الفصل السابع

زمر التباديل

Groups of permutations

في هذا الفصل نتعرض لبنية بعض الزمر المنتهية والتي عناصرها تسمى تبديلات تؤثر على مجموعة منتهية. هذه الزمر تزودنا بأمثلة لزمر منتهية ليست إبدالية. سوف نوضح أن أي زمرة منتهية يمكن أن توضع في البنية كزمرة تبديلات.

تعريف ٧-١. التبديلة permutation على مجموعة غير خالية A هي راسم $\phi: A \to A$ بحيث يكون تناظر أحادي (أي أحادي وفوقي).

حيث أن التبديلة هي راسم فإن عملية تحصيل الرواسم تكون أيضا عملية تحصيل للتبديلات، ونسميها ضرب التبديلات. وحيث أن تحصيل راسمين كل منهما تناظر أحادي يكون أيضا راسم تناظر أحادي، فإن حاصل ضرب تبديلتين على مجموعة A يكون أيضا تبديلة على المجموعة A . إذن عملية ضرب التبديلات تكون عملية ثنائية على مجموعة كل التبديلات على مجموعة A .

مثال ٧-٢. نفرض $A = \{1,2,3,4,5\}$ ونعرف التبديلة σ على A كما يلي: $1 \to 4,\ 2 \to 2,\ 3 \to 5,\ 4 \to 3,\ 5 \to 1$

أي أن $\sigma(1) = 4,\ \sigma(2) = 2,\ \sigma(3) = 5,\ \sigma(4) = 3,\ \sigma(5) = 1$

سوف نستخدم طريقة قياسية لكتابة التبديلة على مجموعة A وذلك بكتابة التبديلة على صورة مصفوفة من صفين. الصف الأول ترتب فيه

عناصر المجموعة من اليسار إلى اليمين بترتيب معين ثم يكتب في الصف الثاني صور العناصر تحت تأثير σ فنكتب $\sigma(x)$ أسفل العنصر x لكل $x \in A$.

لذلك التبديلة σ المعرفة أعلى تكتب كما يلي

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

الآن نفرض أن τ تبديلة أخري على A معرفة كما يلي:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

سوف نكتب حاصل ضرب (تحصيل) التبديلتين σ , τ على الصورة

$\sigma\tau$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

هنا $(\sigma\tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 5$

كذلك $(\sigma\tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(5) = 1$ وهكذا.

نظرية ٧-٣. نفرض A مجموعة غير خالية ونفرض S_A هي مجموعة كل التبديلات على A. إذن S_A تكون زمرة مع عملية ضرب التبديلات.

البرهان: حيث أن حاصل ضرب تبديلتين يكون تبديلة كما سبق بيانه، فإن S_A تكون مغلقة بالنسبة لعملية ضرب التبديلات . كذلك S_A تكون مجموعة غير خالية، حيث أن راسم الوحدة على A هو راسم تناظر أحادي وبالتالي يكون تبديلة على A . من دراستنا للرواسم نعلم أن عملية تحصيل الرواسم عملية دامجة، لذلك عملية ضرب التبديلات تكون عملية دامجة. تبديلة الوحدة (راسم الوحدة) i حيث $i(a)=a$ لكل $a \in A$ تكون هي العنصر المحايد في S_A. بالنسبة للتبديلة σ ، الراسم العكسي σ^{-1} يكون هو التبديلة العكسية (معكوس التبديلة) للتبديلة σ حيث $\sigma^{-1}(a)$ هو العنصر $a' \in A$ بحيث $a=\sigma(a')$. وجود عنصر وحيد $a' \in A$ يأتي من حقيقة أن الراسم σ يكون أحادي وفوقي. لكل $a \in A$ يكون

$$i(a)=a=\sigma(a')=\sigma(\sigma^{-1}(a))=(\sigma\sigma^{-1})(a)$$

أيضا

$$i(a')=a'=\sigma^{-1}(a)=\sigma^{-1}(\sigma(a'))=(\sigma^{-1}\sigma)(a') .$$

لذلك $\sigma^{-1}\sigma$ و $\sigma\sigma^{-1}$ كلاهما هي التبديلة i . وهذا يكمل البرهان.

في تعريف زمرة التبديلات لم نشترط أن تكون المجموعة A منتهية، ومع ذلك فإنه في جميع الأمثلة التي سوف نتعرض لها تكون A مجموعة منتهية.

لاحظ أن بنية الزمرة S_A تتركز على عدد عناصر A وليس على ماهية تلك العناصر. لذلك إذا كانت المجموعتان A و B لهما نفس العدد من العناصر فإن S_A تكون متماثلة مع S_B . ولتعريف تماثل $\phi : S_A \to S_B$ نفرض $f : A \to B$ راسم تناظر أحادي من A إلى B . وهذا الراسم يمكن تعريفه حيث أن عدد العناصر في المجموعتين متساو. نفرض $\sigma \in S_A$ ونفرض $\phi(\sigma)$ هي التبديلة $\overline{\sigma} \in S_B$ حيث $\overline{\sigma}(f(a)) = f(\sigma(a))$ لكل $a \in A$.

لتوضيح ذلك نفرض $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{x, y, z\}$ ونعرف الراسم $f : A \to B$ كما يلي: $f(1) = x$ ، $f(2) = y$ ، $f(3) = z$. إذن ϕ ترسم $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$.

ببساطة أعدنا تسمية عناصر A في الصفين بعناصر B باستخدام الراسم f ، لذلك أعدنا تسمية عناصر S_A بعناصر S_B. وعموما يمكننا استخدام المجموعة $A = \{1,2,3,\ldots,\mathrm{n}\}$ لترمز إلى المجموعة المنتهية التي عدد عناصرها n .

تعريف ٧-٤. نفرض A المجموعة المنتهية $\{1,2,3,\ldots,\mathrm{n}\}$. زمرة كل التبديلات على المجموعة A تسمى الزمرة المتماثلة symmetric group على n رمز ويرمز لها بالرمز S_n .

لاحظ أن S_n تحتوي على $n!$ عنصر.

مثال ٧-٥ . من الأمثلة المهمة لنا هو الزمرة S_3 والتي تحتوي $3!=6$ عناصر. نفرض A هي المجموعة $\{1,2,3\}$. إذن التبديلات الست على A تكون

$$\rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} ، \quad \mu_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} ، \quad \rho_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\mu_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} ، \quad \rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} ، \quad \mu_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

الجدول التالي يعطي جدول الزمرة S_3:

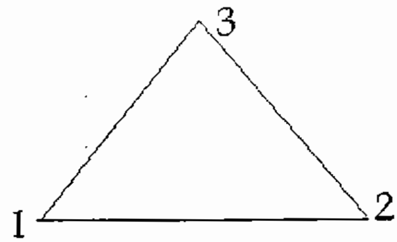
	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

جدول ٧-١

لاحظ أن هذه الزمرة ليست إبدالية حيث أن $\rho_1\mu_1=\mu_3\neq\mu_2=\mu_1\rho_1$.

بينا فيما سبق أن أي زمرة تحتوي على الأكثر أربعة عناصر تكون إبدالية. وفيما بعد سوف نبين أن أي زمرة تتكون من خمسة عناصر أيضا تكون إبدالية. لذلك S_3 يكون لها أقل رتبة لزمرة ليست إبدالية.

الآن نعتبر مثلث متساوي الأضلاع رؤوسه 1 ، 2 ، 3 .



يوجد تناظر طبيعي لعناصر الزمرة S_3 مع طرق وضع نسختين من المثلث بحيث تكونا متطابقين.

لذلك S_3 تسمى أيضا زمرة التماثلات للمثلث متساوي الأضلاع symmetries of an equilateral triangle ويرمز لها بالرمز D_3.

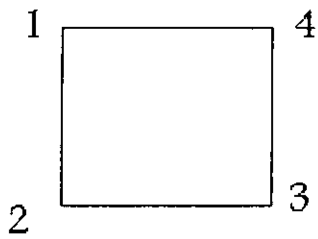
سوف نستخدم ρ_i للدوران و μ_i للانعكاس حول منصفات الزوايا.

الرمز D_3 يشير إلى زمرة الأزواج الثلاثية third dihedral group.

زمرة الأزواج النونية D_n هي زمرة التماثلات للشكل المنتظم ذو n ضلع (المضلع النوني المنتظم).

مثال ٧-٦ . نعتبر الزمرة D_4 للتبديلات التي تناظر طرق مطابقة نسختين من المربع الذي رؤوسه 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

D_4 تسمى زمرة التماثلات للمربع وتسمى أيضا الزمرة الثمانية octic group .



سـوف نرمـز لعناصـر D_4 بـالرموز التاليـة: ρ_i للـدوران ، μ_i للانعكـاس حـول منـصفات الأضـلاع المتعامـدة و δ_i للانعكـاس حـول القطرين.

نفرض

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ، } \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ، } \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ، } \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ، } \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

الجدول التالي يمثل الزمرة D_4

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0

جدول ٧-٢

بالنظر إلى جدول أي زمرة منتهية ، نلاحظ أن كل صف يعطي تبديلة لعناصر المجموعة المكونة للزمرة والمدرجة في أعلى صف في الجدول. كذلك كل عمود في الجدول يعطي تبديلة لعناصر المجموعة المدرجة في أول عمود على يسار الجدول. لذلك ليس من العجيب أن نتوقع أن كل زمرة منتهية G تكون متماثلة مع زمرة جزئية من S_G ، زمرة كل التبديلات على G . نفس الشيء يكون صحيحا للزمرة اللانهائية.

أول ما ظهرت الزمر في الرياضيات ظهرت على صورة تحويلات لبعض الأشياء الرياضية. في الواقع معظم الزمر المنتهية ظهرت كزمرة

تبديلات، بمعنى زمرة جزئية من S_n. الرياضي الإنجليزي كيلي لاحظ أن كل زمرة يمكن اعتبارها كزمرة جزئية من S_A لمجموعة ما A.

نظرية ٧-٧. (نظرية كيلي) Cayley's theorem .

كل زمرة تكون متماثلة مع زمرة تبديلات.

البرهان: نفرض G زمرة. سوف نبين أن G تكون متماثلة مع زمرة جزئية من S_G. نفرض $x \in G$. نعرف الراسم $\lambda_x : G \to G$ بالصورة $\lambda_x(g) = x\,g$ لكل $g \in G$.

المعادلة $\lambda_x(x^{-1}c) = x(x^{-1}c) = c$ لكل $g \in G$ تبين أن λ_x يكون راسما فوقيا على G .

إذا كان $\lambda_x(a) = \lambda_x(b)$ فإن $xa = xb$ ومن قانون الحذف نحصل على $a = b$. إذن λ_x يكون أحاديا وبالتالي يكون تبديلة على G .

الآن نعرف $\phi : G \to S_G$ حيث $\phi(x) = \lambda_x$ لكل $x \in G$.

لبيان أن ϕ أحادي نفرض أن $\phi(x) = \phi(y)$. إذن $\lambda_x = \lambda_y$ وعلى وجه الخصوص $\lambda_x(\mathrm{e}) = \lambda_y(\mathrm{e})$ ومنها $xe = ye$. أي أن $x = y$

ويكون ϕ أحادي.

أيضا $\phi : G \to \phi(G)$ يكون فوقي.

يبقى إثبات أن $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$

أي إثبات أن $\lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y$.

الآن لأي $g \in G$ يكون $\lambda_{xy}(g) = (xy)g$

كذلك

$$(\lambda_x \lambda_y)(g) = \lambda_x(\lambda_y(g)) = \lambda_x(yg) = \mathrm{x(yg)} = \mathrm{(xy)g}$$

إذن $\lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y$.

إذن $\phi : G \to \phi(G)$ يكون تماثل ، حيث $\phi(G)$ زمرة تبديلات (زمرة جزئية من S_G لأن ϕ تشاكل).

المدارات ، الدورات و الزمرة التبادلية

Orbits, cycles and alternating group

كل تبديلة σ على مجموعة A تحدد تجزيئا طبيعيا للمجموعة A إلى خلايا لها الخاصية أن العنصران $a,b \in A$ يكونا في نفس الخلية إذا $b = \sigma^n(a)$ لبعض $n \in \mathbb{Z}$. سوف نستنتج هذا التجزيء باستخدام علاقة تكافؤ مناسبة كما يلي:

لكل $a,b \in A$ نفرض $a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $b = \sigma^n(a)$ لبعض $n \in \mathbb{Z}$. (١)

سوف نبرهن أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ

<u>الانعكاس</u>: واضح أن $a \sim a$ حيث $a = i(a) = \sigma^0(a)$. أي أن $\sim$ عاكسة.

<u>التماثل</u>: إذا كان $a\sim b$ فإن $b=\sigma^n(a)$ لبعض $n\in\mathbb{Z}$. ولكن إذن $a=\sigma^{-n}(\mathrm{b})$ و $-n\in\mathbb{Z}$. لذلك $b\sim a$ وتكون $\sim$ متماثلة.

<u>الانتقال</u>: نفرض $a\sim b$ و $b\sim c$. إذن $b=\sigma^n(a)$ و $c=\sigma^m(\mathrm{b})$ لبعض $m,n\in\mathbb{Z}$.

إذن $c=\sigma^m(\sigma^n(a))=\sigma^{n+m}(a)$. إذن $a\sim \mathrm{c}$ وتكون $\sim$ متعدية.

تعريف ٧-٨. نفرض σ تبديلة على المجموعة A. فصول التكافؤ في A المحددة بعلاقة التكافؤ (١) المعرفة أعلى تسمى مدارات σ orbits .

مثال ٧-٩. أوجد مدارات التبديلة

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&8&6&7&4&1&5&2\end{pmatrix}$$

في S_8 .

الحل: لإيجاد المدار الذي يحتوي 1 نطبق σ بالتتابع لنحصل على

$$1\xrightarrow{\sigma}3\xrightarrow{\sigma}6\xrightarrow{\sigma}1\xrightarrow{\sigma}3\xrightarrow{\sigma}6\ldots$$

حيث أن σ^{-1} سوف تكون بعكس الأسهم في هذه السلسلة نجد أن المدار الذي يحتوي 1 هو $\{1,3,6\}$.

الآن نختار عدد صحيح من بين الأعداد $1-8$ ليس من بين الأعداد $\{1,3,6\}$، 2 مثلا ، نجد أن المدار الذي يحتوي 2 هو $\{2,8\}$. أخيرا المدار الذي يحتوي 4 هو $\{4,5,7\}$. حيث أن هذه المدارات الثلاث

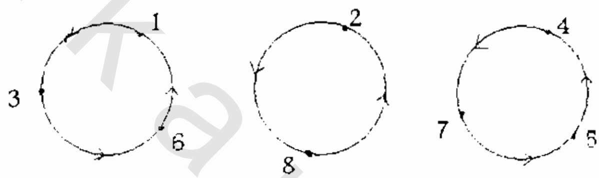
تشمل كل الأعداد الصحيحة من 1 إلى 8 ، نجد أن مجموعة المدارات هي $\{1,3,6\}, \{2,8\}, \{4,5,7\}$.

الدورات Cycles

بالعودة للمثال السابق، مدارات التبديلة

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

يمكن تمثيلها هندسيا كما يلي



كل مدار على شكل دائرة حيث تشير الأسهم ، والتي تكون في عكس اتجاه عقارب الساعة، إلى تأثير σ على عناصر المجموعة. فمثلا الدائرة التي أقصى اليسار تشير إلى أن $\sigma(1)=3$ ، $\sigma(3)=6$ ، $\sigma(6)=1$.

كل دائرة من هذه الدوائر المنفصلة في نفسها تعرف تبديلة في S_8. فعلى سبيل المثال، الدائرة التي في أقصى اليسار تناظر التبديلة

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

والتي تؤثر على 1,3,6 كما تؤثر σ وتترك بقية الأعداد الصحيحة 2,4,5.7,8 دون تأثير. باختصار μ لها مدار واحد مكون من ثلاثة

عناصر $\{1,3,6\}$ وخمسة مدارات كل مدار مكون من عنصر واحد $\{8\},\{7\},\{5\},\{4\},\{2\}$. مثل هذه التبديلة التي تمثل هندسيا بدائرة واحدة تسمى دورة.

تعريف ٧-١٠. التبديلة σ في S_n تسمى دورة cycle إذا كان لها على الأكثر مدار واحد يحتوي أكثر من عنصر. طول الدورة length هو عدد العناصر في مدارها الأكبر.

نرمز للدورة μ أعلى بالصورة $\mu=(1,3,6)$.

مثال ٧-١١. في S_5 نجد أن

$$(1,3,5,4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

لاحظ أن $(1,3,5,4)=(3,5,4,1)=(5,4,1,3)=(4,1,3,5)$

وحيث أن الدورات هي أنواع خاصة من التبديلات لذلك يمكننا ضرب الدورات بنفس طريقة ضرب التبديلات. وباستخدام صيغة الدورة نجد أن التبديلة σ في مثال ٤ يمكن كتابتها كحاصل ضرب دورات كما يلي

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$=(1,3,6)(2,8)(4,7,5)$$

هذه الدورات منفصلة disjoint بمعنى أن أي عدد صحيح يتحرك بواسطة واحدة فقط من هذه الدورات.

نظرية ٧-١٢ . أي تبديلة σ على مجموعة منتهية يمكن أن تكتب كحاصل ضرب عدد من الدورات المنفصلة.

البرهان: نفرض أن $B_1, B_2, \ldots B_r$ هي مدارات σ . إذن هذه المدارات تكون منفصلة لأنها فصول تكافؤ. نعرف الدورة μ_i كما يلي

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \sigma(\mathrm{x}) & \text{for} \quad x \in B_i \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

واضح أن $\sigma = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r$

كذلك $\mu_1 . \mu_2 , \ldots , \mu_r$ تكون منفصلة.

مع أن عملية ضرب التبديلات ليست إبدالية على وجه العموم، إلا أنه يمكن بيان أن عملية ضرب الدورات المنفصلة تكون إبدالية.

مثال ٧-١٣ . نعتبر التبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

لنكتب هذه التبديلة كحاصل ضرب دورات منفصلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)(2,5,3)$$

عملية ضرب الدورات المنفصلة إبدالية، لذلك ترتيب العوامل $(1,6)$ و $(2,5,3)$ غير مهم.

المثال التالي يوضح أنه إذا كانت الدورتان غير منفصلتان فإن حاصل ضربهما لا يكون إبداليا وليس بالضرورة أن يكون دورة مع أنه تبديلة.

مثال ٧-١٤ . نعتبر الدورتين $(1,4,5,6)$ و $(2,1,5)$ في S_6 . إذن

$$(1,4,5,6)(2,1,5)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&4&3&5&2&1\end{pmatrix}$$

$$(2,1,5)(1,4,5,6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&6&5\end{pmatrix}$$

التباديل الزوجية والتباديل الفردية Even and odd permutations

من المقبول ملاحظة أن أي إعادة لترتيب حدود المتتابعة $1,2,\ldots,n$ يمكن الحصول عليه بتكرار تبديل وضع أزواج من الحدود.

تعريف ٧-١٥ . الدورة التي طولها 2 تسمى مناقلة (تبديلة مكانين) transposition . لذلك المناقلة تترك جميع العناصر ثابتة عدا عنصرين فإنها ترسم كل منهما للآخر.

مثال ٧-١٦ . في S_6

$$(1,2)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&4&5&6\end{pmatrix}$$

$$(3,5)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&5&4&3&6\end{pmatrix}$$

مناقلتان.

الحسابات تبين أن

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(a_1,a_n)(a_1,a_{n-1})\ldots(a_1,a_3)(a_1,a_2)$$

لذلك أي دورة تكون حاصل ضرب مناقلات.

نتيجة ٧-١٧ . أي تبديلة على مجموعة منتهية بها على الأقل عنصرين تكون حاصل ضرب مناقلات.

مثال ٧-١٨. $(1,6)(2,5,3)=(1,6)(2,3)(2,5)$.

مثال ٧-١٩ . في S_n حيث $n \geq 2$ تبديلة الوحدة تكون حاصل ضرب مناقلتين $(1,2)(1,2)$.

رأينا فيما سبق أن كل تبديلة على مجموعة منتهية مكونة على الأقل من عنصرين يمكن أن تكتب كحاصل ضرب مناقلات. هذه المناقلات قد لا تكون منفصلة. وتمثيل التبديلة بهذه الطريقة ليس وحيدا. فعلى سبيل المثال في بداية أي تمثيل يمكننا وضع المناقلة $(1,2)$ مرتين لأن $(1,2)(1,2)$ هي تبديلة الوحدة. الأمر المؤكد هو أن عدد المناقلات المستخدم لتمثيل تبديلة معطاة دائما إما يكون زوجيا أو يكون فرديا، وهذه قاعدة مهمة.

نظرية ٧-٢٠ . لا توجد تبديلة في S_n يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب عدد زوجي من المناقلات وفي نفس الوقت يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب عدد فردي من المناقلات.

البرهان: سبقت الإشارة إلى أنه إذا كانت A و B مجموعتان لهما نفس العدد من العناصر فإن $S_A \cong S_B$. سوف نتعامل مع تبديلات لصفوف مصفوفة الوحدة I_n من درجة n والتي عددها n بدلا عن تبديلات للأعداد $1,2,\ldots,n$.

مصفوفة الوحدة محددها يساوي 1 وتبديل أي صفين لمصفوفة مربعة يغير إشارة محددها. نفرض C هي المصفوفة التي حصلنا عليها بالتبديلة σ على صفوف I_n. إذا أمكن الحصول على C من I_n بعدد فردي مرة وعدد زوجي مرة أخري من المناقلات فإن المحدد سوف يأخذ القيمة 1 مرة والقيمة 1- مرة أخرى وهذا غير ممكن. لذلك σ لا يمكن التعبير عنها كحاصل عدد زوجي من المناقلات وفي نفس الوقت يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب عدد فردي من المناقلات.

تعريف ٧-٢١ . التبديلة على مجموعة منتهية تسمى زوجية even إذا أمكن كتابتها كحاصل ضرب عدد زوجي من المناقلات وتسمى فردية odd إذا أمكن كتابتها كحاصل ضرب عدد فردي من المناقلات.

مثال ٧-٢٢ . التبديلة $(1,4,5,6)(2,1,5)$ في S_6 يمكن أن تكتب على الصورة $(1,4,5,6)(2,1,5)=(1,6)(1,5)(1,4)(2,5)(2,1)$

لذلك هذه التبديلة تكون فردية.

تبديلة الوحدة في S_n تكون زوجية حيث أن

$$i=(1,2(1,2)$$

الزمر التبادلية The alternating groups

سوف نوضح أنه إذا كانت $n\geq 2$ فإن عدد التبديلات الزوجية في S_n يساوي عدد التبديلات الفردية. أي أن S_n تنقسم إلى جزأين متساويين كل منهما يحتوي عدد $\frac{n!}{2}$ من التبديلات. لبيان ذلك نفرض أن

A_n ترمز إلى مجموعة كل التبديلات الزوجية في S_n ونفرض أن B_n ترمز إلى مجموعة كل التبديلات الفردية في S_n، حيث $n \geq 2$.

سوف نعرف راسم تناظر أحادي بين عناصر A_n وعناصر B_n وهو ما يبرهن على أن A_n و B_n لهما نفس العدد من العناصر.

نفرض τ أي مناقلة محددة في S_n، وهذه تكون موجودة حيث أن $n \geq 2$. نفرض أن $\tau = (1,2)$ ونعرف الراسم $\lambda_\tau : A_n \to B_n$ بالصورة $\lambda_\tau(\sigma) = \tau\sigma$

أي أن λ_τ يرسم σ إلى $(1,2)\sigma$.

حيث أن σ تبديلة زوجية، التبديلة $(1,2)\sigma$ تكون حاصل ضرب (عدد زوجي +١) ، أي عدد فردي من المناقلات. لذلك $(1,2)\sigma$ تنتمي إلى B_n.

نفرض $\sigma, \mu \in A_n$. إذا كان $\lambda_\tau(\sigma) = \lambda_\tau(\mu)$

فإن $(1,2)\sigma = (1,2)\mu$.

وحيث أن S_n زمرة فإن $\sigma = \mu$ (من قانون الحذف).

لذلك λ_τ يكون أحادي.

أخيرا $\tau = (1,2) = \tau^{-1}$.

لذلك إذا كان $\rho \in B_n$ فإن $\tau^{-1}\rho \in A_n$

و $\lambda_\tau(\tau^{-1}\rho) = \tau(\tau^{-1}\rho) = \rho$

أي أن λ_τ يكون فوقي.

إذن عدد العناصر في A_n يكون هو نفس عدد العناصر في B_n. لاحظ أن حاصل ضرب تبديلتين زوجيتين يكون أيضا تبديلة زوجية. وحيث أن $n \geq 2$ فإن S_n تحتوي المناقلة $(1,2)$ و $i=(1,2)(1,2)$ تكون تبديلة زوجية. أخيرا نلاحظ أنه إذا كانت σ يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب مناقلات فإن حاصل ضرب نفس المناقلات مأخوذة بترتيب معكوس يعطي σ^{-1}. لذلك إذا كانت σ تبديلة زوجية فإن σ^{-1} تكون أيضا تبديلة زوجية.

من هذه المناقشة يمكننا صياغة النتيجة التالية:

نظرية ٧-٢٣ . إذا كانت $n \geq 2$ فإن مجموعة كل التبديلات الزوجية على المجموعة المكونة من n عنصر تكون زمرة جزئية من S_n رتبتها تساوي نصف رتبة S_n أي تساوي $\frac{n!}{2}$.

تعريف ٧-٢٤ . الزمرة الجزئية من S_n والتي تتكون من كل التبديلات الزوجية على مجموعة من n عنصر تسمى الزمرة التبادلية alternating group ويرمز لها بالرمز A_n.

تمارين ٧

١- نفرض $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&3&6&5\end{pmatrix}$ ،

$\mu=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&2&4&3&1&6\end{pmatrix}$ ، $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&5&6&2\end{pmatrix}$

أحسب $\sigma^{-1}\tau\sigma$ ، $\sigma^{-2}\tau$ ، $\mu\sigma^2$ ، $\tau^2\sigma$ ، $\tau\sigma$ ، μ^{100} ، σ^{100} ،

$|<\tau^2>|$ ، $|<\sigma>|$.

٢- في ما يلي حدد ما إذا كان الراسم المعطى تبديلة على $\mathbb{R}$:

(أ) $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بالصورة $f_1(x)=x+1$.

(ب) $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بالصورة $f_2(x)=x^2$.

(جـ) $f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بالصورة $f_3(x)=-x^3$.

(د) $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بالصورة $f_4(x)=e^x$.

(هـ) $f_5:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ معرف بالصورة $f_5(x)=x^3-x^2-2x$.

٣- أوجد كل المدارات في التبديلة المعطاة في كل مما يأتي:

(أ) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&3&6&2&4\end{pmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&2&4&8&3&1&7\end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&5&1&4&6&8&7\end{pmatrix}$

(د) $\sigma:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\sigma(n)=n+1$.

(هـ) $\sigma:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\sigma(n)=n+2$.

(و) $\sigma:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ حيث $\sigma(n)=n-3$.

٤- أحسب حاصل ضرب الدورات والتي هي تبديلات على $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ في كل مما يأتي:

(أ) $(1,4,5)(7,8)(2,5,7)$.

(ب) $(1,3,2,7)(4,8,6)$.

(جـ) $(1,2)(4,7,8)(2,1)(7,2,8,1,5)$.

٥- عبر عن التبديلة على $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ المعطاة كحاصل ضرب مناقلات

(أ) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&2&6&3&7&4&5&1\end{pmatrix}$.

(ب) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&4&1&8&2&5&7\end{pmatrix}$.

(جـ) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&1&4&7&2&5&8&6\end{pmatrix}$.

٦- نعتبر S_n حيث $n\geq 3$. أثبت أن

(أ) كل تبديلة في S_n يمكن أن تكتب كحاصل ضرب عدد $n-1$ مناقلة على الأكثر.

(ب) كل تبديلة في S_n ليست دورة يمكن أن تكتب كحاصل ضرب عدد $n-2$ مناقلة على الأكثر.

(جـ) كل تبديلة فردية في S_n يمكن أن تكتب كحاصل ضرب عدد $2n+3$ مناقلة و كل تبديلة زوجية يمكن أن تكتب كحاصل ضرب عدد $2n+8$ مناقلة.

٧- بين أنه لأي زمرة جزئية H من S_n ، حيث $n \geq 2$ ، إما جميع التبديلات في H تكون زوجية أو نصف التبديلات تحديدا تكون زوجية.

٨- نفرض σ تبديلة للمجموعة A . نقول أن "σ تحرك $a \in A$ " إذا كان $\sigma(a) \neq a$. إذا كانت A مجموعة منتهية فكم عنصر يتحرك بدورة $\sigma \in S_A$ طولها n ؟

٩- نفرض G زمرة و a عنصر معين في G . بين أن الراسم $\lambda_a : G \to G$ حيث $\lambda_a(g) = ag$ لكل $g \in G$ يكون تبديلة للمجموعة G .