الفصل الحادي عشر

نظريات سيلو Sylow's Theorems

تحتل نظريات سيلو موقعا هاما في نظرية الزمر المنتهية فهي تعتبر من الأدوات المفيدة جدا في دراسة بنية الزمر غير الإبدالية. وعلى وجه الخصوص عملية وجود أو عدم وجود زمرة بسيطة من رتبة معينة تعتبر من التطبيقات الهامة على نظريات سيلو.

نظرية ١١-١. (نظرية كوشي للزمر الإبدالية). نفرض G زمرة إبدالية منتهية و $p|o(G)$، حيث p عدد أولي. إذن يوجد $a \in G$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$.

البرهان: إذا كان $p|o(G)$ فإن $o(G) = n_1 p$ حيث $n_1 \geq 1$.

سوف نستخدم مبدأ الاستنتاج في برهان النظرية.

إذا كانت $n_1 = 1$ فإن $o(G) = p$. وحيث أن $o(G)$ عدد أولي فإن G تكون دائرية. لذلك يوجد $a \in G$ بحيث $G = \langle a \rangle$ ويكون $o(a) = p$. إذن $a \in G$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$. وتكون النتيجة صحيحة عندما $n_1 = 1$.

الآن نفرض أن النتيجة صحيحة لكل زمرة إبدالية G' حيث $o(G') = n_2 p$ و $n_2 < n_1$.

حيث أن $o(G)=n_1p$، عدد ليس أولي، إذن G يجب أن يكون لها زمرة جزئية فعلية. نفرض أنه توجد زمرة فعلية H من G بحيث $p|o(H)$.

نفرض $o(H)=mp$ لذلك $m<n_1$.

إذن H تكون زمرة إبدالية بحيث أن $o(H)=mp$ و $m<n_1$.

من فرض الاستنتاج، يوجد $a\in H$ بحيث $a\neq e$ و $a^p=e$.

حيث أن $H\subset G$، يكون $a\in G$. إذن يوجد $a\in G$ بحيث $a\neq e$ و $a^p=e$.

الآن نفرض أنه لا توجد زمرة جزئية من G رتبتها مضاعف p.

نفرض H أي زمرة جزئية من G. إذن $p\nmid o(H)$.

حيث أن G إبدالية، H تكون زمرة جزئية قياسية من G.

إذن زمرة القواسم G/H تكون معرفة وإبدالية.

الآن $o(G/H)=\dfrac{o(G)}{o(H)}<o(G)$ (حيث أن $o(H)>1$).

كذلك $p|o(G/H)$ لأن $p|o(G)$ و $p\nmid o(H)$.

نفرض $o(G/H)=m'p$، حيث $m'<n_1$.

إذن G/H تكون زمرة إبدالية حيث $o(G/H)=m'p$ و $m'<n_1$.

إذن من فرض الاستنتاج يوجد $Hb\in G/H$ بحيث $Hb\neq H$ (H هوالعنصر المحايد في G/H) و $(Hb)^p=H$.

إذن $Hb^p = H$ وهذا يعني أن $b^p \in H$.

إذن $(b^p)^{o(H)} = e$ وهذا يؤدي إلى $(b^{o(H)})^p = e$. إذن $a^p = e$ ،

حيث $a = b^{o(H)}$.

الآن إذا كان $b \in G$ فإن $b^{o(H)} \in G$ ، أي أن $a \in G$.

إذا كان $a = e$ فإن $b^{o(H)} = e$. إذن $Hb^{o(H)} = H$.

وهذا يؤدي إلى $(Hb)^{o(H)} = H$. إذن $o(Hb) | o(H)$. أي أن $p | o(\mathrm{H})$.

(بما أن $(Hb)^p = H$ و p أولي، إذن $o(Hb) = p$).

وهذا غير ممكن لأن $p \nmid o(H)$. إذن $a \neq e$.

إذن يوجد $a \in G$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$. وهذا يكمل البرهان.

ملاحظة ١١-٢. إذا كان $o(a) = n$ فإن $n | p$ وهذا يؤدي إلى أن $n = 1$ أو $n = p$. إذن $n = p$ لأن $a \neq e$. إذن $o(a) = p$.

نظرية ١١-٣.(نظرية كوشي للزمر غير الإبدالية) نفرض G زمرة منتهية و $p | o(G)$ حيث p عدد أولي. إذن يوجد $a \in G$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$.

البرهان: إذا كان $p | o(G)$ فإن $o(G) = n_1 p$ حيث $n_1 \geq 1$.

سوف نستخدم مبدأ الاستنتاج على n_1 في برهان النظرية.

إذا كانت $n_1 = 1$ فإن $o(G) = p$. وحيث أن $o(G)$ عدد أولي فإن G يجب أن تكون دائرية. لذلك يوجد $a \in G$ بحيث $G = \langle a \rangle$ ويكون $o(a) = p$. إذن $a \in G$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$. وتكون النظرية صحيحة عندما $n_1 = 1$.

الآن نفرض أن النظرية صحيحة لكل زمرة G' حيث $o(G') = n_2 p$ و $n_2 < n_1$.

حيث أن $o(G) = n_1 p$، عدد ليس أولي، وكل زمرة رتبتها ليست عدد أولي يجب أن يكون لها زمرة جزئية فعلية، إذن G يجب أن يكون لها زمرة جزئية فعلية. نفرض أنه توجد زمرة فعلية H من G بحيث $p \mid o(H)$.

نفرض $o(H) = mp$. إذن $m < n_1$.

إذن H تكون زمرة بحيث أن $o(H) = mp$ و $m < n_1$.

من فرض الاستنتاج، يوجد $a \in H$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$.

حيث أن $H \subset G$، يكون $a \in G$. إذن يوجد $a \in G$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$.

الآن نفرض أنه لا توجد زمرة جزئية من G رتبتها مضاعف p.

نفرض Z مركز الزمرة G. معادلة الفصول للزمرة G هي

$$o(G) = o(Z) + \sum_{a \notin Z} \frac{o(G)}{o(N(a))}$$

حيث المجموع يكون على العناصر a مأخوذ عنصر واحد من كل فصل ترافق يحتوي أكثر من عنصر.

إذا كانت $a \notin Z$ فإن $N(a)$ تكون زمرة جزئية فعلية من G.

لذلك $p \nmid o(N(a))$ وهذا يؤدي إلى $p \mid \frac{o(G)}{o(N(a))}$

وبالتالي $p \mid \sum_{a \notin Z} \frac{o(G)}{o(N(a))}$.

إذن $p \mid \left(o(G) - \sum_{a \notin Z} \frac{o(G)}{o(N(a))} \right)$. إذن $p \mid o(Z)$.

وحيث أن Z زمرة جزئية من G و $p \mid o(Z)$، من الفرض Z لا يمكن أن تكون زمرة جزئية فعلية من G. إذن $Z = G$.

وحيث أن Z زمرة إبدالية، إذن G تكون زمرة إبدالية. إذن من نظرية كوشي للزمر الإبدالية يوجد عنصر $a \in G$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$. وهذا يكمل البرهان.

ملاحظة ٤-١١. إذا كانت G زمرة منتهية و p عدد أولي بحيث $p \mid o(G)$ فإنه من نظرية كوشي يوجد عنصر $a \in G$ بحيث $a \neq e$ و $a^p = e$. إذن $o(a) = p$ والمجموعة $\{e, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}$ تكون زمرة جزئية من G من رتبة p و $p \mid o(G)$. إذن G لها زمرة جزئية من رتبة p. إذن عكس نظرية لاجرانج يكون صحيحا للعوامل الأولية لرتبة G.

مبرهنة ١١-٥. نفرض G زمرة رتبتها $2p$، حيث p عدد أولي. أثبت أن G لها زمرة جزئية قياسية.

الإثبات: حيث أن $p|o(G)$ ، إذن من نظرية كوشي يوجد عنصر $a\in G$ بحيث $a\neq e$ و $a^p=e$. إذن $H=\{e,a,a^2,...,a^{p-1}\}$ تكون زمرة جزئية من G من رتبة p. إذن دليل H في G يكون

$$[G:H]=\frac{o(G)}{o(H)}=\frac{2p}{p}$$

إذن H تكون زمرة جزئية قياسية.

مبرهنة ١١-٥. بين أن الزمرة الإبدالية من رتبة pq ، حيث p و q عددان أوليان، تكون دائرية.

الإثبات: نفرض G زمرة إبدالية من رتبة pq. حيث أن p و q عددان أوليان مختلفان وكل منهما يقسم pq، من نظرية كوشي يوجد عنصران $a,b\in G$ بحيث $a\neq e$ ، $b\neq e$ ، $a^p=e$ و $b^p=e$.

نفرض أن $o(a)=n$ حيث $1\leq n\leq p$. إذن $n|p$. إذن $n=1$ أو $n=p$. إذن $n=p$ لأن $a\neq e$. إذن $o(a)=p$. بالمثل $o(b)=q$.

سوف نوضح أن $ab\neq e$. نفرض أن $ab=e$.

إذن $a^{-1}(ab)=a^{-1}e$. ومنها نحصل على $b=a^{-1}$.

إذن $o(b)=o(a^{-1})$ وهذا يؤدي إلى $o(b)=o(a)$.

إذن $p=q$ وهذا يناقض الفرض. إذن $ab\neq e$.

حيث أن $ab \in G$ ، إذن $o(ab)|o(G)$. أي أن $o(ab)|pq$.

إذن $o(ab)$ يكون 1 أو p أو q أو pq. نفرض $p<q$.

إذا كان $o(ab)=1$ فإن $ab=e$ وهذا مرفوض.

إذا كان $o(ab)=p$ فإن $e=(ab)^p=a^pb^p=eb^p=b^p$.

أي أن $b^p=e$ وهذا غير ممكن لأن $o(b)=q$ و $p<q$.

إذا كان $o(ab)=q$ فإن $e=(ab)^q=a^qb^q=a^qe=a^q$.

أي أن $a^q=e$.

وحيث أن $p<q$ ، من خوارزمية القسمة يوجد عددان صحيحان r و k بحيث $q=pk+r$ حيث $0\le r<p$. إذن

$$e=a^q=a^{pk+r}=(a^p)^k a^r=e^k a^r=a^r$$

أي أن $a^r=e$ وهذا غير ممكن حيث أن $o(a)=p$ و $r<p$.

إذن الاحتمال المتبقي هو اختيار واحد فقط وهو $o(ab)=pq$.

وحيث أن $o(G)=pq$ ، إذن G تكون زمرة دائرية.

ملاحظة. الزمر الإبدالية من رتب 6 ، 10 ، 14 ، 21 ، 22 جميعها دائريـــــة. لأن $6=2\times 3$ ، $10=2\times 5$ ، $14=2\times 7$ ، $21=3\times 7$ ، $22=2\times 11$.

مبرهنة ١١-٦. بين أن كل زمرة إبدالية من رتبة 6 تكون دائرية.

الإثبات: نفرض G زمرة إبدالية من رتبة 6. حيث أن 2 و 3 أعداد أولية وكلاهما يقسم 6 ، من نظرية كوشي يوجد عنصران $a,b \in G$ بحيث $a \neq e$ ، $b \neq e$ ، $a^2 = e$ و $b^3 = e$.

إذن $o(a) = 2$ و $o(b) = 3$.

سوف نوضح أن $ab \neq e$. نفرض $ab = e$.

إذن $b = a^{-1}$. إذن $o(b) = o(a^{-1})$ ومنها $o(b) = o(a)$.

إذن $3 = 2$ وهذا غير ممكن. إذن $ab \neq e$.

الآن $(ab)^2 = (ab)(ab) = a(ba)b = a^2b^2 = eb^2 = b^2 \neq e$

أيضا $(ab)^3 = (ab)^2(ab) = (a^2b^2)(ab)$

$$= (a^2a)(b^2b) = (a^2a)(b^3) = (ea)e \neq e$$

إذن $o(ab) > 3$. وحيث أن $o(ab)$ تقسم 6، إذن قيمة $o(ab)$ يجب أن تكون 6. إذن G تكون دائرية.

مثال ١١-٧. أوجد كل الزمر غير الإبدالية من رتبة 6.

الحل: نفرض G زمرة غير إبدالية من رتبة 6. حيث أن 2 و 3 عددان أوليان وكلاهما قاسم لـ 6 ، من نظرية كوشي يوجد عنصران $a,b \in G$ بحيث $a \neq e$ ، $b \neq e$ ، $a^2 = e$ و $b^3 = e$.

إذن $o(a) = 2$ و $o(b) = 3$.

نفرض $H = \langle b \rangle$. إذن $o(H) = o(b) = 3$.

إذن $[G:H] = \frac{o(G)}{o(H)} = \frac{6}{3} = 2$.

وحيث أن كل زمرة جزئية دليلها 2 تكون قياسية، إذن H تكون زمرة جزئية قياسية من G.

إذا كان $a \in H$ فإن $o(a)|o(H)$ ، أي أن $3|2$ وهذا غير ممكن.

إذن $a \notin H$.

إذن H و Ha هما المجموعتان المصاحبتان لـ H في G الوحيدتان المختلفتان.

إذن $$G = H \cup Ha = \{e, b, b^2, ea, ba, b^2a\}$$
$$= \{e, b, b^2, a, ba, b^2a\}$$

وحيث أن H زمرة جزئية قياسية فإن $aba^{-1} \in H$.

إذن aba^{-1} تكون e أو b أو b^2 .

إذا كانت $aba^{-1} = e$ فإن $a^{-1}(aba^{-1})a = a^{-1}ea$. أي أن $b = e$ وهذا غير صحيح.

إذا كان $aba^{-1} = b$ فإن $ab = ba$.

باستخدام $ab = ba$ يمكننا إثبات أن $xy = yx$ لكل $x, y \in G$.

إذن G تكون زمرة إبدالية وهذا غير صحيح.

إذن $aba^{-1} = b^2$ وهذا يعني أن $aba^{-1} = b^{-1}$.

إذن $G = \{e, b, b^2, a, ba, b^2a\}$ حيث $a^2 = e = b^3$ و $aba^{-1} = b^{-1}$.

وهذه هي الزمرة الوحيدة غير الإبدالية من رتبة 6.

نظرية ١١-٨. أثبت صحة عكس نظرية لاجرانج للزمر الإبدالية المنتهية.

البرهان: نفرض G زمرة إبدالية منتهية من رتبة n.

سوف نبرهن النظرية باستخدام الاستنتاج على n.

عندما $n=1$ واضح أن النتيجة تكون محققة.

نفرض أن النظرية صحيحة لجميع الزمر الإبدالية المنتهية من رتبة أقل من n. نفرض أن $m|n$. سوف نبرهن أنه توجد زمرة جزنية من G من رتبة m.

إذا كانت $m=1$ فإن $\{e\}$ تكون هي الزمرة المطلوبة.

لذلك نفرض أن $m>1$. نفرض p عدد أولي بحيث $p|\mathrm{m}$. إذن $p|n$. من نظرية كوشي للزمر الإبدالية يوجد $a\in G$ بحيث $a\neq e$ ، $a^p=e$. نفرض $o(a)=\lambda$. إذن $\lambda|p$.

إذن $\lambda=1$ أو $\lambda=p$. وحيث أن $a\neq e$ فإن $\lambda\neq 1$. إذن $\lambda=p$.

إذن $o(a)=p$. نفرض $N=\{e,a,a^2,\ldots,a^{p-1}\}$.

إذن N تكون زمرة جزنية من G. وحيث أن G إبدالية ، إذن N تكون زمرة جزنية قياسية من G.

إذن G/N تكون زمرة إبدالية منتهية.

الآن $o(G/N)=\dfrac{o(G)}{o(N)}=\dfrac{n}{p}<n$.

أيضا $o(G)=o(G/N)o(N)$ .... (١)

لدينا $p\,|\,m$ و $m\,|\,n$. إذن يوجد عددان صحيحان موجبان λ_1 و λ_2

بحيث $m=\lambda_1 p$ و $n=\lambda_2 m$.

من (١) نحصل على $n=o(G/N)\cdot p$.

إذن $\lambda_2 m=o(G/N)\cdot p$ وهذا يؤدي إلى $\lambda_1 p\lambda_2=o(G/N)\cdot p$.

لذلك $o(G/N)=\lambda_1\lambda_2$ وبالتالي $\lambda_1\,|\,o(G/N)$.

إذن G/N تكون زمرة إبدالية منتهية من رتبة أقل من n.

من فرض الاستنتاج، G/N يكون لها زمرة جزئية H/N من رتبة λ_1. لذلك $o(H/N)=\lambda_1$ حيث H زمرة جزئية من G تحتوي N. وبالتالي $\frac{o(H)}{o(N)}=\lambda_1$ ومنها نحصل على

$$o(H)=\lambda_1 o(N)=\lambda_1 p=m\ .$$

إذن H تكون زمرة جزئية من G من رتبة m. وهذا يكمل البرهان.

مبرهنة ١١-٩. نفرض G زمرة منتهية من رتبة p^n ، حيث p عدد أولي. برهن على أن G لها زمر جزئية من الرتب 1 ، p ، p^2 ، ... ، p^n.

الإثبات: لدينا $o(G)=p^n$. نحاول إثبات النتيجة باستخدام مبدأ الاستنتاج.

نفرض $n=1$. إذن $o(G)=p^1=p$.

هنا $\{e\}$ و G زمر جزئية من G من رتبة 1 و p على الترتيب.

إذن النتيجة تكون صحيحة عندما $n=1$.

الآن نفرض صحة النتيجة لكل زمرة G' من رتبة p^{n_1} حيث $n_1<n$.

حيث أن $o(G)=p^n$، إذن $o(Z)>1$ حيث Z هو مركز الزمرة G.

إذن $o(Z)|o(G)$ ، أي أن $o(Z)|p^n$.

نفرض $o(Z)=p^m$ لبعض $0<m\le n$. إذن $p|o(Z)$.

من نظرية كوشي يوجد $a\in Z$ بحيث $a\ne e$ و $a^p=e$.

إذن $H=\{e,a,a^2,...,a^{p-1}\}$ تكون زمرة جزئية من Z من رتبة p.

وحيث أن p عدد أولي فإن H تكون دائرية.

إذن H تكون زمرة جزئية قياسية من G. إذن G/H تكون زمرة و

$$o(G/H)=\frac{o(G)}{o(H)}=\frac{p^n}{p}=p^{n-1}<p^n$$

من فرض الاستنتاج G/H يكون لها زمر جزئية H/H ، H_1/H ، H_2/H ،...، H_{n-1}/H من رتب 1، p، p^2 ،...، p^{n-1} على الترتيب.

إذن H ، H_1 ، H_2 ،...، H_{n-1} تكون زمر جزئية من G من رتب p، p^2 ،...، p^n على الترتيب.

إذن $\{e\}$ ، H ، H_1 ، H_2 ،...، H_{n-1} تكون زمر جزئية من G من رتب 1، p، p^2 ،...، p^n على الترتيب. وهذا يكمل البرهان.

نظرية ١١-١٠. (نظرية سيلو الأولى) Sylow's first theorem

نفرض G زمرة منتهية من رتبة $p^k q$ حيث p عدد أولي و $q,k \in \mathbb{N}$ و $(p,q)=1$. إذن لكل i $(1 \le i \le k)$ G يكون لها على الأقل زمرة جزئية واحدة من رتبة p^i .

البرهان: لدينا $o(G)=p^k q$ حيث $q,k \in \mathbb{N}$ و $(p,q)=1$.

سوف نبرهن النظرية باستخدام الاستنتاج على $o(G)$.

نفرض $p=2$ و $k=1$ و $q=1$. إذن $o(G)=2^1 \cdot 1=2$.

حيث أن G زمرة جزئية من G، إذن G هي الزمرة الجزئية المطلوبة من رتبة 2^1 أي من رتبة 2.

الآن نفرض صحة النظرية لكل الزمر من رتبة أقل من $o(G)$.

نفرض Z مركز الزمرة G . إذن Z زمرة جزئية قياسية إبدالية من G.

الآن إما $p \mid o(Z)$ أو $p \nmid o(Z)$.

الحالة الأولى: $p \mid o(Z)$. حيث أن Z زمرة إبدالية منتهية و $p \mid o(Z)$ من نظرية كوشي للزمر الإبدالية يوجد عنصر $a \in Z$ بحيث $a \neq e$ و $a^p=e$. حيث أن p أولي فإن $o(a)=p$.

إذا كان $k=1$ فإن $o(G)=pq$ و $\langle a \rangle$ تكون هي الزمرة الجزئية المطلوبة من رتبة p.

نفرض $k>1$ ، إذن $a \in Z$ يؤدي إلى $ax=xa$ لكل $x \in G$.

الآن لأي $x \in G$

$$a^{i+1}x = a(a^i x) = a(xa^i) = (ax)a^i = (xa)a^i = xa^{i+1}$$

إذن بالاستنتاج $a^m x = xa^m$ لكل $m \in \mathbb{N}$ و $x \in G$.

إذن $\langle a \rangle$ تكون زمرة جزئية قياسية من G. إذن

$$o(G/\langle a \rangle) = \frac{o(G)}{o(\langle a \rangle)} = \frac{p^k q}{p} = p^{k-1}q < p^k q$$

من فرض الاستنتاج $G/\langle a \rangle$ تحتوي زمر جزئية H_1، H_2، ...، H_{k-1} من رتب p، p^2، ...، p^{k-1} على الترتيب.

نفرض $H_i = K_i/\langle a \rangle$ ، حيث K_i زمرة جزئية من G تحتوي $\langle a \rangle$، $1 \le i \le k-1$.

إذن $o(K_i) = o(H_i)o(\langle a \rangle) = p^i p = p^{i+1}$ ، $1 \le i \le k-1$.

إذن $\langle a \rangle$، K_1، K_2، ...، K_{k-1} تكون زمر جزئية من G من رتب p، p^2، ...، p^{k-1} على الترتيب.

الحالة الثانية : $p \nmid o(Z)$. معادلة الفصول للزمرة G هي

$$o(G) = o(Z) + \sum_{a \notin Z} \frac{o(G)}{o(N(a))}$$

حيث المجموع يجري على العناصر a مأخوذ عنصر واحد من كل فصل ترافق يحتوي أكثر من عنصر.

نفرض أن $p \mid \frac{o(G)}{o(N(a))}$ لكل $a \notin Z$.

إذن $\text{p}|\sum_{a\notin Z}\frac{o(G)}{o(N(a))}$ وهذا يؤدي إلى $p|(o(G)-\sum_{a\notin Z}\frac{o(G)}{o(N(a))})$.

إذن $p|o(Z)$ وهذا يناقض الفرض.

إذن يوجد على الأقل عنصر واحد $a\in G$ بحيث $p\nmid\frac{o(G)}{o(N(a))}$ و $a\notin Z$.

الآن $o(G)=\frac{o(G)}{o(N(a))}\times o(N(a))$ و $p^k|o(G)$ و $p\nmid\frac{o(G)}{o(N(a))}$. لذلك يجب أن يكون $p^k|o(N(a))$.

أيضا $a\notin Z$ يؤدي إلى $N(a)\neq G$ وهذا يؤدي إلى $o(N(a))<o(G)$. إذن من فرض الاستنتاج $N(a)$ يكون لها على الأقل زمرة جزئية واحدة من رتبة p^i حيث $i=1,2,...,k$. وحيث أن $N(a)$ زمرة جزئية من G فإن هذه الزمر الجزئية من $N(a)$ تكون أيضا زمر جزئية من G. وهذا يكمل البرهان.

مثال ١١-١١. نفرض G زمرة منتهية و p عدد أولي بحيث $p|o(G)$. أثبت أن G تحتوي على الأقل عنصر واحد من رتبة p.

الحل: لدينا $p|o(G)$. نفرض $o(G)=p^kq$ حيث $k,q\in\mathbb{N}$ و $(p,q)=1$.

من نظرية سيلو الأولى G يكون لها زمر جزئية من رتب p، p^2، ...، p^k.

نفرض H زمرة جزئية من G من رتبة p. حيث أن p عدد أولي فإن H تكون دائرية. نفرض $H=\langle a\rangle$ حيث $a\in G$.

إذن $o(a)=p$. وهذا هو المطلوب.

ملاحظة ١١-١٢. النتيجة في هذا المثال هي نظرية كوشي للزمر المنتهية.

زمر p الجزئية p-subgroups

تعريف ١١-١٣ نفرض p عدد أولي. الزمرة الجزئية H من الزمرة G تسمى زمرة p الجزئية إذا كان رتبة كل عنصر في H هي قوة للعدد p.

بصفة خاصة إذا كانت G زمرة بحيث رتبة كل عنصر فيها تكون قوة للعدد الأولي p فإنها تسمى زمرة p p-group.

نظرية ١١-١٤. الزمرة المنتهية G تكون زمرة p إذا وفقط إذا كان $o(G)$ قوة للعدد p.

البرهان: نفرض $o(G)=p^k$. كنتيجة لنظرية لاجرانج $o(a)|o(G)$.

أي أن $o(a)|p^k$ لكل $a\in G$. إذن رتبة a تكون قوة للعدد p. إذن G تكون زمرة p.

من جهة أخرى، نفرض أن G زمرة p . إذن لا يوجد عدد أولي q يختلف عن p يمكن أن يقسم $o(G)$ وإلا فإنه من نظرية كوشي سوف يوجد عنصر من رتبة q. إذن $o(G)=p^k$ لبعض k.

مثال ١١-١٥. بين أي مما يأتي يكون زمرة p:

(i) زمرة G من رتبة 21.

(ii) زمرة من G من رتبة 25.

(iii) زمرة من G من رتبة 128.

الحل: (i) لدينا $o(G)=21$. وحيث أن 21 لا يمكن كتابتها على الصورة p^n حيث p عدد أولي، إذن G ليست زمرة p.

(ii) لدينا $o(G)=25$. إذن $o(G)=p^2$ حيث $p=5$. إذن G تكون زمرة p.

(iii) لدينا $o(G)=128$. إذن $o(G)=p^7$ حيث $p=2$. إذن G تكون زمرة p.

زمرة سيلو p الجزئية p-Sylow subgroup

تعريف ١١-١٦. نفرض G زمرة منتهية و p عدد أولي. الزمرة الجزئية من G التي رتبتها p^k حيث $k \in \mathbb{N}$ تسمى زمرة سيلو p الجزئية من G إذا كان $p^k \mid o(G)$ و $p^{k+1} \nmid o(G)$.

ملاحظة ١١-١٧. طبقا لتعريف زمرة سيلو p الجزئية، كل زمر سيلو p الجزئية من زمرة منتهية تكون من نفس الرتبة.

مبرهنة ١١-١٨. إذا كانت P زمرة سيلو p الجزئية من الزمرة المنتهية G فإنه لكل $x \in G$ ، $x^{-1}Px$ تكون أيضا زمرة سيلو p الجزئية من G.

الإثبات: نفرض $o(P)=p^{\alpha}$ حيث p عدد أولي.

إذن $p^{\alpha} | o(G)$ و $p^{\alpha+1} \nmid o(G)$. نفرض $x \in G$ اختياري.

حيث أن $e \in P$ ، إذن $x^{-1}ex = x^{-1}x = e \in x^{-1}Px$.

إذن $e \in x^{-1}Px$ و $x^{-1}Px \neq \phi$.

نفرض $x^{-1}h_1x , x^{-1}h_2x \in x^{-1}Px$ حيث $h_1, h_2 \in P$. إذن

$$(x^{-1}h_1x)(x^{-1}h_2x)^{-1} = (x^{-1}h_1x)(x^{-1}h_2^{-1}(x^{-1})^{-1})$$

$$= x^{-1}h_1(x\ x^{-1})h_2^{-1}x = x^{-1}h_1h_2^{-1}x \in x^{-1}Px$$

لأن $h_1h_2^{-1} \in P$.

إذن $x^{-1}Px$ تكون زمرة جزئية من G.

لإيجاد $o(x^{-1}Px)$ نعرف الراسم $\phi : P \to x^{-1}Px$ بالصورة

$\phi(h) = x^{-1}hx$ لكل $h \in P$

الراسم ϕ معرف جيدا.

نفرض $h_1, h_2 \in P$ بحيث $\phi(h_1) = \phi h_2)$.

إذن $x^{-1}h_1x = x^{-1}h_2x$

وهذا يؤدي إلى $x(x^{-1}h_1x)x^{-1} = x(x^{-1}h_2x)x^{-1}$

ومنها نحصل على $(xx^{-1})h_1(xx^{-1}) = (xx^{-1})h_2(xx^{-1})$ ومن ثم

$h_1 = h_2$. إذن ϕ يكون أحادي.

نفرض $x^{-1}hx \in x^{-1}Px$. إذن $h \in P$ و $\phi(h) = x^{-1}hx$.

إذن ϕ يكون فوقي وبالتالي تناظر أحادي.

لذلك يوجد تناظر أحادي بين عناصر P وعناصر $x^{-1}Px$.

ومن ثم $o(P)=o(x^{-1}Px)$ أي أن $o(x^{-1}Px)=p^{\alpha}$.

لذلك $x^{-1}Px$ تكون زمرة جزئية من G من رتبة p^{α}.

أيضا $p^{\alpha} | o(G)$ و $p^{\alpha+1} \nmid o(G)$.

إذن $x^{-1}Px$ تكون زمرة سيلو p الجزئية من G.

ملاحظة ١١-١٩. إذا كانت P زمرة سيلو p الجزئية الوحيدة فإن $x^{-1}Px=P$ لكل $x \in G$.

نفرض $g \in G$ و $h \in P$.

إذن $ghg^{-1}=(g^{-1})^{-1}hg^{-1}=x^{-1}hx \in x^{-1}Px$

لذلك $ghg^{-1} \in P$ لكل $g \in G$ و $h \in P$.

وبالتالي P تكون قياسية في G.

مبرهنة ١١-٢٠. نفرض G زمرة منتهية من رتبة $p^k q$ حيث p عدد أولي و $q,k \in \mathbb{N}$ و $(p,q)=1$ و P زمرة سيلو p الجزئية من G. إذا كانت H زمرة p الجزئية من G بحيث $P \subset H \subset G$ بين أن $H=P$.

الإثبات: لدينا $p^k | p^k q$ و $p^{k+1} \nmid p^k q$ لأن $(p,q)=1$.

إذن $p^k | o(G)$ و $p^{k+1} \nmid o(G)$.

إذن رتبة زمرة سيلو p الجزئية من G تكون p^k.

حيث أن H زمرة p الجزئية من G، رتبة كل عنصر في H تكون قوة للعدد p.

إذن لا يوجد عدد أولي r يختلف عن p يمكن أن يقسم $o(H)$ وإلا من نظرية كوشي H سوف تحتوي عنصر من رتبة r. إذن $o(H)=p^t$ لبعض t. من نظرية لاجرانج $p^t \mid p^k q$.

حيث أن $(p,q)=1$، إذن $t \le k$.

أيضا $P \subset H$ يؤدي إلى $o(P)<o(H)$. إذن $p^k \le p^t$ وهذا يؤدي إلى $k \le t$. إذن $k=t$ و $p^t=p^k$. وهذا يعني أن $o(H)=o(P)$. إذن $H=P$.

ملاحظة ١١-٢١. من المبرهنة السابقة نلاحظ أن زمرة p الجزئية من G لا يمكن أن تكون محتواة فعليا في زمرة سيلو p الجزئية من G.

نظرية ١١-٢٢. (نظرية سيلو الثانية) Sylow's second theorem

نفرض G زمرة منتهية من رتبة $p^k q$ حيث p عدد أولي و $q,k \in \mathbb{N}$ و $(p,q)=1$. إذن أي زمرتين جزئيتين من رتبة p^k تكونا مترافقتين.

البرهان: لدينا $o(G)=p^k q$ حيث $q,k \in \mathbb{N}$ و $(p,q)=1$. من نظرية سيلو الأولى يوجد زمر جزئية من رتب p، p^2، ...، p^k.

نفرض A و B أي زمرتان جزئيتان من G كل منها من رتبة p^k.

حيث أن $p^{k} \mid o(G)$ و $p^{k+1} \nmid o(G)$، A و B تكونا زمرتا سيلو p الجزئية من G. سوف نبرهن أن الزمرتان الجزئيتان A و B تكونا مترافقتان.

نفرض أن الزمرتان الجزئيتان A و B غير مترافقتان. إذن لكل $x \in G$، $B \neq x^{-1}Ax$. سوف نجزئ G إلى مجموعات مصاحبة مزدوجة لـ A و B. إذن $G = \cup AxB$ حيث المجموعات المصاحبة المزدوجة في الطرف الأيمن منفصلة ثنائيا.

إذن $o(G) = \sum o(AxB)$ .... (1)

الآن $o(AxB) = \dfrac{o(A)o(B)}{o((x^{-1}Ax)\cap B)}$ .... (2)

حيث أن $x^{-1}Ax \neq B$ لكل $x \in G$ يكون

$(x^{-1}Ax)\cap B \subset B$ لكل $x \in G$.

أيضا $(x^{-1}Ax)\cap B$ تكون زمرة جزئية من B.

لذلك، من نظرية لاجرانج، نفرض $o((x^{-1}Ax)\cap B = p^{i}$ لبعض $i < k$.

من المعادلة (2) $o(AxB) = \dfrac{p^{k}p^{k}}{p^{i}} = p^{2k-i} = p^{k+1}p^{k-i-1}$

إذن $p^{k+1} \mid o(AxB)$ لكل $x \in G$.

إذن باستخدام (1) يكون $p^{k+1} \mid o(G)$ وهذا غير ممكن لأن $p^{k+1} \nmid o(G)$. إذن الفرض يكون خاطئ.

إذن يوجد على الأقل عنصر واحد $x \in G$ بحيث $B = x^{-1}Ax$.

إذن زمرتا سيلو p الجزئيتان A و B تكونا مترافقتان.

نظرية ١١-٢٣. (نظرية سيلو الثالثة) Sylow's third theorem

نفرض G زمرة منتهية من رتبة $p^k q$ حيث p عدد أولي و $q,k \in \mathbb{N}$ و $(p,q)=1$. إذن عدد الزمر الجزئية من G من رتبة p^k يكون على الصورة $1+mp$ حيث m عدد صحيح غير سالب و $(1+mp) | o(G)$.

البرهان: لدينا $o(G)=p^k q$ حيث p عدد أولي و $q,k \in \mathbb{N}$ و $(p,q)=1$. من نظرية سيلو الأولى يوجد زمر جزئية من رتب p، p^2، ...، p^k.

إذن توجد على الأقل زمرة جزئية من رتبة p^k.

نفرض P زمرة جزئية من G من رتبة p^k.

حيث أن $p^k | o(G)$ و $p^{k+1} \nmid o(G)$، فإن P تكون زمرة سيلو p الجزئية من G.

نقسم G إلى مجموعات مصاحبة مزدوجة لـ P و P. إذن $G = \cup PxP$.

وحيث أن المجموعات المصاحبة المزدوجة تكون منفصلة ثنائيا فإن

$$o(G) = \sum o(PxP) \quad .... \quad (1)$$

العنصر x المتضمن في PxP في (1) قد يكون أو لا يكون في $N(P)$. لذلك من (1) نحصل على

$$(2) \;\ldots\ldots\quad o(G)=\sum_{x\in N(P)} o(PxP)+\sum_{x\notin N(P)} o(PxP)$$

الحالة الأولى: $x\in N(P)$ في هذه الحالة $x^{-1}Px=P$.

إذن $x(x^{-1}Px)=xP$ وهذا يؤدي إلى $Px=xP$.

ومنها نحصل على $P(Px)=PxP$ أو $Px=PxP$.

إذن $$(3)\ldots\ldots\quad \sum_{x\in N(P)} o(PxP)=\sum_{x\in N(P)} o(Px)$$

الآن سوف نبين أن $\sum_{x\in N(P)} o(Px)=o(N(P))$.

نفرض $y\in \bigcup_{x\in N(P)} Px$.

إذن يوجد $p\in P$ و $z\in N(P)$ بحيث $y=pz$.

الآن $$y^{-1}Py=(pz)^{-1}P(pz)=z^{-1}(p^{-1}Pp)z$$

$$=z^{-1}Pz=P$$

(حيث أن $z\in N(P)$ ، إذن $z^{-1}Pz=P$)

إذن $y\in N(P)$ ومن ثم $\bigcup_{x\in N(P)} Px\subset N(P)$.

أيضا إذا كان $y\in N(P)$ فإن $y=ey\in Py$.

إذن $y\in \bigcup_{x\in N(P)} Px$ وبالتالي $N(P)\subset \bigcup_{x\in N(P)} Px$.

لذلك $\bigcup_{x\in N(P)} Px = N(P)$.

ومنها نحصل على $\sum_{x\in N(P)} o(Px) = o(N(P))$.

باستخدام (3) نحصل على $\sum_{x\in N(P)} o(PxP) = o(N(P))$.

الحالة الثانية: $x \notin N(P)$.

لدينا $$o(PxP) = \frac{o(P)o(P)}{o((x^{-1}Px)\cap P)} \quad \ldots\ldots\ (4)$$

إذا كان $x \notin N(P)$ فإن $x^{-1}Px \neq P$.

وهذا يؤدي إلى $(x^{-1}Px)\cap P \subset P$.

ومنها نحصل على $o((x^{-1}Px)\cap P) < o(P) = p^k$.

أيضا $(x^{-1}Px)\cap P$ تكون زمرة جزئية من P.

لذلك من نظرية لاجرانج نفرض $o((x^{-1}Px)\cap P) = p^i$ لبعض $i < k$. من (4) نحصل على

$$o(PxP) = \frac{p^k p^k}{p^i} = p^{2k-i} = p^{k+1}p^{k-i-1}$$

إذن $p^{k+1} | o(PxP)$ لكل $x \notin N(P)$

ومن ثم $\sum_{x\notin N(P)} o(PxP) \,|\, p^{k+1}$.

نفرض $\sum_{x\notin N(P)} o(PxP) = \lambda p^{k+1}$ حيث λ عدد صحيح غير سالب.

إذن من (2) $$o(G) = o(N(P)) + \lambda p^{k+1} \quad \ldots\ldots\ (5)$$

بالقسمة على $o(N(P))$ نحصل على

$$\frac{o(G)}{o(N(P))}=1+\frac{\lambda p^{k+1}}{o(N(P))} \quad \text{............} \quad (6)$$

حيث أن $N(P)$ زمرة جزئية من G، فإن $o(N(P))|o(G)$ ويكون $\frac{o(G)}{o(N(P))}$ يكون عدد صحيح موجب.

من (6) $1+\frac{\lambda p^{k+1}}{o(N(P))}$ يكون عدد صحيح موجب.

إذن $\frac{\lambda p^{k+1}}{o(N(P))}$ يكون عدد صحيح غير سالب.

حيث أن $N(P)$ زمرة جزئية من G و $p^{k+1}\nmid o(G)$ إذن $p^{k+1}\nmid o(N(P))$.

إذن $\frac{\lambda p^{k+1}}{o(N(P))}$ يكون مضاعف p، ليكن mp، حيث m عدد صحيح غير سالب ومن (6) نحصل على

$$\frac{o(G)}{o(N(P))}=1+mp \quad \text{............} \quad (7)$$

وهذا يؤدي إلى $o(C(P))=1+mp$.

إذن عدد مرافقات P في G يساوي $1+mp$.

حيث أن P زمرة سيلو p الجزئية من G وكل مرافق لـ P يكون زمرة سيلو p الجزئية من G فإن عدد زمر سيلو p الجزئية من G يكون $1+mp$.

أيضا (7) تؤدي إلى $o(N(P))=\frac{o(G)}{1+mp}$ عدد صحيح موجب.

إذن $(1+mp)|o(G)$. وهذا يكمل البرهان.

مثال ١١-٢٤. نفرض $G=S_3$. هنا $o(G)=6=2\cdot 3$. العدد 2 أولي.

$2|o(G)$ و $2^2\nmid o(G)$. أيضا $1+2m|6$ عندما $m=0,1$.

عندما $m=0$ فإن $1+2m=1$.

عندما $m=1$ فإن $1+2m=3$.

لذلك يوجد عدد إما 1 أو 3 زمرة سيلو 2 الجزئية.

عندما $m=1$ فإن $1+2m=3$.

S_3 لها ثلاث زمر سيلو 2 الجزئية هي

$$\left\{i,\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\} ، \left\{i,\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\} ، \left\{i,\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$$

حيث i هي تبديلة الوحدة.

أيضا 3 عدد أولي و $3|o(G)$ و $3^2\nmid o(G)$ و $1+3m|6$.

عندما $m=0$ ، $1+2m=1$

إذن توجد واحدة فقط زمرة سيلو 3 الجزئية من S_3 هي

$$\left\{i,\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

مثال ١١-٢٥. أوجد العدد الممكن من زمر سيلو p الجزئية من زمرة رتبتها $5^2\cdot 7\cdot 11$ حيث $p=5,7,11$.

الحل: نفرض G زمرة رتبتها $5^2\cdot 7\cdot 11$.

زمر سيلو 11 الجزئية: لدينا $o(G)=11^1\cdot 175$.

هنا 11 عدد أولي و $(11,175)=1$. من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية من رتبة 11.

حيث أن $11|o(G)$ و $(11)^2\nmid o(G)$ ، إذن هذه الزمرة تكون زمرة سيلو 11 الجزئية من G.

من نظرية سيلو الثالثة ، عدد زمر سيلو 11 الجزئية من G يكون على الصورة $1+11m$ حيث $(1+11m)|o(G)$.

حيث أن $1+11m$ أولي بالنسبة إلى 11 فإن $1+11m$ يجب أن يقسم 175 وهذا يحدث فقط عندما $m=0$ حيث عندها $1+11m=1$.

إذن يوجد فقط واحدة زمرة سيلو 11 الجزئية من G.

زمر سيلو7 الجزئية: لدينا $o(G)=5^2\cdot 7\cdot 11=7\cdot 275$.

هنا 7 عدد أولي و $(7,275)=1$.

من نظرية سيلو الأولى يوجد زمرة جزئية من G رتبتها 7.

وحيث أن $7|o(G)$ و $7^2\nmid o(G)$ ، هذه الزمرة تكون زمرة سيلو 7 الجزئية من G.

من نظرية سيلو الثالثة ، عدد زمر سيلو 7 الجزئية من G يكون على الصورة $1+7m$ حيث $1+7m \mid o(G)$.

وحيث أن $1+7m$ أولى بالنسبة إلى 7 فإن $1+7m$ يجب أن يقسم 275 ، وهذا يحدث فقط عندما $m=0$ وفي هذه الحالة $1+7m=1$.

إذن توجد واحدة فقط زمرة سيلو 7 الجزئية من G.

<u>زمر سيلو 5 الجزئية</u>: $o(G)=5^2\cdot 7\cdot 11=5^2\cdot 77$.

هنا 5 عدد أولي و $(5,77)=1$. من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية من رتبة $5^2=25$.

هذه الزمرة تكون زمرة سيلو 5 الجزئية من G.

من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو 5 الجزئية يكون على الصورة $1+5m$ بحيث $(1+5m)|o(G)$ وحيث أن $1+5m$ أولي بالنسبة إلى 5 وبالتالي بالنسبة إلى 5^2 فإن $1+5m$ يجب أن يقسم 77.

$1+5m$ يقسم 77 عندما $m=0,2$.

عندما $m=0$ يكون $1+5m=11$.

عندما $m=2$ يكون $1+5m=11$.

إذن الزمرة G إما يكون لها واحدة أو إحدى عشرة زمرة سيلو 5 الجزئية.

مثال ١١-٢٦. بين أن الزمرة من رتبة 28 تكون ليست بسيطة.

الحل: نفرض G زمرة رتبتها 28. إذن $o(G)=28=7^1\cdot 4$.

هنا 7 أولي و $(7,4)=1$. من نظرية سيلو الأولى G لها زمرة جزئية H من رتبة 7.

حيث أن $7|o(G)$ و $7^2 \nmid o(G)$ فإن هذه الزمرة H تكون زمرة سيلو 7 الجزئية.

من نظرية سيلو الثالثة عدد زمر سيلو 7 الجزئية يكون على الصورة $1+7m$ بحيث $(1+7m)|o(G)$. وحيث أن $1+7m$ أولي بالنسبة إلى 4 ، $1+7m$ يجب أن يقسم 4 . وهذا يحدث فقط عندما $m=0$.

عندما $m=0$ يكون $1+7m=1$.

إذن توجد فقط زمرة سيلو 7 الجزئية واحدة من G وبالتالي تكون قياسية.

أي أن G لها زمرة جزئية قياسية فعلية. ومن ثم G تكون زمرة ليست بسيطة.

تمارين ١١

١- بين أن الزمرة من رتبة 40 تكون ليست بسيطة.

٢- بين أن الزمرة من رتبة 20449 لها زمرة سيلو 11 الجزئية وبالتالي تكون غير بسيطة.

٣- بين أن الزمرة من رتبة 56 تكون ليست بسيطة.

٤- إذا كانت G زمرة من رتبة 28 لها زمرة جزئية قياسية من رتبة 4 فبين أنها تكون إبدالية.

٥- بين أنه لا توجد زمرة بسيطة من رتبة 48.

٦- بين أن الزمرة من رتبة 10 لها زمرة جزئية قياسية من رتبة 5.

٧- (أ) بين أن كل زمرة إبدالية من رتبة 10 تكون دائرية.

(ب) بين أن كل زمرة إبدالية من رتبة 10 تكون دائرية.

٨- إذا كانت زمرة منتهية لها فقط زمرة سيلو p جزئية واحدة بين أن هذه الزمرة الجزئية تكون قياسية في G.

٩- (أ) بين أن زمرة سيلو13 الجزئية من زمرة من رتبة 130 تكون قياسية.

(ب) بين أن زمرة سيلو17 الجزئية من زمرة من رتبة 225 تكون قياسية.

١٠- نفرض $G=\{\pm1,\pm i\}$. G تكون زمرة مع عملية الضرب العادية. بين باستخدام نظريات سيلو أنه توجد زمرة واحدة فقط من G من رتبة 2 وأن هذه الزمرة تكون أيضا قياسية.

١١- بين أن زمرة سيلو p الجزئية من الزمرة المنتهية تكون وحيدة إذا وفقط إذا كانت قياسية.

١٢- نفرض G زمرة من رتبة 36، كم زمرة سيلو 3 الجزئية في G.

١٣- نفرض G زمرة من رتبة 56، كم زمرة سيلو 7 الجزئية في G.

١٤- ناقش عدد وطبيعة زمر سيلو 3 الجزئية وزمر سيلو 5 الجزئية من زمرة من رتبة 225.

١٥- ناقش عدد وطبيعة زمر سيلو 3 الجزئية وزمر سيلو 5 الجزئية من زمرة من رتبة $3^2 \cdot 5^2$.