الفصل الثامن

المجموعات المصاحبة ونظرية لاجرانج

Cosets and Lagrang's Theorem

نفرض G زمرة منتهية و H زمرة جزئية من G .قد نلاحظ أن رتبة H تقسم رتبة G ، وهذه هي نظرية لاجرانج. سوف نبرهن هذه النظرية بإيجاد تجزيء للمجموعة G إلى خلايا لها نفس الحجم مثل H . لذلك إذا كان عدد الخلايا r فإن $ro(H)=o(G)$ ومنها تنتج النظرية مباشرة. الخلايا في هذا التجزيء تسمى مجموعات مصاحبة للمجموعة H.

تعريف ٨-١. نفرض H زمرة جزئية من الزمرة G و $a\in G$. المجموعة الجزئية $aH=\{ah:h\in H\}$ من G تسمى مجموعة مصاحبة يسرى left coset للمجموعة H المحددة بالعنصر a والمجموعة $Ha=\{ha:h\in H\}$ تسمى مجموعة مصاحبة يمنى righ coset للمجموعة H.

في حالة إستخدام رمز الجمع للعملية الثنائية على الزمرة G فإن المجموعة المصاحبة اليسرى والمجموعة المصاحبة اليمنى يرمز لها بالرمز $a+H$ و $H+a$.

مجموعة كل المجموعات المصاحبة اليسرى لـ H في G يرمز لها بالرمز G/H و مجموعة كل المجموعات المصاحبة اليمنى لـ H في G يرمز لها بالرمز $H\backslash G$.

تعريف ٨-٢. نفرض G زمرة و H زمرة جزئية من G . لأي عنصرين $a,b \in G$ نقول أن a تتآلف من اليمين مع b بمقياس H ونكتب $a \equiv_R b \bmod H$ إذا كان $ab^{-1} \in H$.

تمهيدية ٨-٣. العلاقة $a \equiv_R b \bmod H$ تكون علاقة تكافؤ.

البرهان: نفرض $a, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \mathrm{G}$ ، سوف نبرهن أن

١- $a \equiv_R a \bmod H$

٢- $a \equiv_R b \bmod H \Leftarrow b \equiv_R a \bmod H$

٣- $a \equiv_R b \bmod H$ و $b \equiv_R c \bmod H \Leftarrow a \equiv_R c \bmod H$

لإثبات أن العلاقة عاكسة يجب إثبات أن $a \equiv_R a \bmod H$ لكل $a \in G$. ولكن حيث أن H زمرة جزئية من G ، $e \in H$ وحيث أن $aa^{-1} = e \in H$ ، إذن العلاقة عاكسة.

لإثبات أن العلاقة متماثلة نفرض أن $a \equiv_R b \bmod H$ ونبرهن على أن $b \equiv_R a \bmod H$.

$a \equiv_R b \bmod H$ تعني أن $ab^{-1} \in H$.

وحيث أن H زمرة جزئية إذن $(ab^{-1})^{-1} \in H$.

ولكن $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}$ إذن $ba^{-1} \in H$.

إذن $b \equiv_R a \bmod H$ وتكون العلاقة متماثلة.

لإثبات أن العلاقة متعدية نفرض أن

$a \equiv_R b \mod H$ و $b \equiv_R c \mod H$.

أي نفرض أن $ab^{-1} \in H$ و $bc^{-1} \in H$.

وحيث أن H زمرة جزئية، إذن $ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) \in H$.

أي أن $ac^{-1} \in H$ وهذا يعني أن $a \equiv_R c \mod H$.

إذن العلاقة $\equiv_R$ تكون علاقة تكافؤ.

تمهيدية ٨-٤. نفرض G زمرة و H زمرة جزئية من G . لكل $a \in G$

$$Ha = \{x \in G : a \equiv_R x \mod H\}$$

البرهان: نفرض $[a] = \{x \in G : a \equiv_R x \mod H\}$.

سوف نبين أولا أن $Ha \subset [a]$. نفرض $h \in H$.

إذن $a(ha)^{-1} = a(a^{-1}h^{-1}) = h^{-1} \in H$ لأن H زمرة جزئية.

من تعريف علاقة الائتلاف بمقياس H نجد أن $ha \in [a]$ لكل $h \in H$.

إذن $Ha \subset [a]$.

الآن نفرض أن $x \in [a]$. إذن $ax^{-1} \in H$

ولذلك $(ax^{-1})^{-1} = xa^{-1}$ تكون أيضا في H .

إذن $xa^{-1} = h$ لبعض $h \in H$.

بضرب طرفي العلاقة في a من اليمين نحصل على $x = ha$.

لذلك $x \in Ha$. إذن $[a] \subset Ha$.

وهذا يكمل البرهان.

نعرف علاقة الائتلاف من اليسار بمقياس H بالصورة

. $a \equiv_L b \bmod H \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن علاقة الائتلاف من اليسار بمقياس H تكون علاقة تكافؤ على G . ويمكننا أيضا إثبات أن . $aH = \{x \in G : a \equiv_L x \bmod H\}$

الآن نوضح أنه يوجد تناظر أحادي بين عناصر أي مجموعتين مصاحبتين يمينيتين Ha و Hb للمجموعة H في G . لأي عنصر $ha \in Ha$ حيث $h \in H$ يوجد عنصر $hb \in Hb$. واضح أن هذا الراسم فوقي من Ha إلى Hb. لبيان أنه أحادي نفرض $h_1b = h_2b$ حيث $h_1, h_2 \in H$. باستخدام قانون الحذف نحصل على $h_1 = h_2$. وهذا يبرهن التمهيدية التالية:

تمهيدية ٨-٥. يوجد تناظر أحادي بين عناصر أي مجموعتين مصاحبتين يمينيتين للمجموعة H في G .

التمهيدية السابقة لها أهمية كبيرة عندما تكون H زمرة منتهية حيث في هذه الحالة يكون أي مجموعتين مصاحبتين يمينيتين لهما نفس العدد من العناصر. لاحظ أن $H = He$ نفسها تكون مجموعة مصاحبة يمنى لـ H، لذلك أي مجموعة مصاحبة لـ H في G يكون لها عدد من العناصر يساوي $o(H)$.

نفرض أن G زمرة منتهية ونفرض k عدد المجموعات المرافقة اليمنى المختلفة لـ H في G . من تمهيدية ٨-٣ و٨-٥ أي مجموعتين مصاحبتين

مختلفتين تكونا منفصلتين وكل منهما تحتوي عدد $o(H)$ عنصر. حيث أن أي $a\in G$ يكون في مجموعة مصاحبة يمنى واحدة Ha، إذن المجموعات المصاحبة اليمنى تغطي G . لذلك عدد عناصر G يساوي $ko(H)$، أي أن $ko(H)=o(G)$. المناقشة السابقة تبرهن النظرية الشهيرة التالية والمعروفة بنظرية لاجرانج.

نظرية ٨-٦. (نظرية لاجرانج Lagrang's Theorem**)**. إذا كانت G زمرة منتهية و H زمرة جزئية من G فإن $o(H)$ يقسم $o(\mathrm{G})$. أي أن $o(H)|o(G)$.

تعريف ٨-٧. إذا كانت H زمرة جزئية من G فإن دليل H في G index هو عدد المجموعات المصاحبة اليمنى لـ H في G ويرمز لذلك بالرمز $[G:H]$ أو $i_G(H)$. إذن $i_G(H)=\dfrac{o(G)}{o(H)}$.

نظرية لاجرانج لها العديد من النتائج الهامة.

نتيجة ٨-٨. إذا كانت G زمرة منتهية و $a\in G$ فإن $o(a)|o(G)$.

البرهان: من نظرية لاجرانج يكون من المناسب لإثبات صحة هذه النتيجة نوجد زمرة جزئية من G رتبتها تساوي $o(a)$. العنصر a نفسه يولد زمرة جزئية. نعتبر الزمرة الجزئية المكونة من العناصر $e,a,a^2,\ldots$. هذه الزمرة الجزئية تحتوي على الأكثر عدد يساوي $o(a)$ من العناصر. كذلك هذه الزمرة لا يقل عدد عناصرها عن $o(a)$. إذا كان $a^i=a^j$ لبعض الأعداد الصحيحة $0\le i<j<o(a)$ فإن $a^{j-i}=e$

حيث $0 < j - i < o(a)$ وهذا تناقض. إذن هذه الزمرة الجزئية تكون من رتبة $o(a)$. ومن نظرية لاجرانج $o(a) | o(G)$.

نتيجة ٨-٩. إذا كانت G زمرة منتهية و $a \in G$ فإن $a^{o(G)} = e$.

البرهان: من نتيجة ٨-٨، $o(a) | o(G)$. لذلك $o(G) = mo(a)$، إذن

$$a^{o(G)} = a^{mo(a)} = (a^{o(a)})^m = e^m = e \; .$$

نتيجة ٨-١٠. إذا كانت G زمرة منتهية رتبتها عدد أولي p فإن G تكون دائرية.

البرهان: أولا يجب أن نوضح أنه لا توجد زمرة جزئية فعلية غير تافهة H من G. حيث $o(H)$ يجب أن تقسم $o(G) = p$. إذن $o(H)$ يجب أن تكون إما 1 أو p. إذا كانت $o(H) = 1$ فإن $H = \{e\}$ وإذا كانت $o(H) = p$ فإن $H = G$. نفرض $e \neq a \in G$ ونفرض $H = \langle a \rangle$. إذن H زمرة جزئية من G و $H \neq \{e\}$ لأن $a \neq e$. إذن $H = G$ ، وهذا يعني أن G تكون دائرية وكل عنصر فيها هو قوة للعنصر a.

نظرية ٨-١١ . نفرض H زمرة جزئية من الزمرة G . إذن العبارات التالية تكون صحيحة:

(أ) $aH = H$ إذا وفقط إذا كان $a \in H$.

(ب) $aH = bH$ إذا وفقط إذا كان $a^{-1}b \in H$.

(جـ) $aH = bH$ أو $aH \cap bH = \phi$.

(د) كل عنصر من G ينتمي تحديدا إلى مجموعة مصاحبة يسرى واحدة لـ H في G .

(هـ) إذا كانت aH مجموعة مصاحبة يسرى فإن معكوسات عناصر aH تكون مجموعة مصاحبة يمنى.

البرهان: (أ) نفرض $a \in H$. إذن $ag \in H$ لكل $g \in H$. الآن لأي $g \in H$، $g = a(a^{-1}g) \in aH$ حيث أن $a^{-1}g \in H$. وهذا يبرهن أن $H \subset aH$. وحيث أن $aH \subset H$ عندما تكون $a \in H$ نحصل على $aH = H$.

الاتجاه العكسي نفرض $aH = H$. إذن $aH \subset H$. وحيث أن $e \in H$ إذن $a = ae \in aH$.

(ب) نفرض $aH = bH$ إذن $ah = bh'$ لبعض $h, h' \in H$. إذن $a^{-1}(ah) = a^{-1}(bh')$ أي أن $h h'^{-1} = a^{-1}b$. إذن $a^{-1}b \in H$ حيث أن $h h'^{-1} \in H$.

الآن نفرض أن $a^{-1}b \in H$. لبيان أن $aH \subset bH$ نأخذ $h \in H$. الآن $ah = b(b^{-1}ah) \in b\mathrm{H}$ حيث أن $h \in H$ ، $b^{-1}ah \in \mathrm{H}$.

لاحظ أن $a^{-1}b \in H$ يؤدي إلى $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H$.

بالمثل لإثبات أن $bH \subset aH$ نأخذ $h' \in H$ ونلاحظ أن $bh' = a(a^{-1}bh') \in aH$ لأن $a^{-1}b \in H$.

(جـ) نفرض أن $aH \neq bH$. إذن يكفي إثبات أن $aH \cap bH = \phi$.

نفرض أن $aH \cap bH \neq \phi$. إذن يوجد $g \in H$ و $h \in H$ بحيث $ag = bh$. إذن $a^{-1}(ag) = a^{-1}(bh)$ أو $g = (a^{-1}b)h$ أو $gh^{-1} = (a^{-1}b)(hh^{-1}) = a^{-1}b$.

وحيث أن $g, h \in H$ فإن $gh^{-1} \in H$ وبالتالي $a^{-1}b \in H$.

لذلك من (ب) $aH = bH$ وهذا يناقض الفرض بأن $aH \neq bH$.

إذن $aH \cap bH = \phi$.

(د) المجموعة المصاحبة aH تحتوي a لأن $a = ae$ و $e \in H$. وحيث أن المجموعات المصاحبة منفصلة فإنه لاتوجد مجموعة مصاحبة أخرى تحتوي a . أي أن a تنتمي تحديدا إلى مجموعة مصاحبة يسرى واحدة. إذن كل عنصر في G ينتمي تحديدا إلى مجموعة مصاحبة يسرى واحدة.

(هـ) معكوس أي عنصر ah في aH يكون $h^{-1}a^{-1}$ وحيث أن H زمرة جزئية فإن $h^{-1} \in H$ و $h^{-1}a^{-1} \in Ha^{-1}$ وحيث أن Ha^{-1} مجموعة مصاحبة يمنى فهذا يكمل البرهان.

مثال ٨-١٢. نفرض $G = (\mathbb{Z}, +)$ و $A = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$. إذن $A < G$.

المجموعات المصاحبة اليسرى لـ A في G هي

$A = \{0, \pm3, \pm6, \dots\}$ ، $A + 1 = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$ ،

$A + 2 = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

المجموعات المصاحبة اليمنى لـ A في G هي

$A=\{0,\pm 3,\pm 6,\ldots\}$ ، $1+A=\{\ldots,-8,-5,-2,1,4,7,\ldots\}$

$2+A=\{\ldots,-7,-4,-1,2,5,8,\ldots\}$

نلاحظ أن $A+b=b+A$ لكل $b\in G$.

بصورة عامة يمكننا القول أنه إذا كانت G زمرة و $A\leq G$ فإن Ab قد لاتساوي bA لكل $b\in G$. أما إذا كانت G زمرة ابدالية فإن $Ab=bA$ لكل $b\in G$.

مثال ٨-١٣. نفرض الزمرة المتماثلة S_3 على المجموعة $\{1,2,3\}$ والممثلة بالجدول ٧-١.

نفرض $H=\{\rho_0,\mu_1\}$. واضح أن H زمرة جزئية من S_3.

المجموعات المصاحبة اليسرى لـ H في S_3 هي

$H=\{\rho_0,\mu_1\}$ ، $\rho_1 H=\{\rho_1,\mu_3\}$ ، $\rho_2 H=\{\rho_2,\mu_2\}$

المجموعات المصاحبة اليمنى لـ H في S_3 هي

$H=\{\rho_0,\mu_1\}$ ، $H\rho_1=\{\rho_1,\mu_2\}$ ، $H\rho_2=\{\rho_2,\mu_3\}$

واضح أن $H\rho_1\neq\rho_1 H$ و $H\rho_2\neq\rho_2 H$.

تمارين ٨

١- أوجد كل المجموعات المصاحبة للزمرة الجزئية $4\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$.

٢- أوجد كل المجموعات المصاحبة للزمرة الجزئية $4\mathbb{Z}$ من $2\mathbb{Z}$.

٣- أوجد كل المجموعات المصاحبة للزمرة الجزئية $<2>$ من $\mathbb{Z}_{12}$.

٤- أوجد كل المجموعات المصاحبة للزمرة الجزئية $<4>$ من $\mathbb{Z}_{12}$.

٥- أوجد كل المجموعات المصاحبة للزمرة الجزئية $<18>$ من $\mathbb{Z}_{36}$.

٦- أوجد كل المجموعات المصاحبة اليسرى للزمرة الجزئية $\{\rho_0,\mu_2\}$ من الزمرة D_4 الواردة في مثال ٧-٦.

٧- كرر المسألة السابقة ولكن أوجد المجموعات المصاحبة اليمنى. هل هي نفس المجموعات المصاحبة اليسرى؟

٨- أوجد دليل $<3>$ في الزمرة $\mathbb{Z}_{24}$.

٩- أوجد دليل $<\mu_1>$ في الزمرة S_3 الواردة في مثال ٧-٥.

١٠- نفرض $\sigma=(1,2,5,4)(2,3)$ في S_5 . أوجد دليل $<\sigma>$ في S_5.

١١- نفرض $\mu=(1,2,4,5)(3,6)$ في S_6 . أوجد دليل $<\mu>$ في S_6.

١٢- نفرض H زمرة جزئية من الزمرة G بحيث $g^{-1}hg\in H$ لكل $g\in G$ و $h\in H$. برهن على أن كل مجموعة مصاحبة يسرى gH تكون هي نفس المجموعة المصاحبة اليمنى Hg .

١٣- نفرض H زمرة جزئية من الزمرة G و $ab \in G$. فيما يلي برهن على صحة العلاقة المعطاة أو إعط مثال عكسي يبين عدم صحتها:

(أ) إذا كان $aH = bH$ فإن $Ha = Hb$.

(ب) إذا كان $Ha = Hb$ فإن $b \in Ha$.

(جـ) إذا كان $aH = bH$ فإن $Ha^{-1} = Hb^{-1}$.

(د) إذا كان $aH = bH$ فإن $a^2H = b^2H$.

١٤- نفرض G زمرة من رتبة pq حيث p و q أعداد أولية. بين أن كل زمرة جزئية خالصة من G تكون دائرية.

١٥- نفرض H زمرة جزئية دليلها 2 في الزمرة المنتهية G . برهن على أن المجموعات المصاحبة اليسرى لـ H في G هي أيضا مجموعات مصاحبة يمنى.

١٦- نفرض H و K زمرتان جزئيتان من الزمرة G . نعرف العلاقة $\sim$ على G بالصورة $a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $a = hbk$ لبعض $h \in H$ وبعض $k \in K$.

(أ) برهن على أن $\sim$ علاقة تكافؤ على G .

(ب) صف عناصر فصل التكافؤ الذي يحتوي العنصر a (فصول التكافؤ هنا تسمى مجموعات مصاحبة مزدوجة).

في التمارين ١٧-٢١ اعط مثال للزمرة الجزئية المطلوبة من الزمرة المعطاة إذا كان ذلك ممكنا

١٧- زمرة جزئية من زمرة إبدالية G حيث المجموعات المصاحبة اليسرى والمجموعات المصاحبة اليمنى تكون تجزيئات مختلفة لـG.

١٨- زمرة جزئية من زمرة إبدالية G حيث المجموعات المصاحبة اليسرى تجزيء G إلى خلية واحدة.

١٩- زمرة جزئية من زمرة من رتبة 6 حيث المجموعات المصاحبة اليسرى لها تعطي تجزيء للزمرة إلى 6 خلايا.

٢٠- زمرة جزئية من زمرة من رتبة 6 حيث المجموعات المصاحبة اليسرى لها تعطي تجزيء للزمرة إلى 12 خلايا.

٢١- زمرة جزئية من زمرة من رتبة 6 حيث المجموعات المصاحبة اليسرى لها تعطي تجزيء للزمرة إلى 4 خلايا.

٢٢- بين أن الزمرة التي بها على الأقل عنصران ولكن لاتحتوي أي زمرة جزئية غير تافهة.

٢٣- نفرض S_A زمرة كل التبديلات للمجموعة A ونفرض c عنصر معين في A. بين أن $\{\sigma \in S_A : \sigma(c) = c\}$ تكون زمرة جزئية من S_A.