الفصل التاسع

الزمر الجزئية القياسية وزمرة القواسم

Normal subgroups and quotient group

نفرض G هي الزمرة S_3 ونفرض H هي الزمرة الجزئية $\{\rho_0, \mu_3\}$. المجموعات المصاحبة اليمنى لـ H في G هي

$$H = \{\rho_0, \mu_3\} \text{ ، } H\rho_1 = \{\rho_1, \mu_1\} \text{ ، } H\rho_2 = \{\rho_2, \mu_2\}$$

بينما المجموعات المصاحبة اليسرى هي

$$H = \{\rho_0, \mu_3\} \text{ ، } \rho_1 H = \{\rho_1, \mu_2\} \text{ ، } \rho_2 H = \{\rho_2, \mu_1\}$$

من ذلك يتضح أن المجموعات المصاحبة اليمنى ليست هي المجموعات المصاحبة اليسرى. إذن ، على الأقل لهذه الزمرة الجزئية، مفهوم المجموعة المصاحبة اليمنى و المجموعة المصاحبة اليسرى لاينطبقان.

في $G = S_3$ نعتبر الزمرة الجزئية $N = \{\rho_0, \rho_1 \cdot \rho_2\}$.

المجموعات المصاحبة اليمنى لـ N في G هي

$$N = \{\rho_0, \rho_1 \cdot \rho_2\} \text{ ، } N\mu_1 = \{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3\}$$

المجموعات المصاحبة اليسرى هي

$$N = \{\rho_0, \rho_1 \cdot \rho_2\} \text{ ، } \mu_1 N = \{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3\}$$

بنظرة سريعة نجد أن كل مجموعة مصاحبة يسرى هي مجموعة مصاحبة يمنى والعكس.

الزمر الجزئية التي تنطبق فيها المجموعات المصاحبة اليمنى مع المجموعات المصاحبة اليسرى تلعب دورا هاما في نظرية الزمر.

تعريف ٩-١. الزمرة الجزئية N من الزمرة G تسمى زمرة جزئية قياسية normal subgroup إذا كان $gng^{-1} \in N$ لكل $g \in G$ و $n \in N$. أو بصورة مكافئة إذا كان $gNg^{-1} \subset N$ لكل $g \in G$ حيث gNg^{-1} تعني كل العناصر gng^{-1} ، $n \in N$.

تمهيدية ٩-٢. الزمرة الجزئية N من الزمرة G تكون زمرة جزئية قياسية إذا وفقط إذا كان $gNg^{-1} = N$ لكل $g \in G$.

البرهان: إذا كان $gNg^{-1} = N$ لكل $g \in G$ فإن $gNg^{-1} \subset N$ وتكون N زمرة جزئية قياسية.

الآن نفرض أن N زمرة جزئية قياسية من الزمرة G . إذن لكل $g \in G$ ، $gNg^{-1} \subset N$ و $g^{-1}Ng = g^{-1}N(g^{-1})^{-1} \subset N$.

إذن $N = g(g^{-1}Ng)g^{-1} \subset gNg^{-1} \subset N$.

إذن $N = gNg^{-1}$.

من المهم هنا ملاحظة أن $N = gNg^{-1}$ لاتعني أن $n = gng^{-1}$ لكل $n \in N$ فهذا قد لا يكون صحيحا ولكن كل ماهو مطلوب أن تكون عناصر gNg^{-1} هي نفس عناصر N .

الآن نعود إلى حالة تساوي المجموعات المصاحبة اليمنى مع المجموعات المصاحبة اليسرى.

تمهيدية ٩-٣. الزمرة الجزئية N من الزمرة G تكون زمرة جزئية قياسية إذا وفقط إذا كان كل مجموعة مصاحبة يسرى لـ N في G هي مجموعة مصاحبة يمنى.

البرهان. نفرض أن N زمرة جزئية قياسية من الزمرة G. إذن $gNg^{-1}=N$ لكل $g \in G$ ومنها $(gNg^{-1})g = Ng$. إذن $gN = Ng$. أي أن المجموعة المصاحبة اليمنى Ng هي المجموعة المصاحبة اليسرى gN.

الآن نفرض أن كل مجموعة مصاحبة يسرى لـ N في G هي مجموعة مصاحبة يمنى. لأي $g \in G$ ، gN لكونها مجموعة مصاحبة يسرى يجب أن تكون مجموعة مصاحبة يمنى. وحيث أن $g = ge \in gN$ ، إذن المجموعة المصاحبة اليمنى التي تساوي gN يجب أن تحتوي g ولكن g تنتمي إلى المجموعة المصاحبة اليمنى Ng. وحيث أن المجموعات المصاحبة تكون متطابقة أو غير متقاطعة فإن $gN = Ng$ وبتعبير آخر $gNg^{-1} = Ngg^{-1} = N$ وتكون N زمرة جزئية قياسية من G.

سبق أن تعرضنا لتعريف ما هو المقصود بالتعبير AB عندما يكون A,B زمرتان جزئيتان من الزمرة G. وكحالة خاصة عندما $A = B = H$ ، ما هي الحالة بالنسبة لحاصل الضرب HH ؟

حيث أن H زمرة جزئية من G فإنها تكون مغلقة بالنسبة للعملية على G وبالتالي $HH = \{h_1h_2 : h_1, h_2 \in H\} \subset H$

ولكن $HH \supset He = H$. لذلك $HH = H$.

الآن نفرض أن N زمرة جزئية قياسية من الزمرة G ونفرض $a,b \in G$. نعتبر $(Na)(Nb)$. حيث أن N زمرة جزئية قياسية فإن $aN = Na$ وبالتالي يكون

$$NaNb = N(aN)b = N(Na)b = NNab = Nab .$$

وحيث أن $ab \in G$ فإن Nab تكون مجموعة مصاحبة يمنى لـ N في G وهذا يعني أن حاصل ضرب مجموعتين مصاحبتين يمينيتين لـ N في G يكون مجموعة مصاحبة يمنى لـ N في G .

من جهة أخرى نفرض أن حاصل ضرب مجموعتين مصاحبتين يمينيتين لـ N في G يكون مجموعة مصاحبة يمنى. إذن

$$gng^{-1} = egng^{-1} \in NgNg^{-1} = Ngg^{-1} = Ne = N$$

وبالتالي تكون N زمرة جزئية قياسية من G وهذا يبرهن النتيجة التالية:

تمهيدية ٩-٤. الزمرة الجزئية N من الزمرة G تكون زمرة جزئية قياسية من G إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب مجموعتين مصاحبتين يمينيتين لـ N في G يكون مجموعة مصاحبة يمنى لـ N في G .

حيث أنه بالنسبة للزمرة الجزئية القياسية تتطابق المجموعات المصاحبة اليمنى مع المجموعات المصاحبة اليسرى فإنه عند الحديث

عن زمرة جزئية قياسية لن نفرق بين المجموعة المصاحبة اليمنى و المجموعة المصاحبة اليسرى بل سنكتفي بالقول مجموعة مصاحبة وعادة نستخدم رمز المجموعة المصاحبة اليمنى.

نفرض N زمرة جزئية قياسية من الزمرة G .من الصيغة $NaNb = Nab$ ، حيث $a,b \in G$، نطرح السؤال التالي: هل يمكننا استخدام حاصل ضرب المجموعات المصاحبة لجعل تجمع المجموعات المصاحبة تكون زمرة؟

نفرض G/N ترمز إلى تجمع كل المجموعات المصاحبة لـ N في G .

نظرية ٩-٥. نفرض G زمرة و N زمرة جزئية قياسية من G ، إذن G/N تكون زمرة مع عملية ضرب المجموعات المصاحبة $NaNb = Nab$ حيث $a,b \in G$. هذه الزمرة تسمى زمرة قواسم أو زمرة عوامل G بواسطة N quotient (factor) group .

البرهان: نفرض $X,Y \in G/N$. إذن $X = Na$ و $Y = Nb$ لبعض $a,b \in G$. الآن $XY = NaNb = Nab \in G/N$

إذن G/N تكون مغلقة بالنسبة لعملية الضرب.

نفرض $X,Y,Z \in G/N$.

إذن $Z = Nc$ ، $Y = Nb$ ، $X = Na$ لبعض $a,b,c \in G$. إذن

$$(XY)Z = (NaNb)Nc = N(ab)Nc = N(ab)c$$

$$= Na(bc) = Na(Nbc) = Na(NbNc) = X(YZ)$$

إذن عملية الضرب تكون دامجة.

نعتبر العنصر $N = Ne \in G/N$.

إذا كان $X \in G/N$ فإن $X = Na$ و $a \in G$.

الآن $XN = NaNe = Nae = Na = X$

كذلك $NX = NeNa = Nea = Na = X$

إذن $N = Ne$ هو العنصر المحايد في G/N.

أخيرا نفرض $X = Na \in G/N$ حيث $a \in G$. إذن $Na^{-1} \in G/N$

كذلك $NaNa^{-1} = Naa^{-1} = Ne = N$

و $Na^{-1}Na = Na^{-1}a = Ne = N$

إذن Na^{-1} هو معكوس Na في G/N.

نلاحظ أنه لكي يمكن تعريف زمرة قواسم G بواسطة N يجب أن تكون N زمرة جزئية قياسية من G وضرورة هذا الشرط تتضح من المثال التالي

مثال ٩-٦ . نفرض G هي الزمرة الممثلة بالجدول التالي

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

نفرض $S = \{e,c\}$. واضح أن $S < G$

المجموعات المصاحبة اليسرى لـ S في G هي

$$S = cS = \{e, c\}$$

$$aS = dS = \{a, d\}$$

$$bS = f\,S = \{b, f\}$$

المجموعات المصاحبة اليسرى لـ S في G هي

$$S = Sc = \{e, c\}$$

$$Sa = Sf = \{a, f\}$$

$$Sb = Sd = \{b, d\}$$

واضح أن $aS \neq Sa$ كذلك $Sb \neq bS$.

إذن S زمرة جزئية ليست قياسية من G .

كذلك $SaSb = \{a, f\}\{b, d\} = \{e, f, c, a\}$

وهذه ليست مجموعة مصاحبة يمنى لـ S في G .

أي أن عملية ضرب المجموعات المصاحبة ليست مغلقة عندما تكون S زمرة جزئية ليست قياسية.

من هنا يتضح أهمية أن تكون الزمرة الجزئية قياسية لكي نستطيع تكوين زمرة القواسم للزمرة G .

حيث أن عدد عناصر G/N يساوي عدد المجموعات المصاحبة اليمنى لـ N في G وحيث أن $[G:N] = \dfrac{o(G)}{o(N)}$.

إذن يمكننا إستنتاج مايلي

مبرهنة ٩-٧. نفرض G زمرة منتهية و N زمرة جزئية قياسية من G . إذن

$$.\,o(G/N)=\frac{o(G)}{o(N)}$$

نظرية ٩-٨. نفرض G زمرة و N زمرة جزئية قياسية من G .
نعرف الراسم $\phi:G\to G/N$ كما يلي $\phi(x)=Nx$ لكل $x\in G$.
إذن ϕ يكون تشاكل فوقي و $\ker(\phi)=N$.

البرهان: حيث ان كل عنصر في G/N يكون على الصورة Ng حيث $g\in G$ ، وحيث أن $\phi(g)=Ng$ ، إذن ϕ يكون فوقي.

كذلك لأي عنصرين $x,y\in G$

$$\phi(xy)=Nxy=NxNy=\phi(x)\phi(y)$$

إذن ϕ يكون تشاكل .

علاوة على ذلك $xN=eN$ إذا وفقط إذا كان $x\in N$. لذلك
$.\ ker(\phi)=\{x\in G:\phi(x)=eN\}=N$

هذا الراسم يسمى التشاكل الطبيعي natural homomorphism أو التشاكل القانوني لـ G فوق G/N.

نظرية ٩-٩. نفرض $\phi:G\to\overline{G}$ تشاكل نواته K . إذن K تكون زمرة جزئية قياسية من G .

البرهان: سبق أن أثبتنا أن $K=\ker(\phi)$ زمرة جزئية من G . لإثبات أنها زمرة جزئية قياسية، نفرض $g\in G$ و $k\in K$. إذن

$$\phi(gkg^{-1})=\phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1})=\phi(g)\,\overline{e}\,\phi(g)^{-1}$$

$$=\phi(g)\phi(g)^{-1}=\overline{e}$$

لذلك $gkg^{-1} \in K$ وهذا يبين أن K زمرة جزئية قياسية من G .

نظريات التماثل Isomorphisms theorems

توجد العديد من النظريات التي تتعلق بتماثلات زمر القواسم والتي تعرف بنظريات التماثل في نظرية الزمر.

نظرية ٩-١٠. نظرية التماثل الأولى

First isomorphism theorem

نفرض $\phi : G \to \overline{G}$ تشاكل زمري. إذن $G / \ker(\phi) \cong \phi(G)$.

وكحالة خاصة إذا كان ϕ فوقي فإن $G / \ker(\phi) \cong \overline{G}$.

البرهان: نعتبر الراسم $\psi : G / \ker(\phi) \to \phi(G)$

المعرف بالصورة $\psi(xK) = \phi(x)$ لأي $x \in G$ حيث $K = \ker(\phi)$.

إذن
$$xK = yK \Leftrightarrow y^{-1}x \in K \Leftrightarrow$$
$$\phi(y^{-1}x) = \overline{e} \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$$

لكل $x, y \in G$.

لذلك ψ يكون معرف جيدا وأحادي. علاوة على ذلك

$$\psi((xK)(yK)) = \psi(xyK) = \phi(xy)$$
$$= \phi(x)\phi(y) = \psi(xK)\psi(yK)$$

إذن ψ يكون تشاكل. وحيث أنه من الواضح أن ψ فوقي فإنه يكون تماثل زمري ويكون

$$G / K \cong \phi(G)$$

نتيجة ٩-١١ . أي تشاكل $\phi: G \to \overline{G}$ بين زمرتين G و $\overline{G}$ يمكن تحليله على الصورة

$$\phi = j \cdot \psi \cdot \eta$$

حيث $\eta: G \to G / \ker(\phi)$ هو التشاكل الطبيعي

و $\psi: G / \ker(\phi) \to \phi(\mathrm{G})$ هو التماثل الذي حصلنا عليه في النظرية السابقة

و $j: \phi(G) \to \overline{G}$ هو راسم الاحتواء.

البرهان: ينتج مباشرة من الشكل التالي:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta"'] & \overline{G} \\ G / \ker(\phi) \arrow[r, "\psi"] & \phi(G) \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

نظرية ٩-١٠ مهمة حيث أنها تخبرنا بدقة ما هي الزمر التي نتوقع أن تنتج كصورة تحت تأثير تشاكل لزمرة معطاة. هذه يمكن التعبير عنها في الصورة G / K حيث K زمرة جزنية قياسية من G ولكن من نظرية التشاكل العامة لأي زمرة جزنية قياسية N من G ، G / N تكون صورة متشاكلة مع G لذلك يوجد تناظر أحادي بين الصورة المتشاكلة مع G وزمرة جزئية قياسية من G.

نظرية ٩-١٢. نظرية التماثل الثانية

Second isomorphism theorem

نفرض H و N زمرتان جزئيتان من الزمرة G بحيث تكون N قياسية. إذن $H \cap N$ تكون زمرة جزئية قياسية من H و HN تكون زمرة جزئية من G و $H/(H \cap N) \cong HN/N$.

البرهان: نفرض $n \in H \cap N$ و $h \in H$. إذن $h^{-1}nh \in N$ حيث أن N زمرة جزئية قياسية من G . كذلك $h^{-1}nh \in H$ لأن $n,h \in H$ و H زمرة. لذلك $h^{-1}nh \in H \cap N$ وتكون $H \cap N$ زمرة جزئية قياسية من H .

HN تكون زمرة جزئية من G لأنها غير خالية وإذا كان $x_1,x_2 \in HN$ فإن $x_1 = h_1n_1$ و $x_2 = h_2n_2$ حيث $h_1,h_2 \in H$ و $n_1,n_2 \in N$. الآن

$$x_1x_2^{-1} = h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1} = h_1n_3h_2^{-1}$$

$$= h_1h_2^{-1}h_2n_3h_2^{-1} = hn_4 \in HN$$

نفرض $\phi : H \to HN/N$ معرف بالصورة

$$\phi(h) = hN \quad \text{لكل} \quad h \in H$$

واضح أن ϕ يكون فوقي، أي أن $\phi(H) = HN/N$.

أيضا ϕ تشاكل، حيث أنه لأي $h_1,h_2 \in H$ يكون

$$\phi(h_1h_2) = h_1h_2N = h_1Nh_2N = \phi(h_1)\phi(h_2)$$

إذن من نظرية التماثل الأولى نجد أن

$$\phi(H) \cong H / \ker(\phi)$$

ولكن $\ker(\phi) = \{x : x \in H, \phi(x) = e\}$

$$= \{x : x \in H, xN = N\}$$

$$= \{x : x \in H, x \in N\} = H \cap N$$

إذن $HN / N \cong H / (H \cap N)$

مثال ٩-١٣. نفرض $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ و $H = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\{0\}$ و $N = \{0\}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

واضح ان $HN = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ و $H \cap N = \{0\}\times\mathbb{Z}\times\{0\}$.

إذن $(HN)/N \cong \mathbb{Z}$. كذلك $H/(H\cap N) \cong \mathbb{Z}$.

نظرية ٩-١٤. نظرية التماثل الثالثة

Third isomorphism theorem

نفرض H و K زمرتان جزئيتان قياسيتان من الزمرة G بحيث $K \subset H$. إذن $(G/K)/(H/K) \cong G/H$.

هذه النظرية تعرف أيضا بنظرية التماثل ثنائية القواسم double factor isomorphism theorem.

البرهان: نعتبر الراسم $\phi : G/K \to G/H$

المعرف بالقاعدة $\phi(xK) = xH$

هذا الراسم معرف جيدا، حيث أن

$$xK = yK \Rightarrow x^{-1}y \in K \Rightarrow$$

$$x^{-1}y \in H \Rightarrow xH = yH$$

علاوة على ذلك، لكل $x, y \in G$

$$\phi((xK)(yK)) = \phi(xyK) = xyH$$
$$= (xH)(yH) = \phi(xK)(yK)$$

إذن ϕ يكون تشاكل. واضح أن ϕ فوقي.

أيضا $\ker(\phi) = \{xK : xH = H\}$

$$= \{xK : x \in H\} = H/K$$

من نظرية التماثل الأولى نحصل على

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H$$

مثال ٩-١٥ . نعتبر $K = 6\mathbb{Z} < H = 2\mathbb{Z} < G = \mathbb{Z}$

إذن $G/H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$

الآن $G/K = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ عناصرها

$5+6\mathbb{Z}$ ، $4+6\mathbb{Z}$ ، $3+6\mathbb{Z}$ ، $2+6\mathbb{Z}$ ، $1+6\mathbb{Z}$ ، $6\mathbb{Z}$.

من هذه المجموعات المصاحبة الست $4+6\mathbb{Z}$، $2+6\mathbb{Z}$ و $6\mathbb{Z}$ تقع في $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

لذلك $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ لها عنصران وتكون متماثلة مع $\mathbb{Z}_2$ كذلك.

تمارين ٩

١- بين أن A_n تكون زمرة جزئية قياسية من S_n وأحسب S_n / A_n ، أي أوجد زمرة تتماثل مع S_n / A_n.

٢- الزمرة الجزئية H تتآلف conjugate مع الزمرة الجزئية K إذ وجد تشاكل ذاتي i_g للزمرة G بحيث $i_g(H) = (K)$. بين أن هذه العلاقة تكون علاقة تكافؤ على تجمع كل الزمر الجزئية من الزمرة G .

٣- نفرض أن N زمرة جزئية قياسية من الزمرة G ونفرض $[G:N] = m$. بين أن $a^m \in H$ لكل $a \in G$.

٤- بين أن تقاطع زمر جزئية قياسية من الزمرة G يكون زمرة جزئية قياسية.

٥- نفرض S مجموعة جزئية من الزمرة G . بين أنه يمكننا الحديث عن أصغر زمرة جزئية قياسية تحتوي S .

٦- نفرض G زمرة. العنصر في G الذي يمكن التعبير عنه في الصورة $aba^{-1}b^{-1}$ لبعض $a,b \in G$ يسمى مبدل في G commutator . التمرين السابق يبين أنه توجد أصغر زمرة جزئية قياسية C في G تحتوي كل المبدلات في G. الزمرة الجزئية C تسمى زمرة المبدل الجزئية في G . بين أن G/C تكون زمرة إبدالية.

٧- نفرض G زمرة منتهية بحيث يكون لها زمرة جزئية واحدة فقط H لأي رتبة معطاة . بين أن H تكون زمرة جزئية قياسية من G.

٨- نفرض H زمرة جزئية من الزمرة G و N زمرة جزئية قياسية من G . بين أن $H \cap N$ تكون زمرة جزئية قياسية من H . إعط مثال يبين أى $H \cap N$ ليس بالضرورة أن تكون زمرة جزئية قياسية من G .

٩- بين أن مجموعة كل التماثلات الذاتية لزمرة تكون زمرة مع عملية تحصيل الرواسم.

١٠- بين أن مجموعة كل التماثلات الذاتية الداخلية لزمرة G تكون زمرة جزئية قياسية من زمرة كل التماثلات الذاتية للزمرة G مع عملية تحصيل الرواسم.

١١- نفرض $\phi:\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ تشاكل بحيث $\phi(1)=2$

(أ) أوجد نواة ϕ kernel K .

(ب) أكتب كل المجموعات المصاحبة في $\mathbb{Z}_{12}/K$

(جـ) أكتب التناظر بين $\mathbb{Z}_{12}/K$ و $\mathbb{Z}_3$ بإعطاء الراسم ψ الموصوف في نظرية التماثل الأولى.

١٢- نفرض $\phi:\mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_{12}$ تشاكل بحيث $\phi(1)=10$

(أ) أوجد نواة ϕ ، K .

(ب) أكتب كل المجموعات المصاحبة في $\mathbb{Z}_{18}/K$.

(جـ) أوجد الزمرة $\phi(\mathbb{Z}_{18})$.

(د) أوجد التناظر بين $\mathbb{Z}_{18}/K$ و $\phi(\mathbb{Z}_{18})$.

١٣- في الزمرة $\mathbb{Z}_{24}$ نفرض $H=<4>$ و $N=<6>$

(أ) أكتب عناصر HN و $H\cap N$.

(ب) أكتب المجموعات المصاحبة في HN/N .

(جـ) أكتب المجموعات المصاحبة في $H/(H\cap N)$.

(د) أعط التناظر بين HN/N و $H/(H\cap N)$.

١٤- كرر التمرين ١٣ للزمرة $\mathbb{Z}_{36}$ نفرض $H=<4>$ و $N=<9>$.

١٥- بين مباشرة باستخدام تعريف الزمرة الجزئية القياسية أنه إذا كان H و N زمرتان جزئيتان من الزمرة G وكانت N قياسية في G فإن $H\cap N$ تكون قياسية في H .

١٦- نفرض H ، K و L زمرة جزئية قياسية من الزمرة G بحيث $H<K<L$. نفرض $A=G/H$ ، $B=K/H$ و $C=L/H$

(أ) بين أن C, B زمر جزئية قياسية من A وأن $B<C$.

(ب) بين أي زمرة قواسم لـ G تكون متماثلة مع $(A/B)/(C/B)$.