الفصل العاشر

علاقة الترافق

conjugacy relation

في هذا الفصل نقدم علاقة الترافق على زمرة وسوف نبرهن أنها علاقة تكافؤ وعن طريق فصول تكافؤ هذه العلاقة والتي تسمى فصول ترافق سوف نحصل على ما يسمى معادلة الفصول للزمرة وهذه المعادلة تلعب دورا كبيرا في دراسة الزمر المنتهية.

تعريف ١٠-١. نفرض G زمرة و S و T مجموعتان جزئيتان من G. نقول أن S ترافق T conjugate إذا وجد عنصر $x \in G$ بحيث $S = x^{-1}Tx$.

إذا كانت $S = \{a\}$ و $T = \{b\}$ ، مجموعة تحتوي على عنصر واحد ، فإننا نقول أن a ترافق b بدلا عن S ترافق T .

إذا كان a ترافق b فإننا نكتب $a \sim b$ وتسمى العلاقة $\sim$ علاقة ترافق conjugacy relation على G.

مثال ١٠-٢. في S_3 العنصر $(1\ 2\ 3)$ يكون مرافق العنصر $(1\ 3\ 2)$ حيث $(1\ 2\ 3) = (2\ 3)^{-1}(1\ 3\ 2)(2\ 3)$.

مثال ١٠-٣. بين أن عنصرين في زمرة يكونا مترافقين إذا وفقط إذا كان يمكن وضعهما على الصورة ab و ba ، على الترتيب، حيث a و b عنصرين ملائمين في G.

الحل: نفرض x و y عنصران مترافقان في G.

إذن $x = z^{-1}yz$ لبعض $z \in G$.

نفرض $a = z^{-1}y$ و $b = z$.

إذن $ab = (z^{-1}y)z = z^{-1}yz = x$.

و $ba = z(z^{-1}y) = (zz^{-1})y = y$.

لذلك $x = ab$ و $y = ba$.

من جهة أخرى نفرض $x = ab$ و $y = ba$.

الآن $a^{-1}xa = a^{-1}(ab)a = (a^{-1}a)ba = ey = y$.

أي أن y مرافق x.

أيضا $b^{-1}yb = b^{-1}(ba)b = (b^{-1}b)(ab) = ex = x$.

أي أن x مرافق y.

نظرية ١٠-٤. علاقة الترافق على زمرة تكون علاقة تكافؤ.

البرهان: نفرض G زمرة وعلاقة الترافق على G نرمز لها بالرمز $\sim$. سوف نبين أن $\sim$ علاقة تكافؤ.

نفرض $a \in G$. لدينا $e^{-1}ae = eae = a$.

إذن $a = e^{-1}ae$. أي أن $a \sim a$.

إذن $a \sim a$ لكل $a \in G$ وتكون العلاقة عاكسة.

نفرض $a,b \in G$ و $a \sim b$. إذن يوجد $x \in G$ بحيث $a = x^{-1}bx$.

الآن $xax^{-1} = x(x^{-1}bx)x^{-1} = xx^{-1}bxx^{-1} = b$.

وبالتالي $b = xax^{-1}$ أي أن $b = (x^{-1})^{-1}ax^{-1}$.

إذن $a \sim b \Leftarrow b \sim a$ وتكون العلاقة متماثلة.

أخيرا نفرض $a,b,c \in G$ و $a \sim b$ و $b \sim c$. إذن يوجد $x, y \in G$

بحيث $a = x^{-1}bx$ و $b = y^{-1}cy$.

إذن $a = x^{-1}(y^{-1}cy)x = (x^{-1}y^{-1})c(yx) = (yx)^{-1}c(yx)$.

إذن $a \sim c$ لأن $yx \in G$.

إذن $a \sim b$ و $b \sim c$ $\Leftarrow$ $a \sim c$. إذن ~ تكون متعدية.

إذن علاقة الترافق على زمرة تكون علاقة تكافؤ.

فصول الترافق Conjugate classes

نعلم أن علاقة التكافؤ على مجموعة تجزيء المجموعة إلى فصول تكافؤ منفصلة ثنائيا.

نفرض $C(a)$ ترمز إلى فصل تكافؤ العنصر a في G بالنسبة لعلاقة الترافق ~ على الزمرة G. المجموعة $C(a)$ تسمى فصل ترافق a في G.

إذن
$$C(a) = \{b : b \in G \text{ and } b \sim a\}$$
$$= \{b : b \in G \text{ and } b = x^{-1}ax \text{ for some } x \in G\}$$
$$= \{x^{-1}ax : x \in G\}$$
$=$ a مجموعة كل العناصر المترافقة مع

حيث أن ~ عاكسة فإن $a \in C(a)$ لكل $a \in G$.

أيضا $C(a) \subset G$ لكل $a \in G$.

إذن $G=\bigcup_{a\in G}\{a\}\subset\bigcup_{a\in G}C(a)\subset G$.

إذن $G=\bigcup_{a\in G}C(a)$.

على وجه الخصوص نفرض G زمرة منتهيه و $G=\bigcup_{i=1}^{t}C(a_i)$ ،

حيث $C(a_1),C(a_2),\dots,C(a_t)$ هي فصول الترافق المنفصلة ثنائيا،

إذن

$$o(G)=\sum_{i=1}^{t}o(C(a_i))$$

على سبيل المثال

$$C(e)=\{x^{-1}ex:x\in G\}=\{x^{-1}x:x\in G\}=\{e\}.$$

مثال ١٠-٥. إذا كانت G زمرة إبدالية. بين أن $C(a)=\{a\}$ لكل $a\in G$.

الحل: نفرض $a\in G$. إذن

$$\begin{aligned}C(a)&=\{x^{-1}ax:x\in G\}=\{x^{-1}(ax):x\in G\}\\&=\{x^{-1}(ax):x\in G\}\\&=\{(x^{-1}x)a:x\in G\}=\{ea:x\in G\}=\{a\}\end{aligned}$$

إذن $C(a)=\{a\}$ لكل $a\in G$.

مبرهنة ١٠-٦. نفرض N زمرة جزئية قياسية من الزمرة G و $a\in N$. بين أن كل فصل ترافق لـ a في G يكون كذلك في N. إذا

كانت N منتهية فبين أن $o(N)=\sum_{a\in N} o(C(a))$ ، حيث المجموع يجري على كل العناصر a مأخوذة عنصر من كل فصل ترافق.

البرهان: نفرض $a\in N$ ونفرض $b\in G$ بحيث تكون b ترافق a.

إذن يوجد $x\in G$ بحيث $b=x^{-1}ax$.

إذن $b=x^{-1}a(x^{-1})^{-1}$، وحيث أن $a\in N$ و $x^{-1}\in G$ و N زمرة جزئية قياسية فإن $b\in N$. إذن كل عنصر مرافق لـ a في G يكون أيضا في N.

إذن $C(a)\subset N$ لكل $a\in N$.

الآن $N=\bigcup_{a\in N}\{a\}\subset\bigcup_{a\in N}C(a)\subset N$.

إذن $$N=\bigcup_{a\in N}C(a) \qquad (١)$$

نفرض N منتهية. إذن $o(N)=o(\bigcup_{a\in N}C(a))$.

إذن $o(N)=\sum_{a\in N} o(C(a))$. حيث المجموع يجري على كل العناصر a مأخوذة عنصر من كل فصل ترافق.

مبرهنة ١٠-٨. نفرض G زمرة تحتوي عنصر من رتبة منتهية n ($n>1$) وتحتوي بالتحديد فصلي ترافق. بين أن G تكون زمرة منتهية من رتبة 2.

الإثبات: نفرض $a(\neq e)$ عنصر في الزمرة G من رتبة n .

نعلم أن $C(e)=\{e\}$ و $a\neq e$ ، إذن $a\notin C(e)$.

أيضا $a \in C(a)$ ، إذن $C(e) \neq C(a)$.

إذن $C(e)$ و $C(a)$ فصلي ترافق منفصلان.

وحيث أن G تحتوي على وجه التحديد فصلي ترافق نحصل على $G = C(e) \cup C(a)$ ومنها $G = \{e\} \cup C(a)$.

نفرض $b(\neq e)$ أي عنصر في G. إذن $b \in C(a)$.

إذن يوجد $x \in G$ بحيث $b = x^{-1}ax$.

إذن $o(b) = o(x^{-1}ax) = o(a)$.

إذن $o(b) = n$ لكل $b(\neq e) \in G$.   (١)

الآن نبين أن n عدد أولي.

نفرض $n = lm$ ، حيث l و m أعداد صحيحة موجبة أقل من أو تساوي n.

إذن $a^n = e \Leftarrow a^{lm} = e \Leftarrow (a^l)^m = e$.

إذن $o(a^l) = n$. إذن $n \leq m$ ومنها $m = n$ (حيث أن $m \leq n$).

إذن $m = lm$ ومنها $l = 1$. إذن n يكون أولي.

الآن سوف نبين أن $a^2 = e$. إن أمكن نفرض $a^2 \neq e$.

إذن $a^2 \in C(a)$. إذن $a^2 = y^{-1}ay$ لبعض $y \in G$ وبالتالي

$$(a^2)^2 = (y^{-1}ay)(y^{-1}ay) = y^{-1}a(yy^{-1})ay = y^{-1}aeay$$
$$= y^{-1}a^2y = y^{-1}(y^{-1}ay)y = y^{-2}ay^2$$

إذن $(a^2)^2 = y^{-2}ay^2$.

بالاستمرار بنفس هذا الاسلوب نحصل على $a^{2n}=y^{-n}ay^{n}$.

إذن $a^{2n}=(y^{n})^{-1}ay^{n}=e^{-1}ae=a$

لذلك $a^{2n}a^{-1}=a^{-1}a$ ومنها $a^{2n-1}=e$. إذن $n\,|\,2n-1$.

وحيث أن $n\,|\,2n$ إذن $n\,|\,(2n-(2n-1))$. إذن $n\,|\,1$.

وهذا غير ممكن حيث أن $n>1$. إذن $a^{2}=e$. إذن $o(a)=2$.

أي أن $n=2$. إذن من (١) $o(b)=2$ لكل $b(\neq e)\in G$.

إذن G تكون إبدالية.

(G تكون إبدالية إذا وفقط إذا كان $(ab)^{2}=e$ لكل $a,b\in G$)

لذلك $C(a)=\{a\}$ وبالتالي $G=\{e\}\cup\{a\}$ ومنها يكون $o(G)=1+1=2$.

المنظم Normalizer

تعريف ١٠-٩. نفرض G زمرة و S مجموعة جزئية غير خالية من G. منظم S normalizer في G يرمز له بالرمز $N(S)$ ويعرف كما يلي $N(S)=\{x\in G : x^{-1}Sx=S\}$

إذا كانت $S=\{a\}$ ، مجموعة تحتوي على عنصر واحد ، فإننا نكتب $N(a)$ بدلا عن $N(\{a\})$ لنشير إلى منظم $\{a\}$ وكذلك نقول منظم العنصر a.

إذن منظم العنصر a يحتوي كل عناصر G التي تتبادل مع a .

واضح أن $N(S)=\bigcup_{a\in S} N(a)$.

ملاحظة ١٠-١٠.

١- حيث أن $ex=xe$ لكل $x\in G$ فإن $N(e)=G$.

٢- إذا كانت G زمرة إبدالية و $a\in G$ فإن $xa=ax$ لكل $x\in G$.
إذن $N(a)=G$ لكل $a\in G$.

نظرية ١٠-١١. نفرض G زمرة. لكل $a\in G$ المنظم $N(a)$ للعنصر $a\in G$ يكون زمرة جزئية من G.

البرهــان: نفــرض $x,y\in N(a)$. إذن $x^{-1}ax=a$ و $y^{-1}ay=a$.
لــــــــذلك $(xy)^{-1}a(xy)=y^{-1}x^{-1}axy=y^{-1}ay=a$. أي أن $xy\in N(a)$. أيضا حيث أن $x^{-1}ax=a$ لذلك

$$a=xx^{-1}axx^{-1}=xax^{-1}=(x^{-1})^{-1}a(x^{-1})$$

وبالتالي $x^{-1}\in N(a)$ ومن ذلك $N(a)$ يكون زمرة جزئية من G.

ملاحظة ١٠-١٢. المنظم $N(a)$ قد لا يكون زمرة جزئية قياسية.

مثال ١٠-١٣. نفرض $X=\{a,b,c\}$ ونعتبر S_3 . نفرض عناصر S_3 هي

$$e=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} ، \rho_1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} ، \rho_2=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

$$\mu_1=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} ، \mu_2=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} ، \mu_3=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

الآن نوجد $N(\rho_1)$ منظم العنصر ρ_1 في S_3.

حيث أن $e\rho_1 = \rho_1 e$ فإن $e \in N(\rho_1)$. كذلك $\rho_1 \in N(\rho_1)$.

الآن $\rho_1\rho_2 = \mu_2$ بينما $\rho_2\rho_1 = \mu_3$. إذن $\rho_1\rho_2 \neq \rho_2\rho_1$.

إذن $\rho_2 \notin N(\rho_1)$. بالمثل كل من μ_1 ، μ_2 ، μ_3 لا ينتمي إلى $N(\rho_1)$. إذن $N(\rho_1) = \{e, \rho_1\}$.

حيث أن منظم العنصر يكون زمرة جزئية، لذلك $N(\rho_1)$ يكون زمرة جزئية.

الآن $\rho_2 \in S_3$ و $\rho_1 \in N(\rho_1)$.

$\rho_2\rho_1\rho_2^{-1} = \rho_2\rho_1\rho_2 = \mu_1 \notin N(\rho_1)$.

إذن $N(\rho_1)$ زمرة جزئية ليست قياسية في S_3.

مبرهنة ١٠-١٤. نفرض a أي عنصر في الزمرة G .بين أن الزمرة الجزئية الدائرية من G المولدة بالعنصر a تكون زمرة جزئية قياسية من منظم a.

الإثبات: نعلم أن $N(a) = \{x \in G : ax = xa\}$. نفرض $a^n \in \langle a \rangle$.

الآن $aa^n = a^{n+1} = aa^n$. إذن $a^n \in N(a)$. إذن $\langle a \rangle \subset N(a)$.

حيث أن $N(a)$ زمرة جزئية من G فإن $\langle a \rangle$ تكون زمرة جزئية من $N(a)$.

نفرض $a^n \in \langle a \rangle$ و $x \in N(a)$. إذن

$$xa^n x^{-1} = x(aa..a)x^{-1}$$

$$= xa(x^{-1}x)a(x^{-1}x)...(x^{-1}x)ax^{-1}$$

$$= (xax^{-1})(xax^{-1})...(xax^{-1})$$

$$= (xax^{-1})^n = (axx^{-1})^n = (ae)^n = a^n \in \langle a \rangle$$

إذن $\langle a \rangle$ تكون زمرة جزئية قياسية من $N(a)$.

نظرية ١٠-١٥. إذا كانت G زمرة منتهية و $a \in G$ فإن $o(C(a)) = \dfrac{o(G)}{o(N(a))}$.

البرهان: لدينا $C(a) = \{x^{-1}ax : x \in G\}$.

نفرض A مجموعة كل المجموعات المصاحبة اليمني لـ $N(a)$ في G. نعرف $\phi : A \to C(a)$ بالصورة

$\phi(N(a)x) = x^{-1}ax$ لكل $x \in G$.

<u>ϕ معرف جيدا</u>. نفرض $x, y \in G$

$$N(a)x = N(a)y \Rightarrow xy^{-1} \in N(a)$$

(حيث أن $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$)

إذن $a(xy^{-1}) = (xy^{-1})a$

وهذا يؤدي إلى $(x^{-1}axy^{-1})y = x^{-1}(xy^{-1}a)y$

إذن $(x^{-1}ax)(y^{-1}y) = (x^{-1}x)(y^{-1}ay)$

وهذا يؤدي إلى $x^{-1}ax = y^{-1}ay$

وهذا يؤدي إلى $\phi(N(a)x)=\phi(N(a)y)$.

إذن ϕ معرف جيدا.

ϕ أحادي. نفرض $x, y \in G$ ونفرض $\phi(N(a)x)=\phi(N(a)y)$.

إذن $x^{-1}ax=y^{-1}ay$ وهذا يؤدي إلى

$(x^{-1}ax)(y^{-1}y)=(x^{-1}x)(y^{-1}ay)$. إذن

$x^{-1}(axy^{-1})y=x^{-1}(xy^{-1}a)y$ وهذا يؤدي إلى

$x(x^{-1}(axy^{-1})y)y^{-1}=x(x^{-1}(xy^{-1}a)y)y^{-1}$ ومن ثم

$(xx^{-1})(axy^{-1})(yy^{-1})=(xx^{-1})(xy^{-1}a)(yy^{-1})$ وبالتالي

$axy^{-1}=xy^{-1}a$.

إذن $xy^{-1}\in N(a)$ وهذا يؤدي إلى $N(a)x=N(a)y$.

إذن ϕ يكون أحادي.

ϕ فوقي. نفرض $y \in C(a)$. إذن يوجد $x \in G$ بحيث $y=x^{-1}ax$.

الآن $N(a)x \in A$ و $\phi(N(a)x)=x^{-1}ax=y$.

إذن ϕ يكون فوقي .

إذن يوجد تناظر أحادي بين المجموعات المصاحبة اليمنى لـ $N(a)$ في G وفصول ترافق a.

حيث أن الزمرة G منتهية، نحصل على

$o(C(a))=$ عدد العناصر في $C(a)$

= عدد المجموعات المصاحبة اليمنى لـ$N(a)$ في G.

$$= \frac{o(G)}{o(N(a))} .$$

إذن $o(C(a)) = \frac{o(G)}{o(N(a))}$

بتعبير آخر عدد فصول ترافق العنصر a في G يساوي دليل $N(a)$ في G. أي أن $o(C(a)) = [G : N(a)]$.

نظرية ١٠- ١٦ . إذا كانت G زمرة منتهية فإن $o(G) = \sum_a \frac{o(G)}{o(N(a))}$، حيث المجموع يجري على العناصر a مأخوذ عنصر واحد من كل فصل ترافق.

البرهان. علاقة الترافق تكون علاقة تكافؤ على G. هذه العلاقة تجزئ G إلى فصول ترافق منفصلة ثنائيا. حيث أن G منتهية، عدد فصول الترافق المنفصلة سوف يكون منتهي، وليكن k.

نفرض $C(a)$ ترمز إلى فصل ترافق a. نفرض أن فصول الترافق في G والتي عددها k هي $C(a_1), C(a_2), \ldots, C(a_k)$.

إذن $G = C(a_1) \cup C(a_2) \cup \ldots \cup C(a_k)$

إذن $o(G) = o(C(a_1)) + o(C(a_2)) + \ldots + o(C(a_k))$

$$= \frac{o(G)}{o(N(a_1))} + \frac{o(G)}{o(N(a_2))} + \ldots + \frac{o(G)}{o(N(a_k))} = \sum_{i=1}^{k} \frac{o(G)}{o(N(a))}$$

إذن $o(G)=\sum_a \frac{o(G)}{o(N(a))}$

حيث المجموع يجري على العناصر a مأخوذ عنصر واحد من كل فصل ترافق.

مثال ١٠-١٧. نفرض G زمرة بها عنصر a فصل الترافق له يحتوي بالتحديد عنصرين. بين أن G ليست بسيطة.

الحل: لدينا $o(C(a))=2$. حيث أن G منتهية، إذن

$o(C(a))=\frac{o(G)}{o(N(a))}$ إذن $\frac{o(G)}{o(N(a))}=2$.

عدد المجموعات المصاحبة اليمنى لـ $N(a)$ في G يساوي 2.

إذن $[G:N(a)]=2$. إذن $N(a)$ زمرة جزئية قياسية في G.

إذا أمكن نفرض $N(a)=\{e\}$. إذن

$a\in N(a)$ يؤدي إلى $a=e$ يؤدي إلى $C(a)=C(e)=\{e\}$.

أي أن $o(C(a))=1$ وهذا يناقض الفرض. إذن $N(a)\neq\{e\}$.

الآن نفرض أن $N(a)=G$.

إذن $1=\frac{o(G)}{o(G)}=\frac{o(G)}{o(N(a))}$ وهذا يؤدي إلى $o(C(a))=1$.

إذن $N(a)\neq G$.

إذن G تحتوي زمرة جزئية قياسية فعلية وغير خالية $N(a)$. إذن G زمرة ليست بسيطة.

مثال ١٠-١٨. أوجد عدد فصول الترافق لزمرة ليست إبدالية من رتبة p^3 حيث p عدد أولي.

الحل: نفرض G زمرة ليست إبدالية من رتبة p^3 . إذن $o(Z)=p$ حيث Z هو مركز الزمرة G (حيث أن G ليست إبدالية فإن $Z \neq G$. وحيث أن مركز الزمرة يكون زمرة جزئية ورتبة الزمرة الجزئية يقسم رتبة الزمرة و p عدد أولي لذلك $o(Z)=p$).

نفرض $C(a_1),C(a_2),\ldots,C(a_m)$ فصول الترافق في G المختلفة والتي عددها m. إذن $G=\bigcup_{i=1}^{m} C(a_i)$. إذن $o(G)=\sum_{i=1}^{m} o[C(a_i)]$.

العناصر $a_1,a_2,\ldots,a_m$ قد تنتمي أو لا تنتمي إلى Z .

إذن $o(G)=\sum_{a\in Z} o(C(a))+\sum_{a\notin Z} o(C(a))$ (١)

إذا كانت $a\in Z$ فإن $N(a)=G$ وبالتالي يكون $o(N(a))=o(G)$.

وهذا يؤدي إلى $\frac{o(G)}{o(N(a))}=1$ وبالتالي $o(C(a))=1$.

حيث أن $o(Z)=p$ عدد p فصل ترافق تكون كل منها من رتبة 1.

فصول الترافق المتبقية وعددها $m-p$ تناظر عناصر لا تنتمي إلى Z.

$a\notin Z$ يؤدي إلى $Z \subsetneq N(a)$. ومنها $o(Z)<o(N(a))$.

إذن $o(N(a))>p$. إذن $o(N(a))$ تساوي p^2 أو p^3.

وحيث أن $o(N(a))\,|\,p^3$ فإن $o(N(a))=p^3$.

إذن $x \in N(a)$ لكل $x \in G$.

إذن $ax = xa$ لكل $x \in G$ وهذا يؤدي إلى $a \in Z$.

وهذا غير صحيح. إذن $o(N(a)) \neq p^3$.

لذلك $o(N(a)) = p^2$ لكل $a \notin Z$.

ومن ثم $\frac{o(G)}{o(N(a))} = \frac{p^3}{p^2} = p$ وهذا يعطينا $o(C(a)) = p$ لكل $a \notin Z$. لذلك عدد $m - p$ فصل ترافق كل منها يكون من رتبة p .

إذن من معادلة (١) $p^3 = p(1) + (m-p)p$.

وبالتالي $p^2 = 1 + m - p$ ومنها $m = p^2 + p + 1$.

لذلك عدد فصول الترافق يكون $p^2 + p + 1$.

العنصر المرافق لنفسه. Self conjugate element

تعريف ١٠-١٩. نفرض G زمرة. العنصر $a \in G$ يقال أنه مرافق لنفسه self conjugate إذا لم يكن هناك عنصر آخر في G يرافق a.

إذن $x^{-1}ax = a$ لكل $x \in G$. أو بصورة متكافئة $ax = xa$ لكل $x \in G$.

العنصر المرافق لنفسه يسمى أيضا عنصر لاتغيري invariant .

ملاحظة ١٠-٢٠. إذا كان a عنصر مرافق لنفسه في الزمرة G فإن $N(a) = G$.

نظرية ١٠-٢١. نفرض G زمرة و $a \in G$. إذن $a \in Z$ إذا وفقط إذا كان $N(a)=G$.

البرهان: نفرض $a \in Z$. إذن $ax=xa$ لكل $x \in G$.

إذن $x \in N(a)$ لكل $x \in G$. إذن $N(a)=G$.

من جهة أخرى نفرض أن $N(a)=G$.

إذن $ax=xa$ لكل $x \in G$. إذن $a \in Z$.

نتيجة ١٠-٢٢. إذا كانت G زمرة منتهية و $a \in Z$، فإن $o(N(a))=o(G)$.

نظرية ١٠-٢٣. إذا كانت G زمرة منتهية فإن

$$o(G)=o(Z)+\sum_{a \notin Z}\frac{o(G)}{o(N(a))}$$

حيث المجموع يجري على العناصر a مأخوذ عنصر واحد من كل فصل ترافق يحتوي أكثر من عنصرين.

البرهان: نعلم أن $o(G)=\sum_{a}\frac{o(G)}{o(N(a))} \quad (١)$

حيث المجموع يجري على العناصر a مأخوذ عنصر واحد من كل فصل ترافق.

نفرض $a \in G$. إذن a قد تنتمي أو لا تنتمي إلى Z.

نفرض $a \in Z$. إذن $ax=xa$ لكل $x \in G$.

إذن $x^{-1}ax=a$ لكل $x \in G$. إذن $C(a)=\{a\}$.

إذن فصل ترافق a يحتوي عنصر واحد تحديدا.

كذلك $ax = xa$ لكل $x \in G$ يؤدي إلى $N(a) = G$.

لذلك $1 = \frac{o(G)}{o(G)} = \frac{o(G)}{o(N(a))}$.

وبالتالي لكل $a \in Z$ يكون $1 = \frac{o(G)}{o(N(a))}$.

إذن $o(Z) = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{o(Z)\text{مـــرة}} = \sum_{a\in Z} \frac{o(G)}{o(N(a))}$.

الآن ، عندما $a \notin Z$ فصل ترافق a سوف يحتوي أكثر من عنصر.

إذن من (١) نحصل على

$$o(G) = \sum_{a\in Z} \frac{o(G)}{o(N(a))} + \sum_{a\notin Z} \frac{o(G)}{o(N(a))}$$

$$= o(Z) + \sum_{a\notin Z} \frac{o(G)}{o(N(a))}$$

إذن

$$o(G) = o(Z) + \sum_{a\notin Z} \frac{o(G)}{o(N(a))}$$

حيث المجموع يجري على العناصر a مأخوذ عنصر واحد من كل فصل ترافق يحتوي أكثر من عنصر.

تعريف ١٠-٢٤. نفرض G زمرة منتهية و $a \in Z$. نفرض $N(a)$ ترمز إلى منظم a. إذن

$$o(G) = o(Z) + \sum_{a\notin Z} \frac{o(G)}{o(N(a))}$$

حيث المجموع يجري على العناصر a مأخوذ عنصر واحد من كل فصل ترافق يحتوي أكثر من عنصر.

هذه المعادلة تسمى معادلة الفصول class equation للزمرة المنتهية G.

مثال ١٠-٢٥. نفرض G زمرة و $\phi \neq S \subset G$. أثبت أن $N(S)$ زمرة جزئية من G.

الحل: $N(S)=\{x \in G : x^{-1}Sx = S\}$.

حيث أن $e^{-1}Se = eSe = S$ ، إذن $e \in N(S)$ و $N(S) \neq \phi$.

نفرض $x, y \in N(S)$. إذن $x^{-1}Sx = S$ و $y^{-1}Sy = S$.

الآن $(xy)^{-1}S(xy) = y^{-1}(x^{-1}Sx)y = y^{-1}Sy = S$.

إذن $xy \in N(S)$.

نفرض $x \in N(S)$. إذن $x^{-1}Sx = S$

وهذا يؤدي إلى $x(x^{-1}Sx)x^{-1} = xSx^{-1}$

وهذا يؤدي إلى $(xx^{-1})S(xx^{-1}) = xSx^{-1}$

وهذا يؤدى إلى $eSe = S = xSx^{-1}$.

إذن $(x^{-1})^{-1}Sx^{-1} = S$. إذن $x^{-1} \in N(S)$.

إذن $N(S)$ تكون زمرة جزئية من G.

مثال ١٠-٢٦. نفرض H زمرة جزئية من الزمرة G. بين أن H تكون قياسية إذا وفقط إذا كان $N(H) = G$.

الحل: نفرض H زمرة جزئية قياسية من الزمرة G. إذن $ghg^{-1} \in H$ لكل $h \in H$ و $g \in G$.

نفرض $x \in G$ و $h \in H$. إذن $x^{-1}hx = x^{-1}h(x^{-1})^{-1} \in H$.

إذن $x^{-1}Hx \subset H$.

أيضا $h = x^{-1}(xhx^{-1})x \in x^{-1}Hx$.

ومن ثم $H \subset x^{-1}Hx$ وبالتالي $x^{-1}Hx = H$.

لذلك $x \in N(H)$. إذن $N(H) = G$.

من جهة أخرى، نفرض $N(H) = G$، $x \in G$ و $h \in H$.

إذن $x \in N(H)$ وبالتالي $x^{-1}Hx = H$.

ومنها نحصل على $xx^{-1}Hxx^{-1} = xHx^{-1}$.

إذن $xHx^{-1} = H$ وهذا يعني أن $xhx^{-1} \in H$.

أي أن H تكون زمرة جزئية قياسية من G.

مثال ١٠-٢٧. نفرض G زمرة و S زمرة جزئية من G . بين أن S تكون زمرة جزئية قياسية من $N(S)$. إيضا بين أن $N(S)$ تكون أكبر زمرة جزئية من G فيها S تكون قياسية.

الحل: نعلم أن $N(S)$ زمرة جزئية من G. نفرض $x \in S$. سوف نبين أن $x^{-1}Sx = S$. نفرض $s \in S$ ، إذن

$$s = ese = (x^{-1}x)s(x^{-1}x) = x^{-1}(xsx^{-1})x \in x^{-1}Sx$$

($s \in S$ يؤدي إلى $s \in x^{-1}Sx$) لذلك $S \subset x^{-1}Sx$.

الآن $x^{-1}sx \in x^{-1}Sx$ يؤدي إلى $x^{-1}Sx \subset S$..

ومن ثم $x^{-1}Sx = S$ لذلك $x \in N(S)$.

إذن $S \subset N(S)$ وهذا يعني أن S تكون زمرة جزئية من $N(S)$.

نفرض $x \in N(S)$ و $s \in S$. إذن $x^{-1}Sx = S$.

وهذا يؤدي إلى $x(x^{-1}Sx)x^{-1} = xSx^{-1}$.

أي أن $(xx^{-1})S(xx^{-1}) = xSx^{-1}$. وهذا يؤدي إلى $eSe = xSx^{-1}$.

إذن $xSx^{-1} = S$. إذن $xsx^{-1} \in S$.

إذن S تكون زمرة جزئية قياسية من $N(S)$.

الآن نفرض H زمرة جزئية من G فيها S تكون قياسية . سوف نبين أن $H \subset N(S)$.

نفرض $h \in H$. إذن $hsh^{-1} \in S$ لكل $s \in S$.

لبيان أن $h \in N(S)$ يكفي إثبات أن $h^{-1}Sh = S$.

نفرض $s \in S$. $h \in H$ يؤدي إلى $h^{-1} \in H$.

إذن $h^{-1}s(h^{-1})^{-1} \in S$ أي أن $h^{-1}sh \in S$. إذن $h^{-1}Sh \subset S$.

أيضا $s = ese = (h^{-1}h)s(h^{-1}h) = h^{-1}(hsh^{-1})h$ ... (١)

ولكن إذا كان $h \in H$ و $s \in S$ فإن $hsh^{-1} \in S$.

إذن $h^{-1}(hsh^{-1})h \in h^{-1}Sh$ وبالتالي $s \in h^{-1}Sh$ (من (١)).

وهذا يؤدي إلى $S \subset h^{-1}Sh$ ومن ثم $h^{-1}Sh = S$. لذلك $H \subset N(S)$.

إذن $N(S)$ تكون أكبر زمرة جزئية من G فيها S تكون قياسية.

مثال ١٠-٢٨. نفرض H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة G و $x \in G$. المجموعة $\{hxk : h \in H , k \in K\}$ تسمى المجموعة المصاحبة المزدوجة double coset ويرمز لها بالرمز HxK .

برهن على أنه لأي $x , y \in G$ ، HxK و HyK إما يكونا متطابقان أو غير متقاطعان.

الحل: نفرض $HxK \cap HyK \neq \phi$.

إذن يوجد عنصر z بحيث $z \in HxK \cap HyK$.

لذلك توجد عناصر $h,h' \in H$ و $k , k' \in K$ بحيث $z = hxk = h'yk'$. إذن

$$HzK = H(hxk)K = (Hh)x(kK) = HxK$$

و $HzK = H(h'yk')K = (Hh')y(k'K) = HyK$.

إذن $HxK = HyK$. وهذا يكمل البرهان.

مثال ١٠-٢٩. نفرض H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة المنتهية G و $x \in G$. برهن على أن

$$o(HxK) = \frac{o(H)o(K)}{o((x^{-1}Hx) \cap K)}$$

الحل: نعرف $\phi : HxK \to x^{-1}HxK$ بالصورة

$$\phi(hxk) = x^{-1}hxk \text{ لكل } k \in K \text{ و } h \in H .$$

لبيان أن ϕ معرف جيدا نفرض $hxk , h'xk' \in HxK$.

إذا كان $hxk = h'xk'$ فإن $x^{-1}hxk = x^{-1}h'xk'$ وهذا يعني أن $\phi(hxk) = \phi(h'xk')$. إذن ϕ يكون معرف جيدا.

لبيان أن الراسم أحادي نفرض $hxk, h'xk' \in HxK$ بحيث $\phi(hxk) = \phi(h'xk')$. إذن $x(x^{-1}hxk) = x(x^{-1}h'xk')$ وهذا يؤدي إلى $hxk = h'xk'$. إذن ϕ يكون أحادي.

أخيرا لبيان أن ϕ فوقي، $x^{-1}hxk \in x^{-1}HxK$. إذن $hxk \in HxK$ و $\phi(hxk) = x^{-1}hxk$ ويكون ϕ فوقي.

إذن يوجد تناظر أحادي بين عناصر المجموعة المنتهية HxK و $x^{-1}HxK$.

إذن $o(HxK) = o(x^{-1}HxK)$.

إذن
$$o(HxK) = o((x^{-1}Hx)K)$$
$$= \frac{o(x^{-1}Hx)o(K)}{o((x^{-1}Hx)\cap K)}$$

(حيث أن $x^{-1}Hx$ زمرة جزنية من G)

إذن $o(HxK) = \dfrac{o(H)o(K)}{o((x^{-1}Hx)\cap K)}$. (لأن $o(x^{-1}Hx) = o(H)$).

وهذا يكمل البرهان.