.6)=\phi(4.2)=4$

بينما $\phi(2.6)+\phi(1.6)=2+1=3$.

٣- تشاكل لأن $\phi(xy)=|xy|=|x||y|=\phi(x)\phi(y)$

لكل $x,y\in\mathbb{R}^*$.

٤- تشاكل لأن $\phi(x+y)=2^{x+y}=2^x2^y=\phi(x)\phi(y)$.

٥- ليس تشاكل إذا كانت G ليست إبدالية ، حيث

$$\phi(ab)=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=\phi(b)\phi(a)$$

وهذا لا يساوي $\phi(a)\phi(b)$ إذا لم تكن G إبدالية.

٦- نعم تشاكل. من التفاضل $(f+g)''=f''+g''$ لذلك

$\phi(f+g)=(f+g)''=f''+g''=\phi(f)+\phi(g)$.

٧- $\ker(\phi)=7\mathbb{Z}$ لأن 4 من رتبة 7 في $\mathbb{Z}_7$.

$$\phi(25)=\phi(21+4)=\phi(21)+_7\phi(4)=0+_7\phi(4)$$
$$=\phi(1)+_7\phi(1)+_7\phi(1)+_7\phi(1)$$
$$=4+_74+_74+_74==1+_71=2$$

٨- $\ker(\phi)=5\mathbb{Z}$ لأن 6 من رتبة 5 في $\mathbb{Z}_{10}$

$$\phi(18)=\phi(15+3)=\phi(15)+_{10}\phi(3)=0+_{10}\phi(3)$$
$$=\phi(1)+_{10}\phi(1)+_{10}\phi(1)=6+_{10}6+_{10}6$$

$$=2+_{10}6=8$$

٩- في S_8 $\sigma=(1,4,2,6)(2,5,7)=(1,4,2,5,7,6)$ وهذه من رتبة 6 ، لذلك $\ker(\phi)=6\mathbb{Z}$. إذن

$\phi(20)=\phi(18+2)=\phi(18)\phi(2)=i\,\sigma^2=(1,2,7)(4,5,6)$.

١٠- حيث ان التشاكل يجب أن يكون فوقي، $\phi(1)$ يجب أن تكون مولد لـ $\mathbb{Z}$. يوجد فقط تشاكلان من هذا النوع حيث $\phi(1)=1$ ، لذلك $\phi(n)=n$ لكل $n\in\mathbb{Z}$ و الآخر $\phi(1)=-1$. لذلك $\phi(n)=-n$ لكل $n\in\mathbb{Z}$.

١١- يوجد عدد لانهائي، لأي عدد غير صفري $n\in\mathbb{Z}$ نعلم أن $\langle n\rangle$ تكون متماثلة مع $\mathbb{Z}$. لذلك $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\phi(m)=mn$ يكون تماثل وبالتالي تشاكل. بالطبع ϕ المعرف بالصورة $\phi(m)=0$ لكل $n\in\mathbb{Z}$ يكون أيضا تشاكل.

١٢- حيث أن يجب أن يكون $\phi_g(e)=e$ فإن $\phi_g(e)=ge=e$. إذن $g=e$ هو الاحتمال الوحيد $\phi_g(x)=x$ هو راسم الوحدة وهو تشاكل.

١٣- لدينا $\phi_g(\mathrm{xy})=g(xy)g^{-1}=(gxg^{-1})(gyg^{-1})$

$$=\phi_g(x)\phi_g(y)$$

لكل $x,y\in G$. لذلك ϕ_g يكون تشاكل لكل $g\in G$.

١٤- نفرض $a,b \in G$. بالنسبة للدالة المركبة $\gamma\phi$ يكون

$$\gamma\phi(ab) = \gamma(\phi(ab)) = \gamma(\phi(a)\phi(b))$$
$$= \gamma(\phi(a))\, \gamma(\phi(b)) = \gamma\phi(a)\, \gamma\phi(b)$$

١٥- نفرض $x', y' \in \phi(G)$ ونفرض $\phi(x) = x',\ \phi(y) = y'$ حيث $x, y \in G$. إذن $\phi(G)$ تكون إبدالية إذا وفقط إذا كان $x'y' = y'x'$ إذا وفقط إذا كان $(y'x')^{-1}x'y' = e'$ إذا وفقط إذا كان $x'^{-1}y'^{-1}x'y' = e'$ إذا وفقط إذا كان $\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1}\phi(x)\phi(y) = e'$ إذا وفقط إذا كان $\phi(x^{-1}y^{-1}xy) = e'$ إذا وفقط إذا كان $x^{-1}y^{-1}xy \in \ker(\phi)$ لكل $x', y' \in \phi(G)$. لاحظ أنه بسبب أن x', y' يمكن أن تكون أي عناصر في $\phi(G)$ ، x, y يمكن ان تكون أي عناصر في G.

١٦- نفرض $S = \{x \in G : \phi(x) = \phi(a)\}$.

سوف نبين أن $S \subset Ka$ وأن $Ka \subset S$.

نفرض $s \in S$ ، إذن $\phi(sa^{-1}) = \phi(s)\phi(a^{-1}) = \phi(a)\phi(a^{-1})$

$$= \phi(a)\phi(a)^{-1} = e'$$

لذلك $sa^{-1} = h \in K$. إذن $s = ha$. إذن $s \in Ka$ وهذا يعني أن $S \subset Ka$. الآن نفرض $h \in K$ ، إذن $ha \in Ka$. إذن $\phi(ha) = \phi(h)\phi(a) = e'\phi(a) = \phi(a)$. إذن $ha \in S$.

إذن $Ka \subset S$ وهذا يؤدي إلى $Ka = S$.

حلول تمارين ٧

١- $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ، $\tau^2\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$\mu\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ،

$$\sigma^{-2}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

* $|\langle 6 \rangle|$ بتطبيق σ نبدأ بالعدد 1 نجد أن $1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 1$ واضح أن $\sigma^6(1) = 1$. إذن σ^6 هو أصغر قوة ممكنة لـ σ بحيث تكون تبديلة الوحدة. لذلك $|\langle 6 \rangle| = 6$.

* $|\langle \tau^2 \rangle|$ $\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ واضح أن $(\tau^2)^2$ هي عنصر الوحدة. لذلك $|\langle \tau^2 \rangle| = 2$.

* حيث أن σ^6 هي تبديلة الوحدة، نحصل على

$$\sigma^{100} = (\sigma^6)^{16}\sigma^4 = \sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

* μ^2 = تبديلة الوحدة. لذلك $\mu^{100} = (\mu^2)^{50}$ تكون أيضا هي تبديلة الوحدة.

٢- (أ) تبديلة

(ب) ليست تبديلة. الراسم ليس أحادي وليس فوقي.

(جـ) تبديلة.

(د) ليست تبديلة.

(هـ) ليست تبديلة. f_5 ليس أحادي. $f_5(2)=f_5(-1)=0$.

٣-(أ) $\{1,2,5\},\{3\},\{4,6\}$

(ب) $\{1,5,7,8\},\{2,3,6\},\{4\}$

(حـ) $\{1,2,3,4,5\},\{6\},\{7,8\}$

(د) $\mathbb{Z}$

(هـ) $\{2n:n\in\mathbb{Z}\},\{2n+1:n\in\mathbb{Z}\}$

(و) $\{3n+2:n\in\mathbb{Z}\}$ ، $\{3n+1:n\in\mathbb{Z}\}$ ، $\{3n:n\in\mathbb{Z}\}$

٤- (أ) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&3&5&8&6&2&7\end{pmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&2&8&5&4&1&6\end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&4&3&7&8&6&2&1\end{pmatrix}$

٥-(أ) $(1,8)(3,6,4)(5,7)$ و $(1,8)(3,4)(3,6)(5,7)$.

(ب) $(1,3,4)(2,6)(5,8,7)$ و $(1,4)(1,3)(2,6)(5,7)(5,8)$

(جـ) $(1,3,4,7,8,6,5,2)$ و $(1,2)(1,5)(1,6)(1,8)(1,7)(1,4)(1,3)$.

٦- (أ) لاحظ أن $(1,2)(1,2)$ هي تبديلة الوحدة على S_n و $2 \leq n-1$ إذا كان $n > 2$.

ولأن $(1,2,3,4,...,n) = (1,n)(1,n-1)...(1,3)(1,2)$ نجد أن دورة طولها n يمكن أن تكتب كحاصل ضرب عدد $n-1$ مناقلة. الآن التبديلة في S_n يمكن أن تكتب كحاصل ضرب دورات منفصلة ومجموع أطوالها أقل من أويساوي n. إذا كان يوجد عدد r دورة منفصلة من هذه الدورات فإن التبديلة يمكن أن تكتب كحاصل ضرب على الأكثر عدد $n-r$ مناقلة. وحيث أن $r \geq 1$ نجد أنه دائما يمكن كتابة التبديلة كحاصل ضرب على الأكثر $n-1$ مناقلة.

(ب) تنتج من (أ) حيث يجب أن يكون $r \geq 2$.

(جـ) أكتب التبديلة الفردية σ كحاصل ضرب عدد s مناقلة حيث $s \leq n-1$ وذلك من (أ). إذن s يكون عدد فردي و $2n+3$ عدد فردي، لذلك $2n+3-s$ يكون عدد زوجي. بضرب عدد $2n+3-s$ من المناقلة $(1,2)$ كعوامل من جهة اليمين في حاصل ضرب s مناقلة التي تعطي σ يكون الناتج هو نفس التبديلة σ لأن حاصل ضرب عدد زوجي من العوامل $(1,2)$ يعطي تبديلة الوحدة. لذلك σ يمكن أن تكتب كحاصل ضرب $2n+3$ مناقلة.

إذا كانت σ زوجية نتبع نفس الخطوات ولكن في هذه المرة s تكون زوجية. لذلك $2n+8-s$ تكون أيضا زوجية.

٧- نفرض $\sigma \in H$ تبديلة فردية. نفرض $\phi : H \to H$ معرف بالصورة $\phi(\mu) = \sigma\mu$ لكل $\mu \in H$. إذا كان $\phi(\mu_1) = \phi(\mu_2)$ فإن $\sigma\mu_1 = \sigma\mu_2$ ، لذلك $\mu_1 = \mu_2$. أيضا لأي $\mu \in H$ يكون $\phi(\sigma^{-1}\mu) = \sigma\sigma^{-1}\mu = \mu$. إذن ϕ يكون راسم أحادي وفوقي من H إلى H . ولأن σ تبديلة ، ϕ سرسم التبديلة الزوجية في H إلى تبديلة فردية والتبديلة الفردية إلى تبديلة زوجية في H. إذن H تحتوي عدد من التبديلات الزوجية مساو لنفس عدد التبديلات الفردية. لذلك إذا كانت H تحتوي تبديلات فردية فإنه يناظرها نفس العدد من التبديلات الزوجية.

٨- إذا كان طول الدورة 1 فإنها لاتحرك أي عنصر. إذا كان طول الدورة $n > 1$ فإنها تحرك n عنصر لأن العناصر التي ليست في الدورة لا تتحرك.

٩- يجب أن نبين أن λ_a أحادي وفوقي. نفرض أن $\lambda_a(g_1) = \lambda_a(g_2)$. إذن $ag_1 = ag_2$. من قانون الحذف نحصل على $g_1 = g_2$ ويكون λ_a. نفرض $g \in G$. إذن $\lambda_a(a^{-1}g) = a(a^{-1}g) = g$ لذلك λ_a يكون فوقي.

حلول تمارين ٨

١- $4\mathbb{Z}=\{\ldots,-8,-4.0,4,8,\ldots\}$ ،
$1+4\mathbb{Z}=\{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}$ ،
$2+\mathbb{Z}=\{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots\}$ ،
$3+4\mathbb{Z}=\{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}$.

٢- $4\mathbb{Z}=\{\ldots,-8,-4.0,4,8,\ldots\}$ ، $2+\mathbb{Z}=\{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots\}$.

٣- $\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10\}$ ، $1+\langle 2\rangle=\{1,3,5,7,9,11\}$.

٤- $\langle 4\rangle=\{0,4,8\}$ ، $1+\langle 4\rangle=\{1,5,9\}$.

٥- $\langle 18\rangle=\{0,18\}$ ، $1+\langle 18\rangle=\{1,19\}$ ، $2+\langle 18\rangle=\{2,20\}$ ، … ، $17+\langle 18\rangle=\{17,35\}$.

٦- $\{\rho_3,\delta_1\}$ ، $\{\rho_2,\mu_1\}$ ، $\{\rho_1,\delta_2\}$ ، $\{\rho_0,\mu_2\}$.

٧- $\{\rho_3,\delta_2\}$ ، $\{\rho_2,\mu_1\}$ ، $\{\rho_1,\delta_1\}$ ، $\{\rho_0,\mu_2\}$.
ليست نفس المجموعات اليسرى.

٨- $\langle 3\rangle=\{1,3,6,9,12,15,18,21\}$ بها 8 عناصر لذلك دليلها (عدد المجموعات المصاحبة) هو $3=\frac{24}{8}$.

٩- $\langle \mu_1\rangle=\{\rho_0,\mu_1\}$ تحتوي عنصرين لذلك دليلها يساوي $3=\frac{6}{2}$.

١٠- $\sigma=(1,2,5,4)(2,3)=(1,2,3,5,4)$ تولد زمرة جزئية من S_5 من رتبة 5. لذلك دليلها هو $\frac{5!}{5}=4!=24$.

١١- $\mu=(1,2,4,5)(3,6)$ تولد زمرة جزئية دائرية من S_6 من رتبة 4 (الدورات منفصلة) لذلك دليلها هو $\frac{6!}{4}=\frac{720}{4}=180$.

١٢- سوف نبرهن أن $gH=Hg$ ببيان أن $gH\subset Hg$ و $Hg\subset gH$. نفرض $gh\in gH$ حيث $g\in G$ و $h\in H$. إذن

$$gh=ghg^{-1}g=[(g^{-1})^{-1}hg^{-1}]g\in Hg$$

لأن $(g^{-1})^{-1}hg^{-1}\in H$ من الفرض. لذلك $gH\subset Hg$.

الآن نفرض أن $hg\in Hg$ حيث $g\in G$ و $h\in H$. إذن $hg=gg^{-1}hg=g(g^{-1}hg)\in gH$ لأن $g^{-1}hg\in H$ من الفرض. إذن $Hg\subset gH$. إذن $gH=Hg$.

١٣- (أ) العلاقة خطأ.

نفرض $G=S_3$ و $H=\{\rho_0,\mu_1\}$. $a=\rho_1$ و $b=\mu_3$. إذن $Ha=\{\rho_1,\mu_3\}=bH$ ولكن $Ha=\{\rho_1,\mu_2\}\neq\{\rho_2,\mu_3\}=Hb$.

(ب) العلاقة صحيحة $e\in H$ و $b=eb$. لذلك $b\in Hb$. وحيث أن $Hb=Ha$ فإن $b\in Ha$.

(جـ) العلاقة صحيحة. حيث أن H زمرة نحصل على $\{h^{-1}:h\in H\}=H$.

لذلك $Ha^{-1}=\{ha^{-1}:h\in H\}=\{h^{-1}a^{-1}:h\in H\}$

$$=\{(ah)^{-1}:h\in H\}$$

أي أن Ha^{-1} تتكون من كل معكوسات عناصر aH . بالمثل Hb^{-1} تتكون من كل معكوسات عناصر bH. ولأن $aH=bH$ يجب أن يكون $Ha^{-1}=Hb^{-1}$.

(د) العلاقة خطأ. نفرض H الزمرة الجزئية $\{\rho_0,\mu_2\}$ من D_4 .

إذن $\rho_1^2H=\rho_2H=\{\rho_2,\mu_1\}$ و $\rho_1H=\delta_2H=\{\rho_1,\delta_2\}$

ولكن $\delta_2^2H=\rho_0H=H=\{\rho_0,\mu_2\}$.

١٤- الرتب الممكنة للزمر الجزئية الفعلية هي p و q و 1. الآن p و q عناصر أولية وكل زمرة من رتبة أولية تكون دائرية وبالطبع كل زمرة من رتبة 1 تكون دائرية. لذلك كل زمرة جزئية من رتبة pq يجب أن تكون دائرية.

١٥- تجزيء G إلى مجموعات مصاحبة يسرى لـ H يجب أن تكون H و $G-H=\{g\in G:g\notin H\}$ لأن G لها رتبة منتهية و H يجب أن تحتوي نصف عدد العناصر مثل G. لنفس السبب يجب أن يكون التجزيء إلى مجموعات مصاحبة يمنى لـ H لذلك كل مجموعة مصاحبة يسرى تكون أيضا مجموعة مصاحبة يمنى.

١٦- الإنعكاس: لدينا $a=eae$ و $e\in K$ ، لذلك $a\sim a$.

التماثل: نفرض $a\sim b$. لذلك $a=hbk$ لبعض $h\in H$ و $k\in K$. إذن $b=h^{-1}ak^{-1}$ و $h^{-1}\in H$ و $k^{-1}\in K$ لأن H و K زمر جزئية. لذلك $b\sim a$.

الانتقال: نفرض $a\sim b$ و $b\sim c$ لذلك $a=hbk$ و $b=h_1ck_1$ لبعض $h,h_1\in H$ و $k,k_1\in K$. إذن $a=hh_1ck_1k$ و $hh_1\in H$ و $kk_1\in K$ لأن H و K زمر جزئية. لذلك $a\sim c$.

١٧- غير ممكن لأنه إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة G فإن $H+a=a+H$ لكل $a\in G$.

١٨- لأي زمرة G ، نأخذ الزمرة الجزئية $H=G$.

١٩- الزمرة الجزئية $\{0\}$ من $\mathbb{Z}_6$.

٢٠- غير ممكن لأن الخلايا تكون مجموعات منفصلة غير خالية عددها لا يمكن أن يزيد عن رتبة الزمرة.

٢١- غير ممكن. عدد الخلايا يجب أن يقسم رتبة الزمرة و 4 لا تقسم 6.

٢٢- نفرض G زمرة من رتبة ≤ 2 ولكن لا تحتوي أي زمر جزئية غير تافهة. نفرض $a\in G$ ، $a\neq e$. إذن $\langle a\rangle$ تكون زمرة جزئية غير تافهة من G وبالتالي يجب أن تكون G. وحيث أن كل زمرة دائرية من رتبة ليست أولية يكون لها زمرة جزئية فعلية فإن G يجب أن تكون من رتبة منتهية أولية.

حلول تمارين ٩

١- إذا كان $n \geq 2$ فإن $|A_n| = \frac{|S_n|}{2}$ لذلك المجموعات المصاحبة لـ A_n فقط هي A_n ومجموعة كل التبديلات الفردية في S_n. لذلك المجموعات المصاحبة اليمنى والمجموعات المصاحبة اليسرى يجب أن تكون نفس الشيء و A_n تكون زمرة جزئية قياسية في S_n. ولأن S_n / A_n من رتبة 2 فإنها تكون متماثلة مع $\mathbb{Z}_2$. إذا كانت $n = 1$ فإن $A_n = S_n$ لذلك S_n / A_n تكون هي الزمرة التافهة المكونة من عنصر واحد.

٢- الانعكاس: حيث أن $i_e(H) = H$ لكل زمرة جزئية H من G.

إذن كل زمرة جزئية تكون متآلفة مع نفسها.

التماثل: نفرض ان $i_g(H) = K$. لذلك لكل $k \in K$ يكون $k = ghg^{-1}$ لعنصر واحد $h \in H$. إذن $h = (g^{-1})kg = (g^{-1})k(g^{-1})^{-1}$ وبالتالي $i_{g^{-1}}(K) = H$.

إذن K تكون أيضا متآلفة مع H.

الانتقال: نفرض أن $i_a(H) = K$ و $i_b(K) = S$ لعنصرين $a, b \in G$ وزمر جزئية H، K و S من G. إذن كل $s \in S$ يمكن أن تكتب على الصورة $s = bkb^{-1}$ لعنصر وحيد $k \in K$.

ولكن $k = aha^{-1}$ لعنصر وحيد $h \in H$. إذن

$$s = b(aha^{-1})b^{-1} = (ba)h(a^{-1}b^{-1})$$
$$= (ba)h(ba)^{-1}$$

لذلك $i_{ba}(H) = S$ وتكون H متآلفة مع S.

٣- لدينا $|G/H| = m$ وحيث أن رتبة كل عنصر من الزمرة المنتهية يقسم رتبة الزمرة فإن $(aH)^m = H$ لكل العناصر aH من G/H. باستخدام a كممثل لـ aH وبالحساب نحصل على $a^m \in H$ لكل $a \in G$.

٤- نفرض $\{H_i : i \in I\}$ مجموعة من الزمر الجزئية القياسية من الزمرة G. نفرض $K = \bigcap_{i \in I} H_i$. إذا كان $a,b \in K$ فإن $a,b \in H_i$ لكل $i \in I$ و $ab \in H_i$ لكل $i \in I$ لأن H_i زمرة جزئية من G. حيث أن $e \in H_i$ لكل $i \in I$ فإن $e \in K$. كذلك $a^{-1} \in K$. إذن K تكون زمرة جزئية من G. نفرض $g \in G$ و $k \in K$. إذن $k \in H_i$ لكل $i \in I$ وبالتالي $gkg^{-1} \in H_i$ لكل $i \in I$ لأن H_i زمرة جزئية قياسية من G. إذن $gkg^{-1} \in K$ وتكون K زمرة جزئية قياسية من G.

٥- نفرض $\{H_i : i \in I\}$ مجموعة من الزمر الجزئية القياسية من الزمرة G والتي تحتوي S. لاحظ أن G واحدة من هذه الزمر

الجزئية. لذلك I مجموعة غير خالية. نفرض $K=\bigcap_{i\in I}H_i$. من التمرين السابق نعلم أن K زمرة جزئية قياسية من G وبالطبع تحتوي S لأن H_i تحتوي S لكل $i\in I$. إذن K تكون محتواه داخل كل زمرة جزئية قياسية تحتوي S. لذلك K يجب أن تكون أصغر زمرة جزئية قياسية تحتوي S.

٦- نعتبر aC و bC عنصران في G/C. الآن $(aC)^{-1}=a^{-1}C$ و $(bC)^{-1}=b^{-1}C$. ولذلك باعتبار العناصر الممثلة نجد أن $(aC)(bC)(aC)^{-1}(bC)^{-1}=aba^{-1}b^{-1}C$. وحيث أن $aba^{-1}b^{-1}\in C$ لأن C تحتوي كل المبدلات في G. لذلك $(aC)(bC)(aC)^{-1}(bC)^{-1}=C$. إذن $(aC)(bC)=C(bC)(aC)=(bC)(aC)$ وهو مايبين أن G/C تكون إبدالية.

٧- نفرض $g\in G$. حيث أن التشاكل الذاتي الداخلي $i_g:G\to G$ يكون تناظر أحادي فإن $i_g(H)$ يكون لها نفس رتبة H. وحيث أن H هي الزمرة الجزئية الوحيدة من G من هذه الرتبة فإن $i_g(H)=H$ لكل $g\in G$. لذلك H تكون لاتغيرية بالنسبة للتشاكلات الذاتية الداخلية لـ G وبالتالي تكون زمرة جزئية قياسية من G.

٨- نعلم أن $H \cap N$ تكون زمرة جزئية من G محتواه في H ، لذلك تكون زمرة جزئية قياسية من H . نفرض $h \in H$ و $x \in H \cap N$. إذن $x \in N$ ، ولأن N زمرة جزئية قياسية من G فإن $hxh^{-1} \in N$ وبالطبع $hxh^{-1} \in H$ لأن $h,x \in H$. لذلك $hxh^{-1} \in H \cap N$ وتكون $H \cap N$ زمرة جزئية قياسية من H.

٩- تحصيل تشاكلين ذاتيين لـ G يكون تشاكل ذاتي لـ G وراسم الوحدة يكون تشاكل ذاتي لـ G وهو العنصر المحايد . كذلك الراسم العكسي للتشاكل الذاتي يكون تشاكل ذاتي لـ G . لذلك مجموعة كل التشاكلات الذاتية لـ G تكون زمرة مع عملية تحصيل الرواسم.

١١- (أ) $K = \{0,6,12\}$

(ب) $0+K = \{0,6,12\}$ ، $1+K = \{1,7,13\}$ ، $2+K = \{2,8,14\}$ ، $3+K = \{3,9,15\}$ ، $4+K = \{4,10,16\}$ ، $5+K = \{5,11,17\}$.

(جـ) $\phi(\mathbb{Z}_{18})$ هو الزمرة الجزئية $\{0,2,4,6,8,10\}$ في $\mathbb{Z}_{12}$.

(د) $\mu(0+K)=0$ ، $\mu(1+K)=10$ ، $\mu(2+K)=8$ ، $\mu(3+K)=6$ ، $\mu(4+K)=4$ ، $\mu(5+K)=2$.

١٣- (أ) $HN = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33\}$.

(ب) $0+N = \{0,9,18,27\}$.

$3+N=\{3,12,21,30\}$ ، $6+N=\{6,15,24,33\}$.

(جـ) $0+(H\cap N)=\{0,18\}$ ، $6+(H\cap N)=\{6,24\}$ ،

$12+(H\cap N)=\{12,30\}$.

(د) $\phi(0+N)=0+(H\cap N)$ ، $\phi(3+N)=12+(H\cap N)$،

$\phi(6+N)=6+(H\cap N)$.

١٤- نفـرض $x\in H\cap N$ ونفـرض $h\in H$. لأن $x\in H$ و H زمـرة جزئيـة نعلـم أن $hxh^{-1}\in H$ ولأن $x\in N$ و N زمـرة جزئية قياسية من G فإن $hxh^{-1}\in N$. لذلك $hxh^{-1}\in H\cap N$.

لذلك $H\cap N$ تكون زمرة جزئية قياسية من G .

١٥- (أ) نفرض $\gamma:G\to G/H$ التشاكل الطبيعي الفوقي من الزمرة G إلـى زمـرة القواسم. إذن $\gamma(K)=K/H=B$ تكـون زمـرة جزئية قياسية من $A=G/H$. بالمثل $\gamma(L)=L/H=C$ تكون زمرة جزئيـة قياسية من A. واضح أن $B=K/H$ تكون زمرة جزئية من $C=L/H$ لأن K زمرة جزئية من L.

(ب) نظرية ٢-٧-٣ تبين أن

$$(A/B)/(C/B)\cong A/C=(G/H)/(L/H)\cong G/L$$

حلول تمارين ١١

١- نفرض G زمرة رتبتها 40. إذن $o(G)=40=5^1\cdot 8$.

هنا 5 أولي و $(5,8)=1$. من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية H من رتبة 5.

حيث أن $5|o(G)$ و $5^2\nmid o(G)$ فإن هذه الزمرة H تكون زمرة سيلو 5 الجزئية.

من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو 5 الجزئية يكون على الصورة $1+5m$ بحيث $(1+5m)|o(G)$. وحيث أن $1+5m$ أولي بالنسبة إلى 5 ، $1+5m$ يجب أن يقسم 8 . وهذا يحدث فقط عندما $m=0$.

عندما $m=0$ يكون $1+5m=1$.

إذن توجد فقط زمرة سيلو 5 الجزئية واحدة من G وبالتالي تكون قياسية.

إذن G لها زمرة جزئية قياسية فعلية.

إذن G تكون زمرة ليست بسيطة.

٢- نفرض G زمرة من رتبة 20449 .

إذن $o(G)=20449=(11)^2\cdot 169$.

هنا 11 عدد أولي و $(11,169)=1$.

من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية H من رتبة 11^2 أي من رتبة 121.

حيث أن $11^2|O(G)$ و $11^3\nmid o(G)$ فإن هذه الزمرة الجزئية تكون زمرة سيلو 11 الجزئية من G.

من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو 11 الجزئية يكون على الصورة $1+11m$ بحيث $(1+11m)|o(G)$. وحيث أن $1+11m$ أولي بالنسبة إلى 11 وبالتالي بالنسبة إلى 11^2 ، $1+11m$ يجب أن يقسم 169 . وهذا يحدث فقط عندما $m=0$.

عندما $m=0$ يكون $1+11m=1$.

إذن توجد زمرة سيلو 11 الجزئية من G واحدة فقط.

إذن هذه الزمرة تكون قياسية.

إذن G لها زمرة جزئية قياسية فعلية.

إذن G تكون زمرة ليست بسيطة.

٣- نفرض G زمرة من رتبة 56.

إذن $o(G)=56=2^3\cdot 7$. هنا 2 عدد أولي و $(2,7)=1$.

من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية H من رتبة 2^3 أي من رتبة 8. وحيث أن $2^3|o(G)$ $2^4\nmid o(G)$ فإن هذه الزمرة تكون زمرة سيلو 2 الجزئية من G.

من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو 2 الجزئية يكون على الصورة $1+2m$ بحيث $(1+2m)|o(G)$. وحيث أن $1+2m$ أولي

بالنسبة إلى 2 وبالتالي بالنسبة إلى 2^3 ، $1+2m$ يجب أن يقسم 7 . وهذا يحدث عندما $m=0,3$.

عندما $m=0$ يكون $1+2m=1$.

عندما $m=3$ يكون $1+2m=7$.

إذن إما يوجد عدد 1 أو 7 زمرة سيلو2 الجزئية من G .

أيضا $o(G)=7\cdot 8$. هنا 7 أولي و $(7,8)=1$.

من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية من رتبة 7 وحيث أن $7|o(G)$ و $7^2\nmid o(G)$ فإن هذه الزمرة تكون زمرة سيلو7 الجزئية من G.

من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو7 الجزئية من G يكون على الصورة $1+7m$ بحيث $(1+7m)|o(G)$. وحيث أن $1+7m$ أولي بالنسبة إلى 7 ، $1+7m$ يجب أن يقسم 8 . وهذا يحدث عندما $m=0,1$.

عندما $m=0$ يكون $1+7m=1$.

عندما $m=1$ يكون $1+7m=8$.

إذن يوجد عدد إما 1 أو 8 زمرة سيلو7 الجزئية من G.

نفرض n_p ترمز إلى عدد زمر سيلو p الجزئية من G . هناك أربعة إحتمالات:

الحالة الأولى: $n_2=1$ و $n_7=1$.

في هذه الحالة G لها زمرة جزئية قياسية من رتب 7 و 8 . إذن G ليست بسيطة.

الحالة الثانية: $n_2=1$ و $n_7=8$.

في هذه الحالة G لها زمرة جزئية قياسية من رتبة 8 . إذن G ليست بسيطة.

الحالة الثالثة: $n_2=7$ و $n_7=1$.

في هذه الحالة G لها زمرة جزئية قياسية من رتبة 7 . إذن G ليست بسيطة.

الحالة الرابعة: $n_2=7$ و $n_7=8$.

$n_7=8$ يؤدي إلى وجود عدد 8 زمرة سيلو7 الجزئية من G مختلفة، لتكن $H_1,H_2,...,H_8$. الآن $H_i \cap H_j \subset H_i$ لكل $1 \le i,j \le 8$.

إذن $H_i \cap H_j$ تكون زمرة جزئية من H_i.

$o(H_i \cap H_j) | o(H_i)$. أي أن $o(H_i \cap H_j) | 7$.

إذن $o(H_i \cap H_j)$ يساوي 1 أو 7.

$H_i \neq H_j$ يؤدي إلى $H_i \cap H_j \neq H_i$.

إذن $o(H_i \cap H_j)=1$ أي أن $H_i \cap H_j=\{e\}$.

أيضا $e \neq a \in H_i$ يؤدي إلى $a^7=e$.

إذن $o(a)=7$ لكل $e \neq a \in H_i$.

إذن يوجد $8(7-1)=48$ عنصر يختلف عن عنصر الوحدة من رتبة 7.

حيث أن $56-48=8$ ، العناصر الباقية والتي عددها 8 يمكن أن تكون على الأكثر زمرة سيلو2 الجزئية من رتبة 8. إذن $n_2 \neq 7$.

وهذه الحالة غير ممكنة.

إذن الزمرة G ليست بسيطة.

٤- لدينا $o(G)=28$. إذن $o(G)=7\cdot 4$.

هنا 7 عدد أولي و $(7,4)=1$.

من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية H من رتبة 7.

وحيث أن $7|o(G)$ و $7^2 \nmid o(G)$ ، H تكون زمرة سيلو7 الجزئية من G.

من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو7 الجزئية تكون على الصورة $1+7m$ حيث $(1+7m)|o(G)$.

حيث أن $1+7m$ أولية بالنسبة إلى 7 ، $1+7m$ يجب أن تقسم 4.

وهذا يحدث فقط عندما $m=0$. في هذه الحالة $1+7m=1$.

إذن توجد زمرة سيلو7 الجزئية واحدة فقط وهذه يجب أن تكون قياسية.

نفرض K زمرة جزئية قياسية من G من رتبة 4.

الآن $H\cap K\subset H$ و $o(H)=7$. إذن $o(H\cap K)|7$.

إذن $o(H\cap K)$ تساوي 1 أو 7.

إذن $o(H\cap K)=1$ (لأن $o(H\cap K)<o(H)$).

الآن $28=\frac{7\cdot 4}{1}=\frac{o(H)o(K)}{o(H\cap K)}=o(HK)$. إذن $HK=G$.

حيث أن H و K زمرتان جزئيتان قياسيتان من G و $H\cap K=\{e\}$، يكون $hk=kh$ لكل $h\in H$ و $k\in K$.

نفرض $g_1,g_2\in G$. إذن $g_1=h_1k_1$ و $g_2=h_2k_2$ لبعض $h_1,h_2\in H$ و $k_1,k_2\in K$.

إذن
$$g_1g_2=(h_1k_1)(h_2k_2)=h_1(k_1h_2)k_2$$
$$=h_1(h_2k_1)k_2=(h_1h_2)(k_1k_2)$$

H إبدالية لأن الزمر من رتب أولية تكون دائرية وبالتالي تكون إبدالية.

K إبدالية لأن $o(K)=p^2$ حيث $p=2$. إذن
$$g_1g_2=(h_2h_1)(k_2k_1)=h_2(h_1k_2)k_1=h_2(k_2h_1)k_1$$
$$=h_2(k_2h_1)k_1=(h_2k_2)(h_1k_1)=g_2g_1$$

٥- نفرض G زمرة من رتبة 48. إذن $o(G)=16\cdot 3=2^4\cdot 3$.

هنا 2 عدد أولي و $(2,3)=1$.

من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية من رتبة 2^4 .

حيث أن $2^4 | o(G)$ و $2^5 \nmid o(G)$ ، إذن هذه الزمرة تكون زمرة سيلو2 الجزئية من G.

من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو2 الجزئية من G يكون على الصورة $1+2m$ حيث $(1+2m) | o(G)$. وحيث أن $1+2m$ أولي بالنسبة إلى 2 وبالتالي بالنسبة إلى 2^4 فإن $1+2m$ يجب أن يقسم 3.

ولكن $1+2m$ يقسم 3 عندما $m=0,1$.

عندما $m=0$ يكون $1+2m=1$.

عندما $m=1$ يكون $1+2m=3$.

إذن يوجد عدد إما 1 أو 3 زمر سيلو2 الجزئية من G.

الحالة الأولى: $n_2=1$ في هذه الحالة توجد زمرة جزئية قياسية من رتبة 16.

إذن G ليست بسيطة.

الحالة الثانية: $n_2=3$. نفرض H و K زمر سيلو2 الجزئية من G.

إذن $o(H)=16$ و $o(K)=16$.

الآن $$o(HK)=\frac{o(H)o(K)}{o(H\cap K)}=\frac{16\cdot 16}{o(H\cap K)}=\frac{256}{o(H\cap K)}$$

ولكن $o(HK)\le 48$. إذن $\frac{256}{o(H\cap K)}\le 48$.

إذن $o(H \cap K) \geq \frac{256}{48} = \frac{16}{3}$.

أيضا $H \cap K$ زمرة جزئية من H ، إذن $o(H \cap K) | o(H)$.

أي أن $o(H \cap K) | 16$. إذن $o(H \cap K)$ يساوي 8 أو 16.

إذا كان $H \neq K$ فإن $H \cap K \subset H$.

إذن $o(H \cap K) < o(H)$. إذن $o(H \cap K) = 8$.

الآن $[H : H \cap K] = \frac{o(H)}{o(H \cap K)} = \frac{16}{8} = 2$.

إذن $H \cap K$ تكون زمرة جزئية قياسية من H.

بالمثل $H \cap K$ تكون زمرة جزئية قياسية من K.

وحيث أن $N(H \cap K)$ هي أكبر زمرة جزئية من G تكون فيها $H \cap K$ قياسية ،

إذن $K \subset N(H \cap K)$ و $H \subset N(H \cap K)$.

إذن $16 | o(N(H \cap K))$ ، $o(N(H \cap K)) < 48$

و $o(N(H \cap K)) | 48$.

إذن $o(N(H \cap K)) = 16$. إذن $H \cap K = N(H \cap K)$.

إذن $H \cap K$ تكون زمرة جزئية قياسية من G لأن $N(H \cap K)$ كذلك.

حيث أن $H \cap K$ زمرة جزئية قياسية فعلية من G فإن G تكون ليست بسيطة.

حلول تمارين ١٢

٢- الزمرة دائرية لأنه يوجد عنصر من رتبة 12

العنصر	الرتبة	العنصر	الرتبة	العنصر	الرتبة
(0,0)	1	(1,0)	3	(2,0)	3
(0,1)	4	(1,1)	12	(2,1)	12
(0,2)	2	(1,2)	6	(2,2)	6
(0,3)	4	(1,3)	12	(2,3)	12

٣- $lcm(2,2)=2$ ٤- $lcm(3,5)=15$ ٥- $lcm(3,9)=9$

٦- $lcm(4,6,5)=60$ ٧- $lcm(4,2,5,3)=60$

٨- $\{(0,0),(1,0)\}$, $\{(0,0),(0,1)\}$, $\{(0,0),(1,1)\}$

٩- يوجد عدد 7 زمرة جزئية من رتبة 2

$\langle(1,0,0)\rangle, \langle(0,1,0)\rangle, \langle(0,0,1)\rangle, \langle(1,1,0)\rangle,$

$\langle(1,0,1)\rangle, \langle(0,1,1)\rangle, \langle(1,1,1)\rangle$.

يوجد عدد 7 زمرة جزئية من رتبة 4

$$\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$$
$$\{(0,0,0),(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$$
$$\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$$
$$\{(0,0,0),(1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$$
$$\{(0,0,0),(1,1,0),(0,1,2),(1,0,2)\}$$
$$\{(0,0,0),(1,1,2),(0,1,0),(1,0,2)\}$$
$$\{(0,0,0),(0,1,2),(0,0,2),(0,1,0)\}$$

١١- متماثلتان. كل منهما تكون متماثلة مع الزمرة $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

١٢- القيمة العظمى الممكنة للرتبة هي $lcm(4,18,15)=180$.

١٣- (أ) نعم، لها زمرة جزئية واحدة فقط من رتبة 8 لأن $8\cdot 9=72$ ، لذلك الزمرة الجزئية من رتبة 8 تتكون من كل العناصر التي لها رتبة تقسم 8.

(ب) لا، إذا كانت الزمرة $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9$ فإنه يكون لها زمرة جزئية واحدة من رتبة 4 $\{(0,0),(2,0),(4,0),(6,0)\}$. أما إذا كانت متماثلة مع $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9$ فإنه يكون لها أكثر من زمرة جزئية من رتبة 4 منها $\{(0,0,0),(0,1,0),(0,2,0),(0,3,0)\}$

و $\{(0,0,0),(2,0,0),(0,2,0),(2,2,0)\}$

١٤- نفرض G زمرة إبدالية ونفرض $a,b\in G$ من رتبة منتهية. إذن $a^r=b^s=e$ حيث r و s أعداد صحيحة موجبة. وحيث أن G إبدالية فإن $(ab)^{rs}=(a^r)^s(b^s)^r=e^se^r=ee=e$.

لذلك ab يكون من رتبة منتهية وهذا يبين أن المجموعة الجزئية H من G المكونة من كل العناصر التي لها رتبة منتهية تكون مغلقة بالنسبة لعملية الزمرة. بالطبع $e\in H$ لأن e من رتبة 1.

إذا كان $a\in H$ فإن $a^r=e$ لعدد صحيح r. ولكن $a^{-r}=(a^{-1})^r=e$. لذلك $a^{-1}\in H$. إذن H تكون زمرة جزئية من G.

١٥- الحسابات في الضرب المباشر لـ n زمرة تنتج من الحسابات باستخدام عمليات الزمر كل على حده في كل مركبة. لذلك إذا كانت

العمليات على الزمر المكونة للضرب المباشر جميعها إبدالية فإن الضرب المباشر أيضا يكون زمرة إبدالية.

١٦- $\mathbb{Z}_p$ مثال ، لأي عدد أولي p.

١٨- نفرض $G_1=\langle a\rangle$ و $G_2=\langle b\rangle$.

إذن $G_1=\{e_1,a\}$ و $G_2=\{e_2,b,b^2\}$ حيث e_1 و e_2 هما العنصران المحايدان في G_1 و G_2 على الترتيب.الآن

$$G_1\times G_2=\{(e_1,e_2),(e_1,b),(e_1,b^2),(a,e_2),(a,b),(a,b^2)\}$$

إذن الضرب الخارجي المباشر يكون زمرة من رتبة 6.

حيث أن G_1 و G_2 إبداليتان (لأن الزمر الدائرية تكون إبدالية) إذن $G_1\times G_2$ تكون أيضا إبدالية.

لدينا $o(a)=2$ و $o(b)=3$.

الآن $(a,b)\in G_1\times G_2$ و $(a,b)\neq(e_1,e_2)$

حيث أن $(a,b)^2=(a^2,b^2)=(e_1,b^2)\neq(e_1,e_2)$

و $(a,b)^3=(a^3,b^3)=(a^3,e_2)=(a,e_2)\neq(e_1,e_2)$

إذن $o((a,b))>3$. وحيث أن $o((a,b))|o(G_1\times G_2)$.

إذن $o((a,b))|6$. إذن $o((a,b))$ يجب أن يكون 6.

إذن $G_1\times G_2$ من رتبة 6 وتحتوي عنصر من رتبة 6 .

إذن $G_1 \times G_2$ الضرب الخارجي المباشر يجب أن يكون زمرة دائرية.

٢٤- حيث أن الزمرة G هي الضرب الداخلي المباشر للزمرتين الجزئيتين القياسيتين N_1 و N_2 ، إذن كل عنصر في G يمكن التعبير عنه بصورة وحيدة كحاصل ضرب عنصر من N_1 مع عنصر من N_2. نعرف الراسم $\phi : G \to N_2$ بالصورة $\phi(n_1 n_2) = n_2$ لكل $n_1 n_2 \in G$.

يمكن بسهولة إثبات أن هذا الراسم تشاكل فوقي (تحقق من ذلك)

إذن من نظرية التشاكل الأساسية $G / \ker(\phi) \cong N_2$.

نفرض $n_1 n_2 \in \ker(\phi)$. إذن $\phi(n_1 n_2) = e$. ومنها $n_2 = e$.

إذن $n_1 n_2 = n_1 e = n_1 \in N_1$. إذن $\ker(\phi) \subset N_1$.

نفرض $n_1 \in N_1$ إذن $n_1 e \in G$ و $\phi(n_1 e) = e$.

إذن $n_1 e \in \ker(\phi)$. إذن $n_1 \in \ker(\phi)$. إذن $N_1 \subset \ker(\phi)$.

إذن $\ker(\phi) = N_1$. إذن $G / N_1 \cong N_2$.

بالمثل يمكن إثبات أن $G / N_2 \cong N_1$.